

Module doctoral : Outils de commande, d'observation et optimisation des systèmes pour la modélisation

Térence Bayen

Université Montpellier

March 14, 2016



- 1 Introduction : présentation de quelques aspects du contrôle
- 2 Contrôlabilité
 - Définitions générales
 - Systèmes affines en la commande
 - Théorème de Chow
 - Lien avec les systèmes linéaires en la commande
- 3 Introduction au calcul des variations
 - Généralités
 - Minimum faible
 - Quelques exemples
 - Minimum fort
- 4 Principe du maximum de Pontryagin
 - Enoncé du PMP
 - Exemples d'application du PMP
 - PMP en EDP
- 5 Problèmes de temps minimal, arcs singuliers, temps de crise
 - Arcs singuliers
 - Synthèse optimale pour un bio-réacteur fed-batch
 - Méthode de régularisation
 - Principe Hybride, Viabilité, temps de crise

Bibliographie



T. Bayen, *Notes de cours sur le contrôle optimal et le principe du maximum de Pontryagin*, 2015.



A. Bressan, B. Piccoli, *Introduction to Mathematical Control Theory*, AIMS Ser. Appl. Math., vol. 2 (2007).



J.F. Bonnans, *Lecture Notes in Optimal Control Theory*, 2006
<http://www.cmap.polytechnique.fr/~bonnans/notes.html>



J.-M. Coron, *Control and Nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monograph, AMS, 2007.
<http://www.ann.jussieu.fr/~coron/Documents/Coron-book.pdf>



F. Jean, *Géométrie différentielle et application au contrôle géométrique*, Notes de cours 2011,
<http://wwwwfr.ensta.fr/Cours/?sigle=A0T13>.



V. Jurdjevic, *Geometric control theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics (52), 1996.



J.-P. Laumond, *Robot Motion Planning and Control*, Springer, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 1998, <http://projects.laas.fr/gepetto/uploads/Publications/promotion-chap1.pdf>



A. Rapaport, *Notes de cours sur le contrôle optimal et l'équation d'Hamilton-Jacobi*, 2015.



E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, 2005,
<https://www.ljll.math.upmc.fr/~trelat/>

...

Plan

- 1 Introduction : présentation de quelques aspects du contrôle
- 2 Contrôlabilité
 - Définitions générales
 - Systèmes affines en la commande
 - Théorème de Chow
 - Lien avec les systèmes linéaires en la commande
- 3 Introduction au calcul des variations
 - Généralités
 - Minimum faible
 - Quelques exemples
 - Minimum fort
- 4 Principe du maximum de Pontryagin
 - Énoncé du PMP
 - Exemples d'application du PMP
 - PMP en EDP
- 5 Problèmes de temps minimal, arcs singuliers, temps de crise
 - Arcs singuliers
 - Synthèse optimale pour un bio-réacteur fed-batch
 - Méthode de régularisation
 - Principe Hybride, Viabilité, temps de crise

Théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$. On s'intéresse au problème de Cauchy:

$$\dot{x} = g(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \quad (\text{PC})$$

Hypothèses:

- A. Pour tout x la fonction $t \mapsto g(t, x)$ est mesurable et pour tout t , la fonction $x \mapsto g(t, x)$ est continue.
- B. Pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $c_K > 0$ et $L_K > 0$ telles que:

$$|g(t, x)| \leq c_K, \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq L_K |x - y|, \quad (t, x) \in K, \quad (t, y) \in K.$$

Théorème

- (i) Il existe $\varepsilon > 0$ telle que (PC) ait une solution **locale** x définie sur $[t_0, t_0 + \varepsilon]$.
- (ii) Si en outre g vérifie :

$$|g(t, x)| \leq c, \quad |g(t, x) - g(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t, x, y,$$

alors $\forall T > t_0$, (PC) admet une **unique** solution x définie sur $[t_0, T]$ qui dépend **continûment** de x_0 .

Rem: En général $g(t, x) := f(t, x, u(t))$.

Lemme de Gronwall

Le **Lemme de Gronwall** assure l'unicité dans le théorème précédent.

Lemma

Soit $z : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta : [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ trois fonctions vérifiant l'inégalité:

$$\dot{z}(t) \leq \alpha(t)z(t) + \beta(t) \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

Alors $z(\cdot)$ vérifie l'inégalité:

$$z(t) \leq z(t_0)e^{\int_{t_0}^t \alpha(s)ds} + \int_{t_0}^t \beta(s)e^{\int_{t_0}^s \alpha(\sigma)d\sigma} ds.$$

Exemples :

- Explosion : $\dot{x} = x^2$ avec $x(0) = x_0 > 0$ (en temps $\frac{1}{b_0}$)
- Unicité : $\dot{x} = 2\sqrt{|x|}$ avec $x(0) = 0$. Prendre $a < 0 < b$ et

$$x(t) = \begin{cases} -(t-a)^2 & t \leq a \\ 0 & t \in [a, b] \\ (t-b)^2 & t \geq b \end{cases}$$

Multi-applications

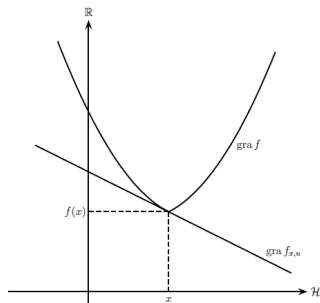
Soit X et Y deux espaces de Banach.

Définition

- (i) Une multi-fonction F de X dans Y est une application qui à chaque point $x \in X$ associe un ensemble $F(x) \subset Y$. On note en général une telle application $F : X \rightrightarrows Y$.
- (ii) On dit que F est à **valeurs compactes** si pour tout $x \in X$, l'ensemble $F(x)$ est compact dans Y , et on dit que F est **bornée** si toutes ses valeurs sont contenues dans une boule B fixée de Y .

Exemples:

- Soit $f : X \rightarrow Y$ et $F : Y \rightrightarrows X$ définie par $F(y) := \{x \in X ; f(x) = y\}$.
- Sous-différentiel $x \mapsto \partial f(x)$ d'une fonction convexe $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ (H Hilbert).



Multi-applications

Définition

On définit la **distance de Hausdorff** entre deux ensembles compacts $A, A' \subset X$ par:

$$d_H(A, A') := \max(\sup_{x \in A} d(x, A'), \sup_{x' \in A'} d(x', A)).$$

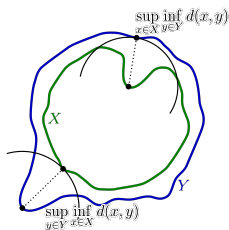
On dit qu'une multi-application F à valeurs compactes est **continue** si

$$\lim_{y \rightarrow x} d_H(F(y), F(x)) = 0, \forall x \in X.$$

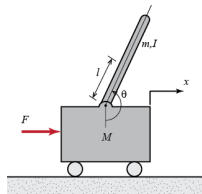
On dit que F possède un **graphe fermé** si son graphe:

$$\text{Graph}(F) := \{(x, y) ; x \in X ; y \in F(x)\}$$

est fermé dans $X \times Y$. Autrement dit: $x_n \rightarrow x$ et $y_n \rightarrow y$ avec $y_n \in F(x_n) \forall n \Rightarrow y \in F(x)$.



Quelques questions en contrôle optimal



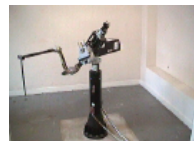
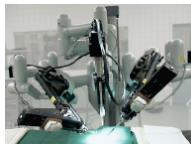
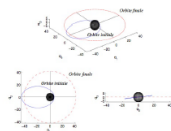
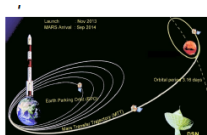
Problème de contrôle optimal

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad u(t) \text{ mes.} \quad x(0) \in M_0 \quad x(T_u) \in M_1 \quad \text{et}$$

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^{T_u} \ell(t, x_u(t), u(t)) dt + \phi(T_u, x_u(T_u)).$$

- Aller de M_0 à M_1 ? **Contrôlabilité**
- Parmi les chemins de M_0 à M_1 , lequel est le meilleur? **Contrôle optimal**
- Autres questions : méthodes numériques (discrétisation, tir...), stabilisation (Lyapunov), problèmes hybrides, impulsionnels...

Les champs d'application du contrôle optimal



- Mécanique
- Biologie, Médecine
- Bioprocédés
- Aérospatial
- Economie, finance (contrôle stochastique...)

Système contrôlés et inclusions différentielles

- Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.
- On suppose que f est **continue et continûment différentiable** par rapport à x .
- Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ un ensemble **compact**.

On considère le **système différentiel contrôlé** :

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad u(\cdot) \in \mathcal{U} \quad (1)$$

où $\mathcal{U} := \{u : [0, \infty) \rightarrow U ; u \text{ mesurable}\}$.

Définition

On considère la multiplication $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$

$$F(t, x) := \{f(t, x, \omega) ; \omega \in U\}.$$

L'ensemble $F(t, x)$ s'appelle ensemble des **vitesses augmentées**.

On considère **l'inclusion différentielle**

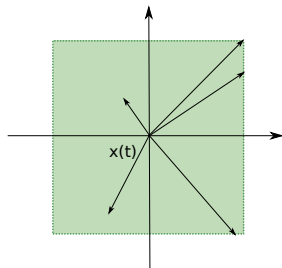
$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)), \quad \text{p.p. } t. \quad (2)$$

Ensemble des vitesses augmentées

- Soit le système plan:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = u_2(t) \end{cases}$$

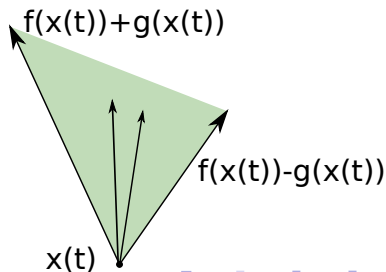
avec $u = (u_1, u_2) : [0, \infty) \rightarrow [-1, 1]^2$



- Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + u(t)g(x(t))$$

où $u : [0, \infty) \rightarrow [-1, 1]$



Théorème de Filippov (sélection mesurable)

On a l'équivalence suivante (Filippov).

Théorème

Une fonction absolument continue $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une solution de (1) si et seulement si elle satisfait (2) presque partout.

Preuve.

On montre seulement que si $\dot{x} \in F(t, x)$, alors on peut trouver une sélection mesurable $u(t)$ telle que $\dot{x} = f(t, x, u(t))$. Soit $\bar{w} \in U$ et W la multi-application définie par :

$$W(t) = \begin{cases} \{w \in U ; \dot{x}(t) = f(t, x(t), w)\} & \text{si } x(t) \in F(t, x(t)), \\ \bar{w} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition de l'inclusion différentielle, on a alors pour presque tout t :

$$W(t) = \{w \in U ; \dot{x}(t) = f(t, x(t), w)\}.$$

Donc $W(t) = \bar{w}$ sur un ensemble de mesure nulle. On définit ensuite $u(t)$ comme **le premier élément de $W(t)$ dans l'ordre lexicographique** (U compact). On admet que $u(\cdot)$ est mesurable. \square

Fermeture de l'ensemble des trajectoires

Théorème

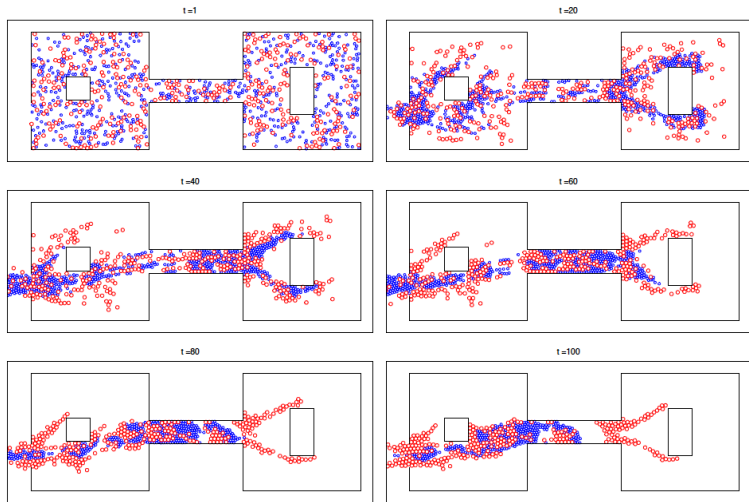
On suppose que la multi-application $F : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ est **Hausdorff continue** sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs **compactes convexes**. Alors, l'ensemble des solutions de l'inclusion

$$\dot{x}(t) \in F(t, x(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T],$$

est **fermé** dans $C^0([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Applications : Théorème de Filippov (pour l'existence d'un contrôle optimal).

