CC3 : Séries numériques - 14 décembre 2015 - 15h-16h15 (1h15)

On attachera une grande importance au soin et à la présentation. Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Exercice 1. *(12 points). Il s'agit de cinq questions indépendantes.*

1) Etudier la nature de la série $\sum(1+\frac{1}{n^2})^{-n\sqrt{n}}$.

2) Etudier la nature de la série $\sum \frac{n^{2n}}{(n^3+1)^n}$.

3) Discuter en fonction du paramètre $a>0$ *la nature de la série* $\sum \frac{1}{a^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

4) La série numérique $\sum(-1)^n \arctan(\frac{1}{n})$ *est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?*

5) On rappelle que pour $n=0$, $0!=1$ *et pour* $n\geq 1$, $n!$ *désigne le produit des* n *entiers de* 1 *jusqu'à* n. *Etudier la nature de la série* $\sum \frac{n!}{n^n}$.

Exercice 2. *(2 points). Pour* $n\geq 2$ *on définit* u_n *par* $u_n=\frac{n}{(n^2-1)^2}$. *Calculer la somme de cette série (Indication : décomposer le terme général en fonction de* $\frac{1}{(n+1)^2}$ *et* $\frac{1}{(n-1)^2}$*).*

Exercice 3. *Soit* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *une suite à valeurs strictement positives. Pour* $n\geq 1$, *on pose :*

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\quad S=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=1}^{N}u_k,\quad R_n=\lim_{N\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{N}u_k.$$

1) (1 point). Pourquoi S *et* R_n *sont-elles bien définies dans* $[0,+\infty]$ *?*

2) (2 points). On suppose que $S<+\infty$. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty}R_n$.

3) (3 points). Soit $0\leq\alpha\leq\beta<1$. *On suppose qu'il existe* $N_0\in\mathbb{N}$ *tel que pour tout* $k\geq N_0$ *on ait :*

$$\alpha\leq\frac{u_{k+1}}{u_k}\leq\beta.$$

Montrer que pour tout $n\geq N_0$ *:*

$$\frac{\alpha}{1-\alpha}\leq\frac{R_n}{u_n}\leq\frac{\beta}{1-\beta}.$$

4) (3 points). On suppose dans cette question qu'il existe $\ell\in[0,1[$ *tel que* $\frac{u_{n+1}}{u_n}\to\ell$ *lorsque* $n\to+\infty$. *Etudier la limite de* $\frac{R_n}{u_n}$.

5) (1 point). Etudier la limite de la suite

$$\frac{n^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{k!}{k^k}.$$