CC2 : Intégrales généralisées - 16 novembre 2016 (1h30)

Notes de cours et calculatrices interdites. On accordera une grande importance au soin et à la rédaction. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans chaque exercice, l'étudiant peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.

Le barème est indicatif.

Exercice 1. *(5 points). Pour $a > 0$, on considère l'intégrale*

$$I(a) = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^a} dx.$$

1) Pour quelles valeurs du paramètre a, l'intégrale $I(a)$ est-elle convergente ?

2) Calculer la valeur de l'intégrale $I(a)$ (lorsque celle-ci converge).

Exercice 2. *(9 points). Il s'agit de trois questions indépendantes.*

1) Discuter en fonction du paramètre $c \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale (on traitera à part le cas $c = 1$) :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} - e^{-cx}}{x} dx.$$

2) Discuter en fonction du paramètre $a > 0$ la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^a - 1}}.$$

3) On rappelle que $\arctan(x) = x + o(x)$ *lorsque $x \to 0$. Etudier la convergence de l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^b \ln(1 + x^3)} dx.$$

Exercice 3. *(7 points). Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x} + \cos x}$.*

1) Démontrer que l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ converge.

Etant donnés deux fonctions $g, h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que $g(x) \sim h(x)$ lorsque $x \to +\infty$, on rappelle qu'il existe $x_0 \geq 1$ et une fonction $\eta : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) = h(x)(1 + \eta(x))$ avec $\lim_{x \to +\infty} \eta(x) = 0$.

2) Démontrer l'existence d'un réel $x_0 \geq 1$ et d'une fonction $\eta : [x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x \to +\infty} \eta(x) = 0$ et telle que l'on ait l'égalité :

$$\forall x \geq x_0, \quad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\frac{\sin(2x)}{x} + \frac{\sin x \cos^2 x}{x\sqrt{x}}(1 + \eta(x)).$$

3) Soit $m \in \mathbb{R}$ un paramètre et $\alpha \in]0, 1]$. Démontrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(mx)}{x^\alpha} dx$ converge.

4) En déduire la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

5) Que peut-on conclure quant à la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x)dx$?