Modélisation de mouvements de foule, chocs, écoulements



Inclusion différentielles et contraintes d'état

Motivation: Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ une dynamique contrôlée. On cherche une trajectoire $x(\cdot)$ solution du problème:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(t) \in C & \forall t \in [0, T]. \end{cases}$$

Théorème

Si $C \subset H$ est **convexe** et f satisfait de bonnes hypothèses alors l'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_C(x(t)) + f(t, x(t), u(t)), & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C. \end{cases}$$

admet une seule et unique solution sur $[0, T]$.

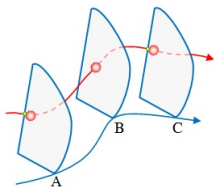
- $N_C(x)$ est le cône normal à l'ensemble C au point x .

Définition

L'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in -N_{C(t)}(x(t)) + f(t, x(t), u(t)), & \text{p.p. } t \in [0, T] \\ x(0) = x_0 \in C(0). \end{cases}$$

est appelée **processus de râfle**.



Plan

- 1 Introduction : présentation de quelques aspects du contrôle
- 2 **Contrôlabilité**
 - Définitions générales
 - Systèmes affines en la commande
 - Théorème de Chow
 - Lien avec les systèmes linéaires en la commande
- 3 Introduction au calcul des variations
 - Généralités
 - Minimum faible
 - Quelques exemples
 - Minimum fort
- 4 Principe du maximum de Pontryagin
 - Énoncé du PMP
 - Exemples d'application du PMP
 - PMP en EDP
- 5 Problèmes de temps minimal, arcs singuliers, temps de crise
 - Arcs singuliers
 - Synthèse optimale pour un bio-réacteur fed-batch
 - Méthode de régularisation
 - Principe Hybride, Viabilité, temps de crise

Notion d'ensemble atteignable

On considère le problème de Cauchy:

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (3)$$

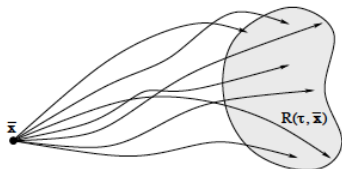
Définition

(i) **L'ensemble atteignable** $R(\tau, x_0)$ à l'instant τ depuis x_0 est:

$$R(\tau, x_0) := \{x(\tau) ; x \text{ satisfait (3) et } x(0) = x_0\}.$$

(ii) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. **L'ensemble atteignable à l'instant τ depuis l'ensemble K** est:

$$R(\tau, K) := \{x(\tau) ; x \text{ satisfait (3) et } x(0) \in K\}.$$



Notion d'ensemble atteignable

Théorème

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. On suppose que:

- Le graphe sur $[0, T]$ des solutions de (3) qui démarrent de K est contenu dans un ensemble **compact** de \mathbb{R}^n .
- L'ensemble $F(t, x) := \{f(t, x, \omega) ; \omega \in U\}$ est **convexe**.

Alors pour tout $\tau \in [0, T]$, l'ensemble $R(\tau, K)$ est **compact**.

Contre-exemple : en l'absence de convexité, **chattering** possible :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 \end{cases}$$

avec $U = \{\pm 1\}$ et $x(0) = (0, 0)$.

$\Rightarrow R(\tau)$ n'est pas fermé !

Locale contrôlabilité

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$. On considère un système:

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) \quad (4)$$

Définition

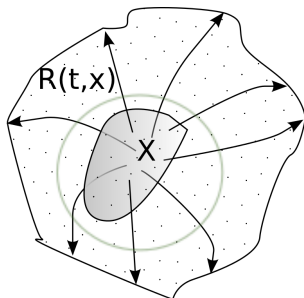
(i) On dit que le système est **localement contrôlable** depuis un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ si $\forall t > 0$ l'ensemble $R(t, x)$ contient un voisinage de X .

(ii) On dit que le système est **contrôlable en temps court** depuis un sous-ensemble $X \subset \mathbb{R}^n$ si pour tout $T > 0$, l'ensemble des points atteignables depuis X en temps $t \leq T$ par une solution de (4) contient un voisinage de X .

Exemple: Le système

$$\begin{cases} \dot{x} = yu, \\ \dot{y} = -xu, \end{cases}$$

n'est pas localement contrôlable.



Systèmes affines en la commande

- Soit $f_0, f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $m + 1$ champs de vecteur.
- Soit $U \subset \mathbb{R}^m$ et $\mathcal{U} := \{u : [0, \infty) \rightarrow U ; u \text{ mes.}\}$ l'ensemble des contrôles admissibles.

Définition

On appelle système **affine en la commande** un système du type:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(x).$$

- f_0 : dérive ; f_i : i -ème champ contrôlé i.e. on a m **actionneurs**
- Systèmes mécaniques : le contrôle agit **linéairement**
- On peut considérer les champs f_i définis sur une variété...
- Exemple : double intégrateur $\ddot{x} = u$, oscillateur harmonique $\ddot{x} + x = u$...

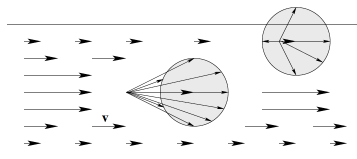
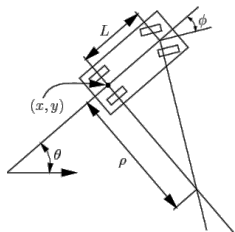


Figure 1.3: Boat velocities.

Modèle de la voiture (Dubin's car ou Reed and Shep)



$$\Rightarrow \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0 \Rightarrow \text{Dubin's model : } \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Plus généralement :

- Contrainte **non-holonome** ; $h(q, \dot{q}) = 0$ non-intégrable.
- Système non-holonome : **Dim (control) < Dim (configuration)** : robot non-holonome : **contrainte cinématique** (la plupart des robots : robots nageurs, volants, rampants...)
- Pour les robots non-holonomes, la ligne droite n'est pas le plus court chemin de A à B !
- **Robot holonome** : $h(q, t) = 0$ pas de contraintes liées au déplacement !

Mécanique non-holonome (voiture, poussette...)

Modèle de Dubin:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

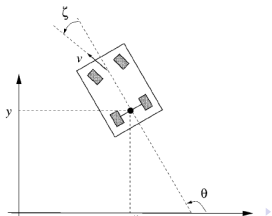


Modèle de Markov-Dubin CC-car:

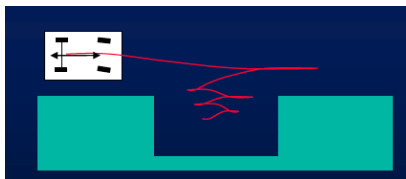
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\kappa} \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \kappa \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Modèle de la voiture:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{w} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \cos \zeta \cos \theta \\ w \cos \zeta \sin \theta \\ w \sin \zeta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u_2$$



Crochet de Lie



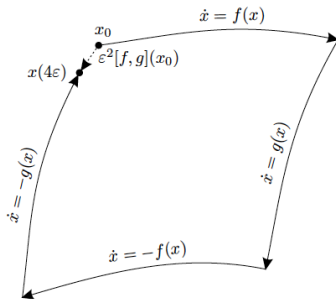
Définition

Soit deux champs de vecteur $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 . On définit leur crochet de Lie par:

$$[f, g](x) = Dg(x)f(x) - Df(x)g(x).$$

- En géométrie différentielle on définit un champ de vecteur comme une dérivation sur $C^\infty(M)$, aussi il faut vérifier que $[f, g]$ est une dérivation...
- Champs linéaires : $f(x) = Ax$ et $g(x) = Bx \Rightarrow [f, g](x) = (BA - AB)(x)$ i.e. $[f, g]$ est le **commutateur** $BA - AB$.

Propriété fondamentale du crochet de Lie



$$x(\varepsilon, x_0) = x_0 + \varepsilon f(x_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} Df(x_0)f(x_0) + o(\varepsilon^2)$$

$$x(\varepsilon, x_1) = x_1 + \varepsilon g(x_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} Dg(x_1)g(x_1) + o(\varepsilon^2)$$

$$= x_0 + \varepsilon [f(x_0) + g(x_0)] + \frac{\varepsilon^2}{2} [Df(x_0)f(x_0) + Dg(x_0)g(x_0)] + \varepsilon^2 Dg(x_0)f(x_0)$$

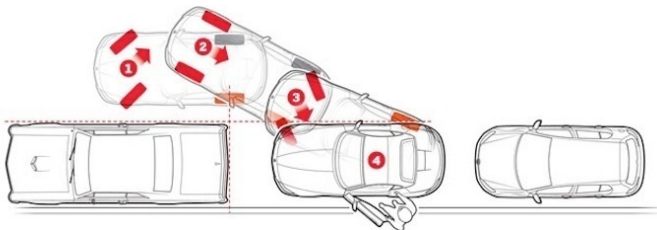
$$\Rightarrow \boxed{\gamma(\varepsilon) := (\phi_\varepsilon^{-g} \circ \phi_\varepsilon^{-f} \circ \phi_\varepsilon^g \circ \phi_\varepsilon^f)(x_0) - x_0 = \varepsilon^2 [f, g](x_0) + o(\varepsilon^2)}$$

Relation entre un créneau et le rochet de Lie !

Pour la voiture :

$$f_1(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad f_2(x, y, \theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [f_1, f_2](x, y, \theta) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

- $[f_1, f_2]$ = direction transverse !
- Créneau = suivre f_1 , puis f_2 , puis $-f_1$, puis $-f_2$.



Algèbre de Lie

Définition

Une algèbre sur \mathbb{R} est un \mathbb{R} -espace vectoriel E muni d'une application bilinéaire de $E \times E$ dans E .

Définition

L'ensemble des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , $\Sigma(\mathbb{R}^n)$, muni de l'addition et de la loi interne (ou produit) définie par le crochet de Lie est une algèbre sur \mathbb{R} . De plus, le crochet de Lie vérifie :

- (i) $[X, Y] = -[Y, X]$
- (ii) $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0$ (identité de Jacobi).

Toute algèbre sur \mathbb{R} dont la loi interne satisfait (i) et (ii) est appelée une **algèbre de Lie**. Ainsi, $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre de Lie.

Exemple: $M_n(\mathbb{R})$ muni de la loi interne $[A, B] = AB - BA$ est une algèbre de Lie.

Algèbres de Lie engendrées

Définition

- (i) Une sous-algèbre de Lie de $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace vectoriel de $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ qui est **stable** par le crochet de Lie (c'est donc également une algèbre de Lie).
- (ii) Si \mathcal{F} est une famille de champs de vecteurs sur \mathbb{R}^n , on appelle **sous-algèbre de Lie** engendrée par \mathcal{F} , notée $\text{Lie}(\mathcal{F})$ le plus petit sous-espace vectoriel S de $\Sigma(\mathbb{R}^n)$ qui contient \mathcal{F} et qui est stable par le crochet de Lie i.e. $[X, Y] \in S \quad \forall X, Y \in S$.

