Examen Session 2 (impairs) : Analyse 3 (HLMA 302) durée 3h - 15 juin 2015

ON ATTACHERA UNE TRES GRANDE IMPORTANCE AU SOIN. TOUTE REPONSE NON JUSTIFIEE NE SERA PAS PRISE EN COMPTE. LE BARÊME EST INDICATIF.

Exercice 1. *(2 points). Justifier la convergence de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$ *et calculer sa valeur.*

Exercice 2. *(3 points). Etudier la convergence des deux intégrales suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$ désigne un paramètre réel) :*

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}\right) \mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \left(\frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}\right) \mathrm{d}x.$$

Exercice 3. *(2 points). Montrer que la série* $\sum \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ *($n \geq 2$) converge et calculer sa somme.*

Exercice 4. *(5 points). On considère la série* $\sum \frac{x^n}{y^n+n}$ *où $x, y \in \mathbb{R}$ sont deux paramètres réels.*
1) Etudier la convergence de la série lorsque $|x| = 1$ et $|y| = 1$.
2) Déterminer et représenter dans $\mathbb{R}^2$ le domaine de convergence de cette série.
3) Pour quelles valeurs de x et y cette série converge-t-elle sans converger absolument ?

Exercice 5. *(3 points). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive et croissante.*
1) Que peut-on dire du comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (justifier) ?
2) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Etudier la convergence de la série $\sum \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$.
3) On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge. Etudier la convergence de la série $\sum \frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}$ *(indication : considérer la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$).*

Exercice 6. *(3 points). On considère la série* $\sum \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ *($n \geq 1$) où $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ désignent deux paramètres réels.*

1) Montrer que si $\alpha > 1$, la série converge absolument pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que si $0 < \alpha \leq 1$ la série converge si et seulement si $\theta \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 7. *(4 points). Soit* $I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(\pi t) - \arctan(t)}{t} \, \mathrm{d}t$.
1) Montrer que cette intégrale converge (indication : étudier $t \longmapsto \arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t})$).
2) Soit $a > 0$ et $I(a)$ l'intégrale définie par $I(a) := \int_0^a \frac{\arctan(\pi t) - \arctan(t)}{t} \, \mathrm{d}t$. *Justifier l'existence de $I(a)$ et montrer que*

$$I(a) = \int_a^{\pi a} \frac{\arctan(t) - \frac{\pi}{2}}{t} \, \mathrm{d}t + \frac{\pi}{2} \ln(\pi).$$

3) En déduire la valeur de I.