Examen Session 1 (impairs) : Analyse 3 (HLMA 302) durée 3h

ON ATTACHERA UNE TRES GRANDE IMPORTANCE AU SOIN. TOUTE REPONSE NON JUSTIFIEE NE SERA PAS PRISE EN COMPTE.

Question de cours. *Soit $\sum x_n$ et $\sum y_n$ deux séries à termes réels strictement positifs telles que :*

$$\exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N,\ \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{y_{n+1}}{y_n}.$$

Démontrer que si la série $\sum y_n$ converge, alors la série $\sum x_n$ converge.

Exercice 1. *Intégrales de Riemann. Calculer les deux intégrales suivantes :*

$$\int_1^2 \frac{1}{x(1+x)}dx,\ \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2}dx.$$

Exercice 2. *Séries. Il s'agit de questions indépendantes.*

1) La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cos(\frac{1}{n})$ est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?
2) Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \exp\left(n^\alpha \cos(\frac{1}{n})\right) - 1, \quad n \geq 1.$$

3) Enoncer la règle d'Abel pour les séries numériques et étudier la nature de la série $\sum \frac{\sqrt{n}}{n-1} \cos(n)$.
4) Discuter en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la nature de la série $\sum u_n$ où

$$u_n = \frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+n)^\alpha}, \quad n \geq 1.$$

Exercice 3. *Intégrales généralisées. Il s'agit de questions indépendantes.*

1) Etudier la nature des intégrales $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}dx$ et $\int_1^\infty \frac{1-\cos x}{x}dx$
2) Discuter en fonction des réels a et b la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty \left((1+\frac{1}{x})^{1+\frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x}\right) dx$.
3) Etudier la convergence de l'intégrale $\int_2^\infty (\ln(x))^{-\ln(\ln(x))}dx$ (comparer $x \longmapsto (\ln(x))^{-\ln(\ln(x))}$ à une fonction simple).

Problème. *Le but de l'exercice est le calcul de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}dt$.*

1) Justifier l'existence de I.
2) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ l'intégrale $\int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$ est une constante indépendante de x.
3) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$ on a : $\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}dt = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$.
4) Déduire pour tout $x \in]0,1[$ l'encadrement : $x^2 \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t} \leq \int_0^x \frac{t-1}{\ln t}dt \leq x \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.
5) Déterminer la valeur de I.