Exemple: algèbre de Lie engendrée par deux champs de vecteur X_1 et X_2 :

$$\text{Lie}(X_1, X_2) = \text{Vect}([X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{k-1}, X_{i_k}}] \dots]] ; k \geq 1 ; i_j \in \{1, 2\})$$

Notation: $\text{Lie}_p(\mathcal{F}) = \{X(p) ; X \in \text{Lie}(\mathcal{F})\}$.

Théorème de Chow

Soit \mathcal{A}_p l'ensemble des points atteignables depuis p par le système commandé:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(x),$$

où $u = (u_1, \dots, u_m) \in U$ avec $U \subset \mathbb{R}^m$. Autrement dit, \mathcal{A}_p s'écrit:

$$\mathcal{A}_p = \left\{ \phi_{t_k}^{u_k} \circ \dots \circ \phi_{t_1}^{u_1}(p) ; t_i \geq 0 ; u_i \in U ; k \in \mathbb{N} \right\}$$

Définition

Un système commandé est dit **commandable** si $\mathcal{A}_p = \mathbb{R}^n$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$.

Théorème de Chow

Soit $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_m\}$ une famille composée de m champs de vecteur (de classe C^∞). On considère le système **sans dérive**

$$\dot{x} = \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(x).$$

Théorème de Chow (1938)

On suppose que \mathcal{F} est **symétrique** et que pour tout $q \in \mathbb{R}^n$ on a $\dim \text{Lie}(\mathcal{F}) = n$. Alors l'ensemble atteignable à partir d'un point p est la composante connexe de son espace de configuration contenant p .

remarque: \mathcal{F} symétrique $\Leftrightarrow X \in \mathcal{F} \Rightarrow -X \in \mathcal{F}$.

Restriction sur les contrôles

Soit $\mathcal{F} := \{f_1, \dots, f_m\}$ une famille composée de m champs de vecteur (de classe C^∞). On considère le système **sans dérive**

$$\dot{x} = \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(x).$$

Théorème

Si $U = \mathbb{R}^m$ et si $\dim \text{Lie}_p(f_1, \dots, f_m) = n$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$, alors le système est commandable.

Théorème

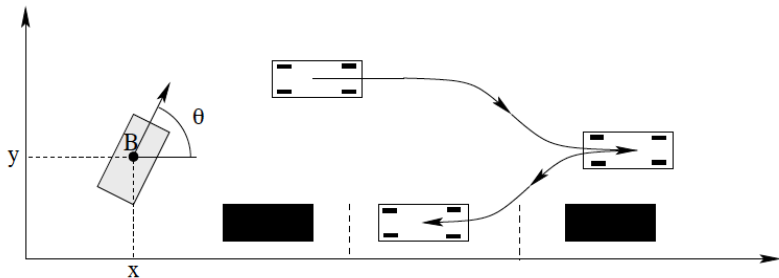
On suppose que

- l'enveloppe convexe de U contient un voisinage dans \mathbb{R}^m de l'origine,
- pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ on a : $\dim \text{Lie}_p(f_1, \dots, f_m) = n$.

Alors le système est commandable.

- On peut vouloir commander en temps $t \leq T$ où $T > 0$ est fixé.
- Avec des commandes constantes par morceaux?

Contrôlabilité du système de Dubin



$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = u_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} + u_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2}$$

Contrôlabilité: soit $f_3(p) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$. On a: $[f_1, f_2] = f_3$; $[f_1, f_3] = 0$; $[f_2, f_3] = -f_1$.

$$\Rightarrow \text{Lie}_p(f_1, f_2) = \text{Vect}(f_1(p), f_2(p), f_3(p)) = \mathbb{R}^3!$$

Contrôlabilité du système de Markov-Dubin

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\kappa} \end{pmatrix} = u_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ \kappa \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} + u_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2}$$

On a $\text{Lie}_p(f_1, f_2) = \text{Vect}(f_1(p), f_2(p), f_3(p), f_4(p)) = \mathbb{R}^4$ pour tout $p \in \mathbb{R}^4$ où:

$$f_3 = [f_1, f_2] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f_4 = [f_1, f_3] = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

et on a $[f_2, f_3] = 0$, $[f_1, f_4] = -f_1 - \kappa f_3$, $[f_2, f_4] = 0$, $[f_3, f_4] = f_1 + \kappa f_3$.

Systèmes avec dérive

Soit $\mathcal{F} := \{f_0, f_1, \dots, f_m\}$ une famille composée de $m + 1$ champs de vecteur (de classe C^∞). On considère le système avec **dérive**:

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(x).$$

Problèmes et motivation:

- $\dot{x} = x + u$ avec $u \geq -1$ et $x > 1 \Rightarrow \dot{x} > 0$!
- Le système suivant n'est pas commandable :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2, \\ \dot{x}_2 = u \in [-1, 1], \end{cases}$$

Théorème

On suppose que:

- $U = \mathbb{R}^m$
- pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ on a $\dim \text{Lie}_p(f_1, \dots, f_m) = n$.

Alors le système est commandable (et même en temps inférieur ou égal à $T > 0$ arbitraire).

Champs récurrents

Soit $\phi_t(x)$ le flot défini par un champ de vecteur $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Définition

- (i) On dit que X est **récurrent** si pour tout point p de \mathbb{R}^n , pour tout temps $t > 0$, et tout voisinage V_p de p , il existe $q \in V_p$ et $t' > t$ tel que $\phi_{t'}(q) \in V_p$.
- (ii) Si $\forall p \in \mathbb{R}^n$ $\phi_t(p)$ est **périodique** alors le champ est récurrent.

Théorème

On suppose que

- l'enveloppe convexe de U contient un voisinage dans \mathbb{R}^m de l'origine,
- pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ on a: $\dim \text{Lie}_p(f_0, f_1, \dots, f_m) = n$.
- La famille \mathcal{F} contient un champ **récurrent**.

Alors le système est commandable.

Système de Dubin avec dérive

Exemple:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} + u_2 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2} \quad \text{avec } u_2 \in [-1, 1]$$

- Soit $f_3 = [f_1, f_2]$. Alors $\text{Lie}_p(f_1, f_2) = \text{Vect}(f_1(p), f_2(p), f_3(p)) = \mathbb{R}^3$.
- $0 \in [-1, 1]$!
- Le champ $f_1 + f_2$ est périodique (trajectoires = cercles) sur $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}^1$.

Théorème de Chow et condition de Kalman

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad A \in M_n(\mathbb{R}), B \in M_{n,m}(\mathbb{R}).$$

- Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique. On pose $f_0(x) = Ax$ et $f_i(x) = Be_i$

⇒

$$\text{Lie}_p(f_0, f_1, \dots, f_m) = \text{Vect}(A^k Be_i ; 1 \leq i \leq n ; 0 \leq k \leq n-1).$$

Propriété

Le critère de Kalman $R(A, B) = \mathbb{R}^n$ où $R(A, B) = \text{Vect}(A^i Bu, i \in \mathbb{N}, u \in \mathbb{R}^m)$ équivaut à $\dim \text{Lie}_p(f_0, f_1, \dots, f_m) = n$ pour tout $p \in \mathbb{R}^n$.

Conséquence

- $U = \mathbb{R}^m \Rightarrow$ système commandable.
- $U \subset \mathbb{R}^m \Rightarrow$ contrôlabilité globale liée à la stabilité de A (plus difficile).

Exemple: $\forall i, \text{Re}(\lambda_i) < 0$ et $0 \in \text{Int}(U) \Rightarrow$ tout point peut être conduit à l'origine en temps fini.

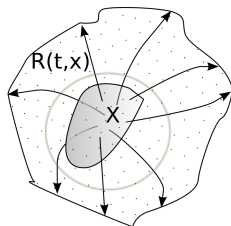
Linéarisation autour d'un point d'équilibre

Soit le système

$$\dot{x} = f(x, u) \quad (5)$$

Définition

Soit $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. On dit que (5) est localement contrôlable (en temps court) si $\forall t > 0, R(t, \bar{x}) \supset V_{\bar{x}}$.



Proposition

Soit $(\bar{x}, \bar{u}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ un point d'équilibre de (5) i.e. $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$. Si le système

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad A := \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \quad B := \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}).$$

satisfait $R(A, B) = \mathbb{R}^n$, alors (5) est localement contrôlable autour de (\bar{x}, \bar{u}) .

- Réciproque fausse (système de Dubin) !
- Même question autour d'une trajectoire $(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot))$.
- vaste domaine pour la contrôlabilité d'EDP (Coron...).

Contrôlabilité de l'orientation d'un satellite à un rotor

$$\begin{cases} I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 \\ I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 \\ I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 \end{cases}$$

- On cherche à commander l'orientation d'un satellite en orbite : ω = vitesse angulaire
- Soit $\mu_i = I_i \omega_i$, $i = 1, 2, 3$ (μ = moment angulaire).
- Trois paires de réacteurs qui exercent un moment d'amplitude constante.
- On rajoute une action extérieure à l'aide d'un moment $Q \Rightarrow$

$$\dot{\mu} = \mu \wedge \omega + \sum_{i=1}^3 u_i b_i \quad b_i \in \mathbb{R}^3, \quad u_i \in \{-1, 0, 1\}.$$

$$\dot{\mu} = f_0(\mu) + \sum_{i=1}^3 u_i f_i(\mu) \quad f_0(\mu) = \begin{pmatrix} a_1 \mu_2 \mu_3 \\ a_2 \mu_1 \mu_3 \\ a_3 \mu_1 \mu_2 \end{pmatrix}, \quad f_i(\mu) = b_i.$$

Résultat

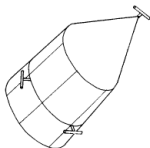
Si le satellite n'est pas une sphère, les moments d'inertie ne sont pas tous égaux, donc au moins deux a_i sont non nuls. Alors la vitesse angulaire du satellite est commandable avec une seule paire de réacteurs.

Quelques détails

- Si $l_j = l_j \forall i, j$ (sphère) alors il faut les 3 réacteurs (pas de dérive) et les b_i linéairement indépendants.
- Le champ f_0 (dérive) est périodique (donc récurrent):

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 = cst \quad \frac{\mu_1^2}{l_1^2} + \frac{\mu_2^2}{l_2^2} + \frac{\mu_3^2}{l_3^2} = cst.$$

- Si $\dim \text{Vect}(b, f_0(b)) = 2$ et si $\text{Vect}(b, f_0(b))$ n'est pas invariant par $f_0 \Rightarrow \text{Lie}_\mu(f_0(\mu), b) = \mathbb{R}^3$.
- Si au moins 2 coordonnées de $a = (a_1, a_2, a_3)$ sont non nulles, il existe b tel que $\text{Lie}(f_0(\mu), b)$ soit de dimension 3 partout.

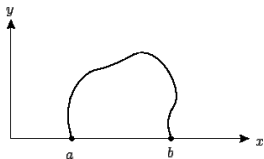


Plan

- 1 Introduction : présentation de quelques aspects du contrôle
- 2 Contrôlabilité
 - Définitions générales
 - Systèmes affines en la commande
 - Théorème de Chow
 - Lien avec les systèmes linéaires en la commande
- 3 Introduction au calcul des variations
 - Généralités
 - Minimum faible
 - Quelques exemples
 - Minimum fort
- 4 Principe du maximum de Pontryagin
 - Énoncé du PMP
 - Exemples d'application du PMP
 - PMP en EDP
- 5 Problèmes de temps minimal, arcs singuliers, temps de crise
 - Arcs singuliers
 - Synthèse optimale pour un bio-réacteur fed-batch
 - Méthode de régularisation
 - Principe Hybride, Viabilité, temps de crise

Problème de Didon

Quelle courbe fermée encercle le domaine ayant la plus grande surface?



