CC2 : 30 novembre 2015 (15h-16h30) - Intégrales généralisées

On attachera le plus grand soin à la présentation. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1. *Calculer la valeur des trois intégrales :*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt \qquad I_3 = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

(on justifiera la convergence de chacune de ces trois intégrales).

Exercice 2. *Les trois intégrales suivantes sont-elles absolument convergentes ? Sont-elles convergentes ?*

$$J_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{\sin(9t)\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^3}dt \qquad J_2 = \int_0^1 \frac{(\sin(5t) - \arccos(t) - 2)}{\sqrt{t}}dt \qquad J_3 = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\sqrt{t}}dt$$

Exercice 3. *Démontrer que l'intégrale* $\int_0^\infty \frac{\sin(t-2)}{t+1}dt$ *converge.*

Exercice 4. *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose qu'il existe deux réels* $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} f(t) = \ell'.$$

1) a) Pour $x \in \mathbb{R}_+$ *on définit la fonction* F *par* $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. *Exprimer*

$$\int_0^x (f(t+1) - f(t))dt$$

en fonction de F.

b) En utilisant la formule de la moyenne, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty}(f(t+1) - f(t))dt$ *en fonction de* ℓ.

2) En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty}(f(t+1) - f(t))dt$.

3) Que vaut $\int_{-\infty}^{+\infty}(\arctan(t+1) - \arctan(t))dt$ *?*