CC1 : 22 octobre 2015 - Intégrales de Riemann

On attachera le plus grand soin à la présentation. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1. *Soit $0 < a < b$ deux réels et $p \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite des deux suites définies par :*

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{a + \frac{k}{n}b} \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{n^{p+1}}.$$

Exercice 2. *Calculer les intégrales suivantes :*

$$I_1 = \int_0^\pi e^{\sin x}\cos x\ dx \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx \quad I_3 = \int_1^e (\ln(x))^2 dx.$$

Exercice 3. *Calculer les primitives suivantes (on précisera soigneusement l'intervalle où ces primitives sont définies) :*

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} \qquad \int (x+2)\sqrt{x+4}\ dx \qquad \int x\tan^2 x\ dx$$

(pour le calcul de la troisième primitive, on rappelle que la dérivée de $x \longmapsto \tan x$ est $x \longmapsto 1 + \tan^2 x$).

Exercice 4. *Soit $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant*

$$\int_0^\pi f(t)\sin t\ dt = 0.$$

1) Montrer que f admet au moins un zéro sur l'intervalle $[0,\pi]$ (Indication : raisonner par l'absurde et utiliser une propriété vue cours).
2) On suppose en outre que f vérifie

$$\int_0^\pi f(t)\cos t\ dt = 0.$$

a) Montrer que pour tout $t_0 \in [0,\pi]$, la fonction f vérifie

$$\int_0^\pi f(t)\sin(t - t_0)\ dt = 0.$$

b) Montrer que f admet au moins deux zéros sur l'intervalle $[0,\pi]$. (Indication : raisonner par l'absurde et utiliser les deux questions précédentes).