→ Mathématiquement on doit résoudre:

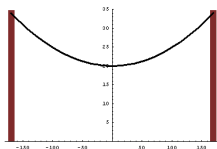
$$\sup_{y(\cdot) \in W^{1,1}([a,b], \mathbb{R})} \int_a^b y(t) dt \quad \text{t.q. } y(a) = y(b) = 0 \text{ et } \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = L$$

⇒ Lien avec l'inégalité isopérimétrique:

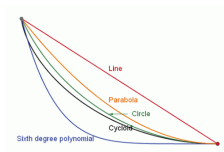
$$4\pi \text{Aire}(D) \leq \text{Per}(D)^2, \quad \forall D \subset \mathbb{R}^2.$$

Autres problèmes historiques

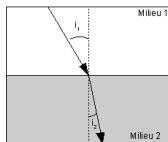
- Chaînette (posé par Galilée au 17^{ème} siècle) → Sagrada Familia



- Brachistochrone ou caténaire (Galilée 1630, Bernouilli, fin du 17^{ème} siècle)



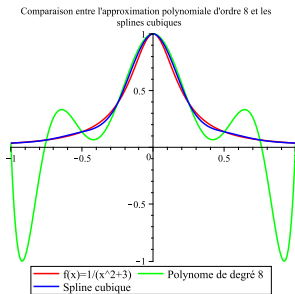
- Réfraction de la lumière



Splines cubiques

Définition

Soit $f : [x_0, x_n] \rightarrow \mathbb{R}$. La spline cubique interpolant f en (x_0, x_1, \dots, x_n) est l'unique fonction s de classe C^2 telle que $f(x_i) = s(x_i)$, $0 \leq i \leq n$, $s|_{[x_i, x_{i+1}]}$ est un polynôme de degré 3 et telle que $s''(x_0) = s''(x_n) = 0$.



Théorème

Soit $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$. Alors la spline cubique interpolant f en (x_0, x_1, \dots, x_n) est la solution du problème de minimisation:

$$\inf_{g \in C^2([a, b], \mathbb{R})} \int_a^b g''(x)^2 dx \text{ t.q. } g(x_i) = f(x_i) \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{et} \quad g''(a) = g''(b) = 0.$$

Problème type de calcul des variations

$$\inf_{x(\cdot) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)} J(x) := \int_a^b \ell(t, x(t), x'(t)) dt \quad \text{t.q. } x(a) = \alpha \text{ et } x(b) = \beta$$

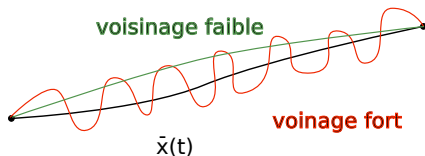
Définition

(i) On dit que \bar{x} est un **minimum local faible** de J si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n) \quad \|x - \bar{x}\|_\infty + \|\dot{x} - \dot{\bar{x}}\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow J(x) \geq J(\bar{x})$$

(ii) On dit que \bar{x} est un **minimum local fort** de J si et seulement si :

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n) \quad \|x - \bar{x}\|_\infty < \varepsilon \Rightarrow J(x) \geq J(\bar{x}).$$



- ℓ appelé **Lagrangien**.
- \bar{x} minimum fort \Rightarrow \bar{x} minimum faible
- réciproque fausse.

Exemples

- $\bar{x} = 0$ est un **minimum faible et pas fort** pour le problème

$$\inf_{x(\cdot) \in C^1([0, \pi], \mathbb{R})} J(x) := \int_0^\pi x^2(t)(1 - \dot{x}^2(t)) dt$$

\Rightarrow soit $x_n(t) := \varepsilon \sin(nt)$:

$$\begin{aligned} J(x_n) &= \varepsilon^2 \int_0^\pi \sin^2(nt)(1 - n^2 \cos^2(nt)) dt \\ &= \frac{\varepsilon^2}{n} \int_0^{n\pi} \sin^2(s)(1 - \varepsilon^2 n^2 \cos^2(s)) ds \\ &= \varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 n^2}{4}\right) \int_0^\pi \sin^2(t) dt \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

- Exemple de **minimum fort**: soit $0 < b < \pi$ et le problème

$$\inf_{x \in C^1([0, b])} \int_0^b (\dot{x}^2(t) - x^2(t)) dt \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(b) = 1.$$

Alors $t \mapsto \frac{\sin t}{\sin b}$ est un **minimum fort** (nécessite une condition suffisante).

Equation d'Euler-Lagrange (minimum faible)

Théorème

Soit \bar{x} un minimum *faible* de J . Alors l'application $t \mapsto \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}$ est différentiable le long de la courbe $t \mapsto (t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t))$ et on a pour $t \in [a, b]$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(t, \bar{x}(t), \dot{\bar{x}}(t)) \quad (\text{EL})$$

Définition

Soit $f : E \rightarrow F$. On dit que f est Gâteaux-différentiable en $x_0 \in E$ si toutes les dérivées directionnelles

$$Df(x_0, v) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$$

de f en x_0 existent, et si l'application $v \mapsto Df(x_0, v)$ est linéaire et continue.

Preuve.

Utiliser le lemme de Dubois Raymond: soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Alors

$$\forall h \in C^1([a, b], \mathbb{R}) \quad h(a) = h(b) = 0 \Rightarrow \int_a^b h(t)f(t)dt = 0 \Rightarrow f = 0.$$



Extrémale non optimale

- L'équation d'Euler-Lagrange est seulement une condition nécessaire.
- On appelle **extrémale** une solution de l'équation d'Euler-Lagrange.

Exemple:

$$\inf_{x(\cdot) \in C^1([0,1], \mathbb{R})} \int_0^1 x(t) \dot{x}^2(t) dt \quad \text{t.q. } x(0) = x(1) = 0.$$

⇒

$$\frac{d}{dt}(2x(t)\dot{x}(t)) = \dot{x}(t)^2$$

Supposons $x \neq 0$. Alors $2x(t)\ddot{x}(t) = -\dot{x}(t)^2$ et

$$-\int_0^1 \dot{x}(t)^2 dt = -2 \int_0^1 \dot{x}(t)^2 dt!!$$

Conclusion: 0 est l'unique extrémale. Mais 0 n'est pas solution.

Lemme de Beltrami

$$\inf_{x(\cdot) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)} J(x) := \int_a^b \ell(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad \text{t.q. } x(a) = \alpha \text{ et } x(b) = \beta$$

Lemme

Si ℓ ne dépend pas de la variable t , alors une extrémale vérifie:

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [a, b] \quad \dot{x}(t) \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) - \ell(x(t), \dot{x}(t)) = C.$$

La ligne droite est le plus court chemin entre deux points

$$\inf_{x(\cdot)} \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)} dt \quad x(a) = \alpha \text{ et } x(b) = \beta.$$

- L'équation d'Euler-Lagrange \Rightarrow

$$\ddot{x}(t) = 0.$$

Géodésique sur une sphère

Soit $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $(\varphi, \theta) \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$.

$$\inf \left\{ \int_0^1 \|\dot{(\Phi \circ x)}(t)\|^2 dt ; x \in C^1([0, 1], \mathbb{R}^2) \ x(0) = B ; x(1) = B \right\}$$

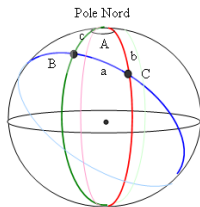
- $L(x(t), \dot{x}(t)) = \|D\Phi(x(t)) \circ \dot{x}(t)\|^2 = \sin^2 \theta(t) \dot{\varphi}^2(t) + \dot{\theta}^2(t)$.
- Equation d'Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \sin^2 \theta) = 0 \\ \frac{d}{dt} \dot{\theta} = \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \end{cases}$$

on peut supposer φ constant (monotone et $\varphi(0) = \varphi(1)$). D'où $\dot{\theta} = Cst$.



Retour sur le problème de Didon

Proposition

La solution du problème

$$\sup_{x(\cdot) \in W^{1,1}([0,1], \mathbb{R})} \int_0^1 x(t) dt \quad \text{t.q. } x(0) = x(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = L$$

est la portion de cercle centrée en $(\frac{1}{2}, -\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}})$ où $2\lambda \sin(\frac{L}{2\lambda}) = 1$.

Preuve.

- Equation d'Euler-Lagrange: $\ell(x) = -x \quad M(x, \dot{x}) := \sqrt{1 + \dot{x}^2} \Rightarrow$

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda \dot{x}}{\sqrt{1 + \dot{x}^2}} \right) = -1$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{\frac{x-t}{\lambda}}{1 - \frac{(c-t)^2}{\lambda^2}} \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{d'où } x(t) = \lambda \sqrt{1 - \frac{(c-t)^2}{\lambda^2}}.$$

□

Formalisme Hamiltonien

$$\inf_{x(\cdot) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)} J(x) := \int_a^b \ell(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad \text{t.q. } x(a) = \alpha \text{ et } x(b) = \beta$$

Soit $x(\cdot)$ une extrémale vérifiant (EL) i.e.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t)) = \frac{\partial \ell}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t))$$

- Posons $p(t) := \frac{\partial \ell}{\partial \dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))$
- Soit le **Hamiltonien** défini par $H(x, \dot{x}, p) := p \cdot \dot{x} - \ell(x, \dot{x})$.

Proposition

L'équation d'Euler-Lagrange vérifiée par une extrémale $x(\cdot)$ se réécrit

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Autres développements (possible)

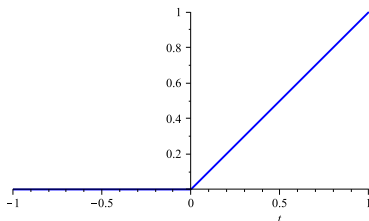
- Résultats d'existence (convexité par rapport à p).
- Minimum faibles
 - Problèmes isopérimétriques i.e. avec contraintes.
 - Conditions de transversalité.
 - Condition nécessaire et suffisante dans le cas convexe.
 - Conditions du second ordre (condition de Legendre).
 - Conditions suffisantes d'optimalité (points conjugués, équation de Riccati).
- Minimum forts

Intérêt de la notion de minimum fort

Motivation:

$$\inf_{x(\cdot)} \int_{-1}^1 x^2(t)(\dot{x}(t) - 1)^2 dt \quad x(-1) = 0 \quad x(1) = 1.$$

- Si x est $C^1 \Rightarrow J(x) > 0$.
- Si $x^*(t) = \begin{cases} 0 & -1 \leq t \leq 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Rightarrow J(x^*) = 0!$
- L'infimum n'est PAS atteint dans $C^1([-1, 1], \mathbb{R})$.



\Rightarrow considérer $\text{Lip}([-1, 1], \mathbb{R})$ i.e. $t \mapsto \dot{x}(t)$ existe p.p.

Condition de Weierstrass

$$\inf_{x \in \text{Lip}([a,b], \mathbb{R}^n)} J(x) := \int_a^b \ell(t, x(t), \dot{x}(t)) dt \quad x(a) = A \quad x(b) = B.$$

Définition

L'état adjoint associé à un arc $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est défini par:

$$p(t) = c + \int_a^t \frac{\partial \ell}{\partial x}(s, x(s), \dot{x}(s)) ds \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème

Si x^* est un *minimum fort* de J alors on a p.p. $t \in [a, b]$:

$$\forall v \in \mathbb{R}^n \quad \ell(t, x^*(t), \dot{x}^*(t) + v) - \ell(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) \geq \langle p(t), v \rangle$$

Condition de Weierstrass

- La condition de Weierstrass s'écrit comme le **principe de Pontryagin**:

$$\forall w \in \mathbb{R}^n \quad H(t, x(t), w, p(t)) \leq H(t, x(t), \dot{x}(t), p(t)). \quad (6)$$

où $H(t, x, \dot{x}, p) := p \cdot \dot{x} - \ell(t, x, \dot{x})$.

- La condition (6) équivaut à $p(t) \in \partial f(t)$ où $f(v) := \ell(t, x^*(t), v)$
- On retrouve (EL) lorsque $t \mapsto f(t)$ est différentiable.
- Exemple d'utilisation:

$$\inf_{x(\cdot) \in \text{Lip}([0,1], \mathbb{R})} \int_0^1 \dot{x}^3(t) \quad x(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(1) = 1.$$

Alors $x^*(t) = t$ n'est PAS un minimum fort (mais faible):

Preuve.

On a $p = cst$; $H(x(t), w, p(t)) = pw - w^3$ et $H(x(t), \dot{x}(t), p(t)) = p - 1 \Rightarrow (6)$ équivaut à

$$w^3 - 1 \geq p(w - 1) \quad \forall w \in \mathbb{R}.$$


Plan

- 1 Introduction : présentation de quelques aspects du contrôle
- 2 Contrôlabilité
 - Définitions générales
 - Systèmes affines en la commande
 - Théorème de Chow
 - Lien avec les systèmes linéaires en la commande
- 3 Introduction au calcul des variations
 - Généralités
 - Minimum faible
 - Quelques exemples
 - Minimum fort
- 4 Principe du maximum de Pontryagin
 - Énoncé du PMP
 - Exemples d'application du PMP
 - PMP en EDP
- 5 Problèmes de temps minimal, arcs singuliers, temps de crise
 - Arcs singuliers
 - Synthèse optimale pour un bio-réacteur fed-batch
 - Méthode de régularisation
 - Principe Hybride, Viabilité, temps de crise

Cadre général

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^{T_u} \ell(t, x_u(t), u(t)) dt + \phi(T_u, x_u(T))$$

où $x_u(\cdot)$ est une solution du problème:

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad x(0) \in M_0 \text{ et } x(T) \in M_1.$$

et

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T_u] \rightarrow U(t) ; u \text{ mes.}\} \quad \text{avec } U(t) \subset \mathbb{R}^m$$

Définition

On dit qu'un point \bar{u} est un minimum local de J si et seulement si $\exists \varepsilon > 0$ t.q. pour tout $u \in \mathcal{U}$ tel que x_u soit admissible alors

$$\|u - \bar{u}\|_1 \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad J(u) \geq J(\bar{u})$$

- Il s'agit de **minimum faible** dans $L^1([0, T]; \mathbb{R}^n)$: $\|x_u - x_{\bar{u}}\|_\infty \leq C\|u - \bar{u}\|_1$ (Gronwall).

La question de l'existence (Théorème de Filippov)

On suppose :

- f est continue, C^1 par rapport à x ; ϕ est continue.
- M_1 est accessible depuis M_0 .
- $U(t) = U$ est compact.
- $\exists c > 0 \forall u \in \mathcal{U}, T_u + \|x_u(t)\| \leq c \quad \forall t \in [0, T_u]$.
- Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} f(t, x, \omega) \\ \ell(t, x, \omega) + \gamma \end{array} \right) \mid \gamma \geq 0, \omega \in U \right\}$$

est **convexe**.

Théorème (Filippov)

Sous les hypothèses précédentes, il existe un contrôle optimal u^* t.q. x_{u^*} relie M_0 à M_1 .

- Exemple : système affines en u :

$$\dot{x} = f_0(x) + \sum_{1 \leq j \leq m} u_j f_j(x)$$

et critère avec **épigraphe convexe**.

Enoncé du PMP dans un cadre simplifié

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \ell(x_u(t), u(t)) dt + \phi(x_u(T))$$

où $x_u(\cdot)$ est une solution du problème:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ mes.}\}.$$

Hypothèses

- $\exists c_1 > 0 \forall u \in U \forall (x, x') \in \mathbb{R}^n |f(x, u) - f(x', u)| \leq c_1 |y - z|$
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \exists \alpha(x) \geq 0 \forall (u, v) \in \mathbb{R}^m |f(x, u) - f(x, v)| \leq \alpha(x) |u - v|$ où $r \mapsto \alpha(r)$ est \uparrow .
- f_x est continue et local Lipschitz.
- ℓ et ϕ sont de classe C^1 ; ℓ_x est local Lipschitz.

Voir [Bonnans] ou [Bressan-Piccoli]

Enoncé du PMP

Soit $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ le **Hamiltonien** associé au système:

$$H(x, p, u) := p \cdot f(x, u) + \ell(x, u).$$

Théorème

Soit \bar{u} une solution et \bar{x} l'état associé. Alors:

- Il existe un **vecteur adjoint** $p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a.c.

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(\bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T]$$

- On a la condition au **temps terminal** $p(T) = \nabla \phi(x(T))$.
- On a la condition de minimisation:

$$u(t) \in \operatorname{argmin}_{\omega \in U} H(\bar{x}(t), p(t), \omega)$$

Message du PMP

- Calcul du contrôle optimal:

$$u(t) = u(x(t), p(t))$$

- $t \mapsto p(t)$ rétrograde en temps: résoudre théoriquement ou numériquement:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), u(t)) \quad x(0) = 0.$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), u(t)) \quad p(T) = \nabla \phi(x(T)).$$

Système de taille $2n$!

- MAIS : le PMP reste une condition nécessaire du premier ordre

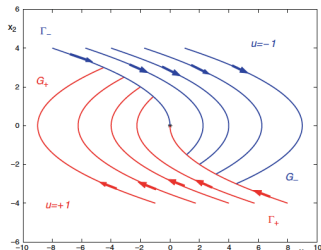
Qu'est-ce qu'une synthèse optimale?

Temps minimal pour le double intégrateur

$$\inf_{u(\cdot) \in [-1,1]} T_u \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad x(0) = (x_1^0, x_2^0) \quad x(T_u) = (0,0)$$

- Hamiltonien : $H(x_1, x_2, p_1, p_2, u) = p_1 x_2 + p_2 u + 1 = 0$
- Fonction de commutation : $\dot{p}_2(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $u(t) = \pm 1$.

⇒ au plus 1 commutation !



- Obtention d'un **feedback optimal**

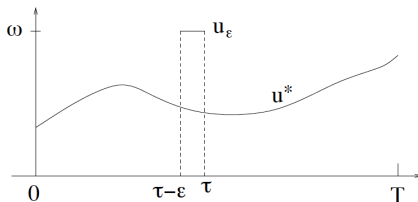
$$u = u[x]$$

Preuve (variation en **aiguille**)

- Soit $(x^*(\cdot), u^*(\cdot))$ une paire optimale et $p(\cdot)$ l'état adjoint.

On modifie u^* de la façon suivante:

$$u_\varepsilon(t) := \begin{cases} u^*(t) & t \notin [\tau - \varepsilon, \tau], \\ \omega \in U & t \in [\tau - \varepsilon, \tau]. \end{cases}$$



- On admet que

$$\begin{aligned} J(u_\varepsilon) - J(u^*) &= \int_0^T [H(x^*(t), p(t), u_\varepsilon(t)) - H(x^*(t), p(t), u^*(t))] dt + o(\|u^* - u_\varepsilon\|_{L^1}) \\ &= \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} [H(x^*(t), p(t), \omega) - H(x^*(t), p(t), u^*(t))] dt + o(\varepsilon) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

- Pour le développement de $J(u_\varepsilon) - J(u^*)$ on utilise le lemme de Gronwall pour montrer:

$$\|x_{u_\varepsilon} - x_{u^*}\|_{L^\infty} \leq O(\|u_\varepsilon - u^*\|_{L^1}).$$

Extrémales

Définition

Une **extrémale** est un triplet $(x(\cdot), p(\cdot), u(\cdot))$ vérifiant

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad u(t) \in \arg \min_{\omega \in U} H(x(t), p(t), \omega).$$

- $u(t)$ peut être multi-valuée.
- H est constant le long d'une extrémale (cas autonome)

$$\forall t \in [0, T] \quad H(x(t), p(t), u(t)) = Cst$$

- En pratique:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p} && \rightarrow \text{forward,} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial x} && \rightarrow \text{backward} \end{aligned}$$

⇒ méthode de tir (numérique) initialisée par une solution par méthode directe (par ex : bocop)

Méthode de tir = indirecte : il faut (en général) supposer la structure de $u(t)$!

Conditions de transversalité

Propriété

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe. Si à l'instant T , on impose $x(T) \in C$ où $C \subset \mathbb{R}^n$ alors le vecteur adjoint peut être construit de la façon suivante:

$$x(T) \in C \quad \Rightarrow \quad p(T) - \nabla\phi(x(T)) \in -N_C(x(T))$$

- Exemples fondamentaux:

- Si $x(0) = x(T) \Rightarrow p(0) = p(T)$.
- Si $x(T) \in \mathbb{R}^n \Rightarrow p(T) = 0$.
- Si $x(T) \in \{x_T\} \Rightarrow p(T) \in \mathbb{R}^n$.

- Exemple: soit $\phi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 et C défini par

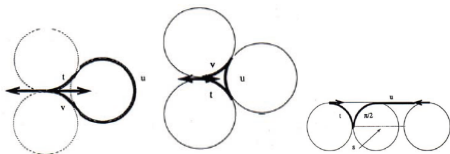
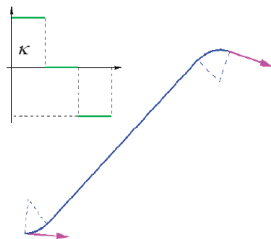
$$C = \{x \in \mathbb{R}^n ; \phi_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq p\} \quad \Rightarrow \quad p(T) - \nabla\phi(x(T)) = - \sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i \nabla\phi_i(x(T)), \quad \lambda_i \geq 0.$$

Temps minimal pour la voiture

- Critère temps minimal:

$$\inf_{u(\cdot) \in [-1,1]} \int_0^{T_u} dt \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = u \end{cases} \quad X(0) = X_0 \quad X(T_u) = X_1.$$

- Synthèse optimale : cercles + segments : *CSC*, *CCSC*, *CSCC*, *CCSCC*, *CCC*, *CCCC*...

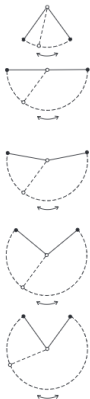
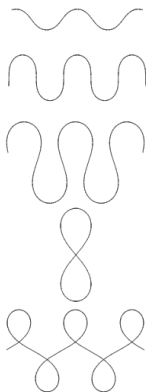


Courbe élastique (minimisation du carré de la courbure)

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathbb{R}} \int_0^T u^2(t) dt \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = u \end{cases} \quad X(0) = X_0 \quad X(T) = X_1.$$

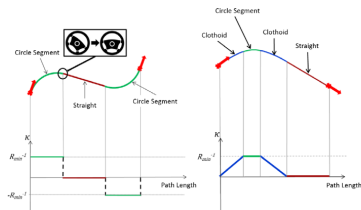
Ici le contrôle est lisse \Rightarrow **Euler elasticae** : solutions explicites à l'aide des fonctions cn, sn, dn...

$$\ddot{\theta} = p_1 \sin \theta - p_2 \cos \theta$$



Tracés d'autoroutes et de voies ferrées

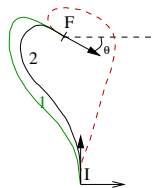
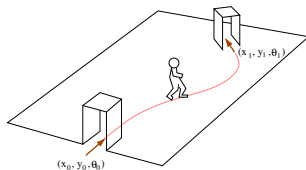
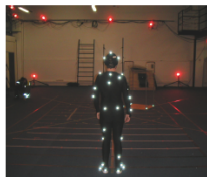
$$\inf_{u(\cdot)} T_u \quad \begin{cases} \dot{x} = \cos \theta \\ \dot{y} = \sin \theta \\ \dot{\theta} = \kappa \\ \dot{\kappa} = u \end{cases} \quad X(0) = X_0 \quad X(T_u) = X_1 \quad u : [0, T_u] \rightarrow [-1, 1].$$



- Clothoïde : La courbure $\dot{\theta}$ varie linéairement \Rightarrow confort

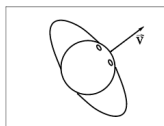
Modélisation de la locomotion humaine

- **Problème inverse** : construire un modèle de locomotion à partir de données → enregistrement de trajectoires



- **Quelle dynamique?** Contrainte non-holonome satisfaite par le tronc :

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0.$$



- **Quelle critère** est minimisé le long d'une trajectoire de locomotion?

Modélisation de la locomotion humaine

- Modélisation à l'aide du système de Markov-Dubin:

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^{T_u} (u_1(t)^2 + u_2(t)^2) dt \quad \begin{cases} \dot{x} = u_1 \cos \theta \\ \dot{y} = u_1 \sin \theta \\ \dot{\theta} = \kappa u_1 \\ \dot{\kappa} = u_2 \end{cases} \quad X(0) = X_0 \quad X(T_u) = X_1.$$

où $u = (u_1, u_2) : [0, T_u] \rightarrow [a, b] \times \mathbb{R}$ avec $0 < a < b$.

- Critères plus généraux possible aussi (jerk $\sim \ddot{x} \dots$)

$$\text{PMP} \Rightarrow \ddot{\theta} = \rho \sin(\theta - \varphi).$$

Méthode indirecte (tir)

- L'équation état-adjoint $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$; $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \text{PMP}$ + condition de transversalité s'écrit:

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)) \quad R(z(0), z(T)) = 0 \quad \text{avec} \quad z(t) = (x(t), p(t)).$$

- On présuppose (le plus souvent) la structure de $t \mapsto u(t)$ i.e. le nombre de commutations...
- On note $z(t, z_0)$ la solution de $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$ avec $z(0) = z_0$.

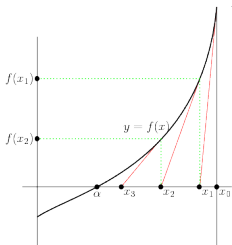
But : résoudre $G(z_0) = 0$ où $G(z_0) := R(z_0, z(T, z_0)) = 0$.

- Méthode de Newton : $G : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$

$$z_0 \in \mathbb{R}^n \quad z_{k+1} = z_k - DG(z_k)^{-1} G(z_k), \quad k \geq 0$$

- Inconvénient : initialisation près de z^* (par méthode directe) et inversion de $DG(z_k)$.
- Quasi-Newton :

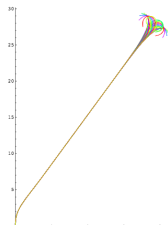
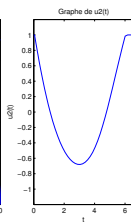
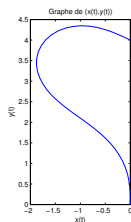
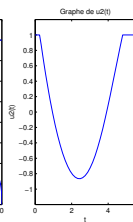
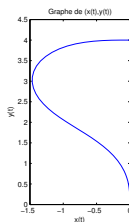
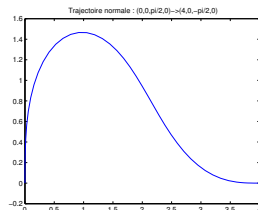
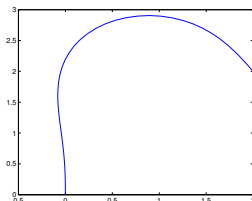
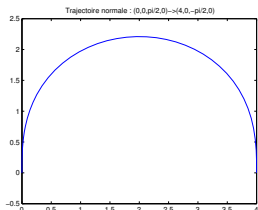
$$z_{k+1} = z_k + d_k$$



Modélisation de la locomotion humaine

- Méthode de tir : $\ddot{\theta} = \rho \sin(\theta - \varphi)$ avec $\rho = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$.
- Fonction de tir :

$$G : (p_1, p_2, p_3(0), p_4(0)) \mapsto (x(T) - x_1, y(T) - y_1, \theta(T) - \theta_1, \kappa(T) - \kappa_1).$$



Problème du temps minimal dans le cas linéaire

$$\inf_{u(\cdot) \in [-1,1]^n} T_u \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad x(0) = x_0 \quad x(T_u) \in S \subset \mathbb{R}^n.$$

Proposition (Principe Bang-Bang)

Soit u un contrôle optimal et x la trajectoire associée. Alors, si $R(A,B)$ vérifie la cond. de *Kalman*:

$$u_i(t) = -\text{sign} \langle p(t), b_i \rangle \quad \text{p.p. } t \in [0, T_u].$$

- On est amené à résoudre le **problème aux limites** (méthode de tir):

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0, \\ \dot{p}(t) &= -A^T p(t), & p(T) \in N_S(x(T)), \\ u_i(t) &= -\text{sign} \langle p(t), b_i \rangle \end{cases}$$

Propriété

- Si A a n valeurs propres réelles et $m = 1 \Rightarrow$ **au plus $n-1$ commutations !**
- Si A n'a pas de valeurs propres réelles et $m = 1 \Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \exists x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ t.q. la trajectoire optimale de x_0 à x_1 a **N commutations !** Exemple : $\ddot{x} = -x + u$.

Preuve du principe Bang-Bang

Preuve.

- On suppose qu'il existe $1 \leq i \leq m$ et $[t_1, t_2] \subset [0, T]$ tel que:

$$\forall t \in [t_1, t_2] \quad \langle p(t), b_i \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle p(t_1), b_i \rangle = 0.$$

- En dérivant :

$$\langle \dot{p}(t), b_i \rangle = \langle -A^T p(t), b_i \rangle = -\langle p(t), Ab_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle p(t_1), Ab_i \rangle = 0.$$

- Par récurrence :

$$\langle p(t_1), b_i \rangle = \langle p(t_1), Ab_i \rangle = \dots = \langle p(t_1), A^{n-1} b_i \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{absurde.}$$



Preuve de la propriété

$$\dot{x} = Ax + u(t)b \quad b \in \mathbb{R}^n$$

Preuve.

- On se place dans la base $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$.
- On écrit $\dot{x} = Ax + u(t)b$ sous la forme:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & & & -a_0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Comme $\dot{p} = -A^T p(t)$ et $\lambda_i \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$p(t) = \sum_{1 \leq k \leq r} P_k(t) e^{\lambda_k t} \quad t \in \mathbb{R} \quad d^\circ P_k \leq n_k - 1 \quad i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j.$$

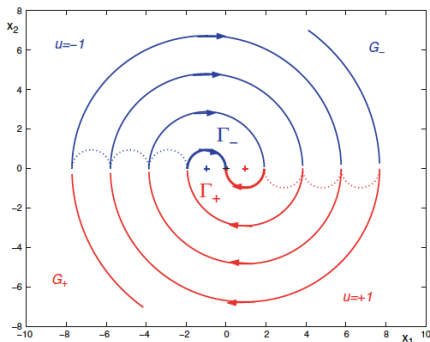
avec $n_1 + \cdots + n_r = n$.

- Propriété (générale) : $t \mapsto p(t)$ a au plus $n - 1$ zéros (par récurrence).



Oscillateur harmonique

$$\inf_{u(\cdot) \in [-1,1]} T_u \quad \text{t.q.} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad x(0) = (x_1^0, x_2^0) \quad x(T_u) = (0,0).$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{eig}(A) = \{\pm i\} \notin \mathbb{R}.$$

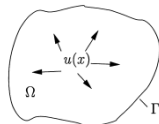
Le PMP dans un autre cadre?

- Objectif : régulation de la température d'un four:

$$\inf_u \int_{\Omega} [(y(x) - y_d(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{\Omega} [u(x) - u_d(x)]^2 dx$$

où le contrôle est **distribué** sur Ω i.e. $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

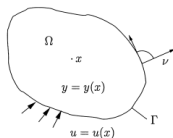
$$u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x)$$



et $y_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée (consigne), et y est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} -\Delta y & = u & \text{dans } \Omega \\ y & = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Condition de Neumann possible aussi.



Contrôle optimal d'une EDP semi-linéaire elliptique

- [EDP] Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine régulier et $y_u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ l'unique solution de

$$\begin{cases} -\Delta y + \varphi(x, y, u) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ y = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- [Contraintes] On considère l'ensemble des **contrôles admissibles** :

$$\mathcal{K} := \{u \in L^\infty(\Omega) \mid a(x) \leq u(x) \leq b(x) \text{ a.e.}\}.$$

- [Coût] On cherche à **minimiser**

$$J(u) := \int_{\Omega} \ell(x, y_u(x), u(x)) dx.$$

Contrôle optimal d'une EDP semi-linéaire elliptique

- Hamiltonien : $H(x, y, p, u) = \ell(x, y, u) - p\varphi(x, y, u)$
- Equation adjointe :

$$\begin{cases} -\Delta p &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y(x), p(x), u(x)), & \text{sur } \Omega \\ p &= 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Theorem (Raitum '86, Bonnans-Casas '89, '91)

On a la condition nécessaire d'optimalité :

(i) Si \bar{u} est un *minimum faible*, alors

$$D_u H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x))v \geq 0 \quad \forall v \in [a(x), b(x)].$$

(ii) [Principe du minimum de Pontryagin] Si \bar{u} est un *minimum fort*, alors c'est une extrémale de Pontryagin:

$$H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), \bar{u}(x)) \leq H(x, \bar{y}(x), \bar{p}(x), v), \quad \forall v \in [a(x), b(x)].$$

Plan

- 1 Introduction : présentation de quelques aspects du contrôle
- 2 Contrôlabilité
 - Définitions générales
 - Systèmes affines en la commande
 - Théorème de Chow
 - Lien avec les systèmes linéaires en la commande
- 3 Introduction au calcul des variations
 - Généralités
 - Minimum faible
 - Quelques exemples
 - Minimum fort
- 4 Principe du maximum de Pontryagin
 - Énoncé du PMP
 - Exemples d'application du PMP
 - PMP en EDP
- 5 Problèmes de temps minimal, arcs singuliers, temps de crise
 - Arcs singuliers
 - Synthèse optimale pour un bio-réacteur fed-batch
 - Méthode de régularisation
 - Principe Hybride, Viabilité, temps de crise

Problèmes du temps minimal pour un système affine mono-entrée

$$\dot{x} = f(x) + u(t)g(x)$$

Soit $\mathcal{U} := \{u : [0, \infty) \rightarrow [-1, 1] ; u \text{ mes.}\}$. On considère le problème de temps minimal:

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} T_u \quad x(0) = x_0 \quad x(T_u) \in \mathcal{T}$$

- Hamiltonien : $H(x, p, p_0, u) = p \cdot f(x) + up \cdot g(x) + p_0$.
- Equation adjointe : $\dot{p}(t) = -p(t) \cdot D_x f(x(t)) - u(t)p(t) \cdot Dg(x(t))$

Définition

La fonction de commutation est par définition $\varphi(t) := p(t) \cdot g(x(t))$.

- PMP : la condition de maximisation s'écrit:

$$\begin{aligned} \varphi(t) > 0 &\Rightarrow u(t) = +1, \\ \varphi(t) < 0 &\Rightarrow u(t) = -1, \\ \varphi(t) = 0 &\Rightarrow u(t) \in [-1, 1]. \end{aligned}$$

Arcs singuliers

Définition

On appelle **arc singulier** tout intervalle $I \subset [0, T_u)$ tel que

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = p(t) \cdot g(x(t)) = 0.$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= p(t) \cdot g(x(t)) \\ \dot{\varphi}(t) &= p(t) \cdot [f, g](x(t)) \\ \ddot{\varphi}(t) &= p(t) \cdot [f, [f, g]](x(t)) + u(t) \cdot p(t) \cdot [g, [f, g]](x(t)) \end{aligned}$$

Définition

- (i) On dit que l'arc singulier est **d'ordre 1** ssi $[g, [f, g]](x(t)) \neq 0 \forall t \in I$.
- (ii) On dit que l'arc singulier vérifie la condition de Legendre-Clebsch ssi

$$\forall t \in I, \quad p(t) \cdot [g, [f, g]](x(t)) > 0.$$

Contrôle singulier:

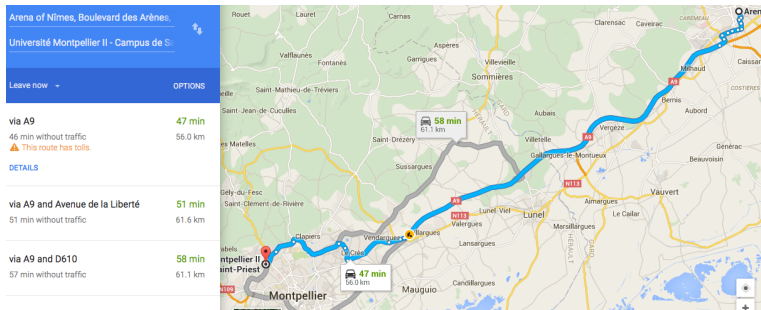
$$u_s(t) = -\frac{p(t) \cdot [f, [f, g]](x(t))}{p(t) \cdot [g, [f, g]](x(t))} \in [-1, 1]?$$

⇒ **saturation??**

Arcs singuliers : turnpike et anti-turnpike

Définition

- Si un arc singulier est optimal on parle de **turnpike**.
- Si un arc singulier n'est pas optimal on parle de **anti-turnpike**.



“The solution of an optimal control problem in large time should spend most of its time near a steady-state”

Arcs singuliers

Soit le problème de contrôle optimal

$$\inf_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} \int_0^T \ell(t, x(t), u(t)) dt, \quad \text{t.q. :}$$

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (7)$$

Définition

Soit u un contrôle défini sur $[0, T]$ tel que l'unique solution x_u de (7) soit définie sur $[0, T]$. On dit que u est **singulier** si et seulement si la différentielle de Fréchet $dE_T(u)$ de l'application entrée-sortie $u \mapsto E_T(u) = x_u$ au point u n'est pas surjective. Sinon, on dit que u est **régulier**.

Propriété

Soit $H(t, x, p, p_0, u) := p \cdot f(t, x, u) + p_0 \ell(t, x, u)$. Si u est singulier sur $[0, T]$ alors :

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p_0, u(t)) = 0,$$

Chattering : arc singulier d'ordre 2 (infinité de commutations)

$$\inf_{u(\cdot) \in [-1,1]} J(u) := \frac{1}{2} \int_0^T x_1^2(t) dt \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u \end{cases} \quad x(0) \in \mathbb{R}^2 \quad x(T) = 0.$$

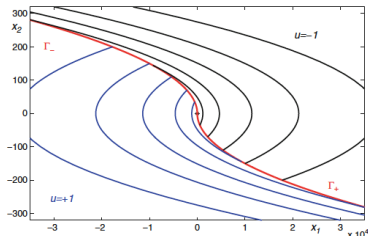
Soit $\dot{x}_3 := \frac{1}{2}x_1^2$. Le système s'écrit

$$\dot{y} = f(y) + u g(y)$$

où:

$$y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad f(y) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ \frac{1}{2}x_1^2 \end{pmatrix}; \quad g(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Lieu singulier : $(x_1, x_2) = (0, 0)$ (origine).
- Contrôle singulier $u_s = 0$.
- $[g, [f, g]](y) = 0 \Rightarrow$ Arc singulier d'ordre 2.



Méthode directe (discrétisation)

$$\min_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \ell(x_u(t), u(t)) dt + \phi(x_u(T))$$

où $x_u(\cdot)$ est une solution du problème:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$$

et $\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U ; u \text{ mes.}\}$.

- Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$. Soit $Z := (x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N)$; $x_i \simeq x(t_i)$; $u_i \simeq u(t_i)$.
- Problème d'optimisation sous contraintes :

$$\inf_{(u_1, \dots, u_n)} \tilde{J}(x_1, \dots, x_N, u_1, \dots, u_N)$$

sous les contraintes:

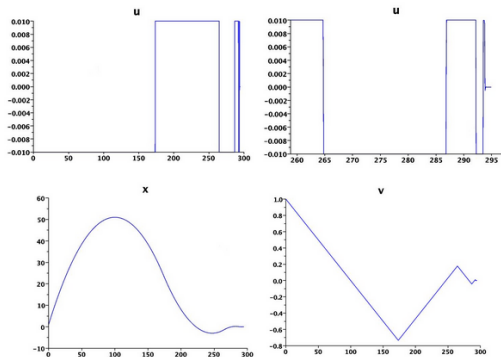
$$x_{i+1} = x_i + h_i f(x_i, u_i) \quad \text{et} \quad (u_1, \dots, u_n) \in U.$$

→ Runge-Kutta, KKT, méthodes de pénalisation (mettre la contrainte dans le coût)...

bocop, INRIA Team Commands



Simulation numériques du problème de Fuller

Figure 1: Fuller problem: chattering control (with zoom); x and v .

Données : $T = 3.5$; $u \in [-u_m, u_m]$ avec $u_m = 0.01$; $x(0) = 0$; $\dot{x}(0) = 1$

Chattering : arc singulier d'ordre 2

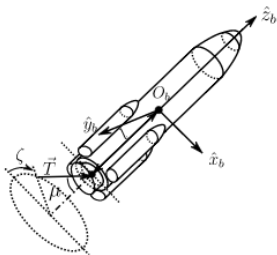
- Dans certains problèmes, une trajectoire optimale doit commuter une infinité de fois avant d'arriver (en temps fini) sur la cible) !!!
- Situation qui arrive dans certains systèmes en aéro-spatial.



J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf, *Minimum time control of the rocket attitude reorientation associated with orbit dynamic*, to appear in SIAM J. Cont. Optim., 2016



J. Zhu, E. Trélat, M. Cerf, *Planar tilting maneuver of a spacecraft: singular arcs in the minimum time problem and chattering*, to appear in Discrete Cont. Dynam. Syst. Ser. B., 2016



Problèmes du temps minimal pour un système affine mono-entrée

En dimension 2:

$$\dot{x} = f(x) + u(t)g(x) \quad \inf T_u \quad \text{t.q. } x(T_u) \in \mathcal{T}.$$

- Ensemble singulier

$$\Delta_{SA} := \{x \in \mathbb{R}^2 ; \det(g(x), [f, g](x)) = 0\}.$$

- Ensemble de colinéarité

$$\Delta_0 := \{x \in \mathbb{R}^2 ; \det(f(x), g(x)) = 0\}.$$

→ Objectif : DETERMINER un **feedback optimal** $u[x]$

- METHODE: intégrer depuis la cible en rétrograde

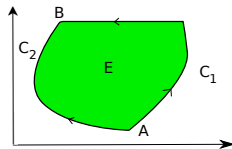
Outil de comparaison : la clock form !

$$\inf_{u(\cdot)} T_u \quad \dot{x} = f(x) + u(t)g(x) \quad x(0) = A.$$

Propriété

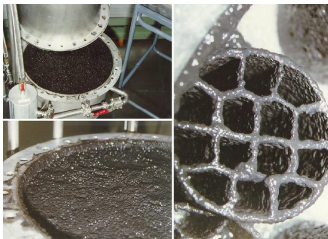
Soit A et B deux points du plan. On considère deux trajectoires γ_1, γ_2 reliant A à B en temps t_1 et t_2 . Soit E l'intérieur de $\gamma_1 \cup \gamma_2$. On suppose que $E \cap \Delta_0 = \emptyset$. Alors:

$$t_1 - t_2 = \iint_E \frac{\det(g(x), [f, g](x))}{\det(f(x), g(x))^2} dx_1 dx_2. \quad (8)$$



- Ne marche pas si $E \cap \Delta_0 \neq \emptyset$ ou si la cible n'est pas ponctuelle.
- Marche localement si $\text{sign}\left(\frac{\det(g(x), [f, g](x))}{\det(f(x), g(x))^2}\right)$ est "tractable".
- Extensions en dimensions supérieures ($n = 3\dots$)

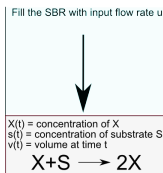
Bioréacteurs fed-batch en laboratoire



Bioréacteurs fed-batch dans l'industrie



Description d'un bioréacteur fed-batch



- v est le volume t .
- x_i concentrations de l'espèce i
- s concentration en substrat
- s_{in} concentration de substrat entrant
- débit entrant et sortant Q_{in} et Q_{out} .
- En fed-batch : $Q_{out} = 0$ et v croît.

⇒ Construire un feedback optimal pour traiter l'eau usée

Modélisation

Problème de contrôle optimal

$$\min_{u \in \mathcal{U}} T_u, \quad \begin{cases} \dot{x} = \mu(s)x - \frac{u}{v}x, \\ \dot{s} = -\mu(s)x + \frac{u}{v}(s_{in} - s), \\ \dot{v} = u, \end{cases} \quad (x(T_u), s(T_u), v(T_u)) \in \mathcal{T}$$

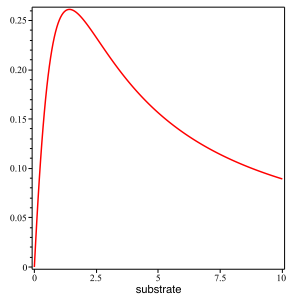
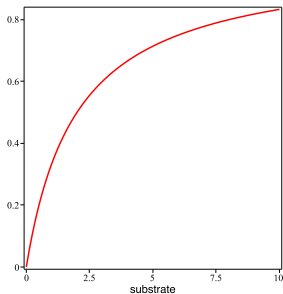
où $\mathcal{U} := \{u : [0, \infty) \xrightarrow{\text{meas.}} [0, u_m]\}$ and $\mathcal{T} := \{(s, v) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \mid s \leq \bar{s}, v = \bar{v}\}$.

- La quantité $M := v(x + s - s_{in})$ est conservée (i.e. $\dot{M} = 0$) \Rightarrow réduction à un système plan

$$x = \frac{M}{v} + s_{in} - s.$$

- On prend $u_m = 1$.

Fonctions de croissance



- Monod : $\mu(s) = \frac{\bar{\mu}s}{k+s}$
- Haldane : $\mu(s) = \frac{\bar{\mu}s}{k+s+k's^2}$ avec un unique maximum $s^* \in [0, s_{in}]$.

Le lieu singulier correspond au maximum de μ

On suppose μ de type Haldane.

Lemme

Le lieu singulier est l'ensemble des points $\{s^*\} \times (0, +\infty)$ dans le plan (s, v) où $\mu'(s^*) = 0$

Preuve.

- Hamiltonien:

$$H = -\lambda_s \mu(s) \left(\frac{M}{v} - (s - s_{in}) \right) + u \underbrace{\left(\frac{\lambda_s (s_{in} - s)}{v} + \lambda_v \right)}_{\phi(t)} - 1$$

- Equation adjointe :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_s = \lambda_s (\mu'(s)x - \mu(s) + \frac{u}{v}), \\ \dot{\lambda}_v = \frac{\lambda_s}{v^2} (-\mu(s)M + u(s_{in} - s)), \end{cases}$$

- Arc singulier : $\phi(t) = 0 \Rightarrow \dot{\phi}(t) = 0$. On a:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{\lambda_s(t) \mu'(s(t)) (s_{in} - s(t)) x(t)}{v(t)}$$

□

Synthèse optimale

Theorem (Moreno '99)

(i) Si μ set de type **Monod**, alors un feedback optimal est donné par:

$$u[s, v] = \begin{cases} 1 & \text{if } v < \bar{v}, \\ 0 & \text{if } v = \bar{v}. \end{cases}$$

(ii) Si μ est de type **Haldane** et si **l'arc singulier est admissible** i.e.

$$\forall v \in v \in [0, \bar{v}], \quad u_s[v] := \mu(s^*) \left[v + \frac{M}{s_{in} - s^*} \right] \leq 1, \quad (9)$$

alors, un feedback optimal est donné par:

$$u[s, v] = \begin{cases} 1 & \text{if } s < s^* \text{ and } v < \bar{v}, \\ u_s[v] & \text{if } s = s^* \text{ and } v \leq \bar{v}, \\ 0 & \text{if } s > s^* \text{ or } v = \bar{v}. \end{cases}$$

Preuve.

Clock form



Synthèse optimal de type turnpike (cas Haldane)

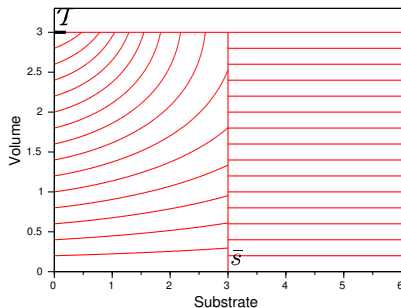


Figure: Trajectoires optimales

Objectif

Etudier la synthèse lorsque le débit $u_m = 1$ n'est pas suffisamment grand pour maintenir $s = \bar{s}$ jusqu'à $v = v_m$.

Application du PMP

Problèmes de contrôle optimal

$$\min_{u \in \mathcal{U}} T_u, \quad \begin{cases} \dot{s} = -\mu(s) \left(\frac{M}{V} + s_{in} - s \right) + \frac{u}{V} (s_{in} - s), \\ \dot{v} = u, \end{cases} \quad s(T_u) \leq \bar{s}, \quad v(T_u) = \bar{v}$$

PMP:

- Hamiltonien :
$$H := -\lambda_s \mu(s) \left[\frac{M}{V} - (s - s_{in}) \right] + u \underbrace{\left[\frac{\lambda_s (s_{in} - s)}{V} + \lambda_v \right]}_{\phi} + \lambda_0.$$

- Loi de commande

$$\begin{cases} \phi(t) < 0 \implies u(t) = 0 \\ \phi(t) > 0 \implies u(t) = 1 \\ \phi(t) = 0 \implies u(t) \in [0, 1]. \end{cases}$$

Admissibilité d'un arc singulier

Lemme

- Le lieu singulier dans le plan (s, v) est l'ensemble $\{s^*\} \times (0, \bar{v}]$.
- Le contrôle singulier vaut:

$$u_s[v] := \mu(s^*) \left[v + \frac{M}{s_{in} - s^*} \right]. \quad (10)$$

- L'arc singulier est un *turnpike*. Il est admissible ssi $v^* \geq \bar{v}$ où v^* satisfait $u_s[v^*] = 1$:

$$v^* := \frac{1}{\mu(s^*)} - \frac{M}{s_{in} - s^*}$$

(H) On suppose $v^* < \bar{v}$.

Point de pré-saturation

Lemme

Si (H) est vérifiée, alors une extrémale singulière quitte l'arc singulier avant v^* avec $u = 1$ i.e. il existe $v_a < v^*$ tel que l'arc singulier n'est plus optimal pour $v > v_a$.

Proof.

- On suppose que $s(t) = \bar{s}$ jusqu'à v^* . En (s^*, v^*) on a $\frac{ds}{dt} < 0$ pour tout $u \in [0, 1]$. Comme $\dot{\phi} = \frac{\lambda_s \chi(s_{in} - s) \mu'(s)}{v}$, on obtient $\dot{\phi}(t) < 0$ pour $t \geq t_2$ et donc $u = 0$. La trajectoire ne peut atteindre la cible !

□

Définition

Le point (\bar{s}, v_a) est un **frame point** de type $(CS)_2$ à l'intersection d'un **arc singulier** et d'une **courbe de commutation**. C'est un point de **pré-saturation**.

- La courbe de commutation peut se calculer en minimisant le temps d'une trajectoire $B_- - B_+ - B_-$.

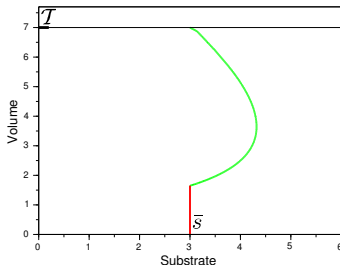


Figure: Arc singulier jusqu'à $v_a < v^*$ (en rouge) et courbe de commutation (\bar{s}, v_a) (en vert).

Lemme

- La courbe de commutation relie (s^*, v_a) et (s^*, \bar{v}) .
- La courbe de commutation C peut être paramétrée par: $v \in [v_a, \bar{v}] \mapsto s_c(v)$.

Synthèse optimale

Théorème

On suppose que $0 < v^* < \bar{v}$ (i.e. (H) est vérifiée). Alors un feedback optimal est donné par:

$$u[s, v] := \begin{cases} 0 & \text{if } s > s_c(v), & v \geq v_a \\ 1 & \text{if } s \leq s_c(v), & v \geq v_a \\ 1 & \text{if } s < s^*, & v < v_a \\ u_s[v] & \text{if } s = s^*, & v < v_a \\ 0 & \text{if } s > s^*, & v < v_a. \end{cases}$$

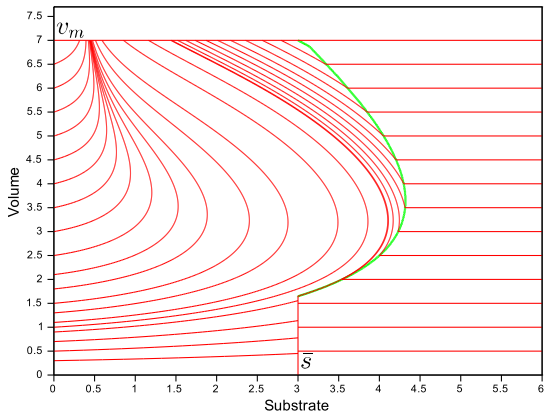


Figure: Trajectoires optimales

Synthèse optimale (suite)

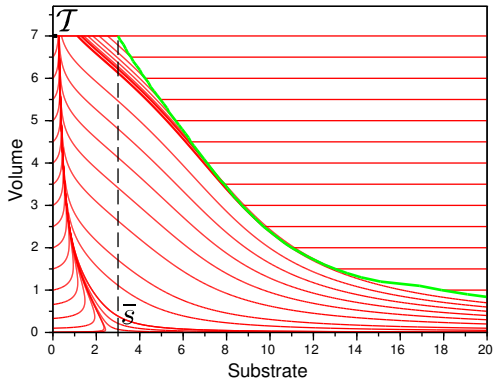


Figure: Trajectoires optimales (cas d'un arc singulier non-admissible)

Augmentation de la dynamique

- Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ réguliers.

$$\inf_{u(\cdot) \in [-1,1]} T_u \quad \dot{x} = f(x) + u(t)g(x) \quad x(0) = x_0 \text{ et } x(T_u) \in C$$

- Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ t.q. $\text{Vect}(g(x), h(x)) = \mathbb{R}^2 \forall x \in \mathbb{R}^2$.

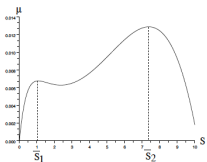
$$\inf_{\mathbf{u}=(u(\cdot), \varepsilon v(\cdot)) \in \mathcal{B}} T_{\mathbf{u}} \quad \dot{x}_\varepsilon = f(x_\varepsilon) + u(t)g(x_\varepsilon) + \varepsilon v(t)h(x_\varepsilon) \quad \text{avec } u^2 + \varepsilon^2 v^2 \leq 1, x(0) = x_0 \text{ et } x(T_{\mathbf{u}}) \in C$$

- PMP + indépendance linéaire \Rightarrow unicité de la commande optimale $(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot))$:

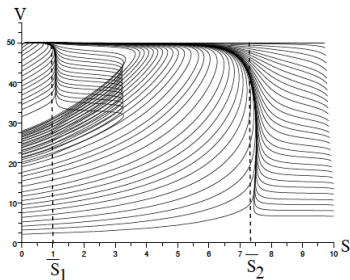
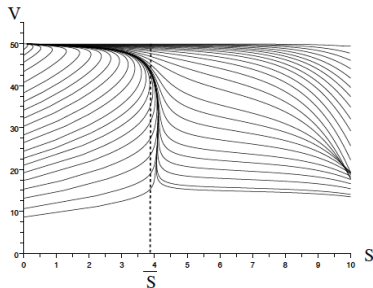
$$u_\varepsilon(t) = \frac{p_\varepsilon(t) \cdot h(x_\varepsilon(t))}{\sqrt{(p_\varepsilon(t) \cdot g(x_\varepsilon(t)))^2 + (p_\varepsilon(t) \cdot h(x_\varepsilon(t)))^2}}$$

$$v_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon p_\varepsilon(t) \cdot g(x_\varepsilon(t))}{\sqrt{(p_\varepsilon(t) \cdot g(x_\varepsilon(t)))^2 + (p_\varepsilon(t) \cdot h(x_\varepsilon(t)))^2}}$$

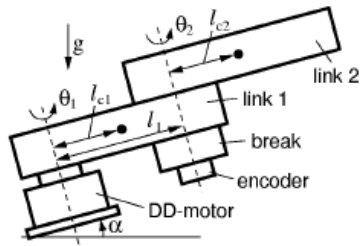
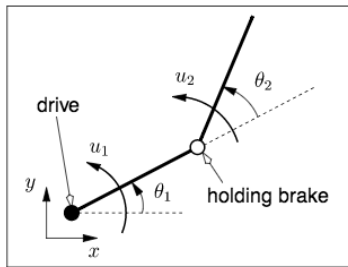
Augmentation de la dynamique (simulations numériques)



→ compétition entre 2 arcs singuliers !



Robot hybride à deux degrés de liberté



- Actionneur continue u_1 .
- Actionneur hybride $v_1 \in \{0, 1\}$ (frein).

Principe hybride

Soit $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{m_1} \rightarrow \mathbb{R}^{n_1}$ et $g : \mathbb{R}^{n_2} \times \mathbb{R}^{m_2} \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$. On considère le système **hybride**:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} & = f(x, u(t)) & u(t) \in U, \quad t \in [0, \tau), \\ \dot{y} & = g(y, v(t)) & v(t) \in V, \quad t \in (\tau, T], \\ x(0) \in M_0 & & (\tau, x(\tau), y(\tau)) \in S \quad x(T) \in M_1. \end{array} \right.$$

- Minimiser globalement:

$$\inf_{u(\cdot), v(\cdot)} \phi_0(x(0)) + \int_0^\tau \ell_1(x(t), u(t)) dt + \phi_1(x(\tau), y(\tau)) + \int_\tau^T \ell_2(y(t), v(t)) dt + \phi_1(y(T))$$

Définitions:

- $H_1(x, p, u) = p \cdot f(x, u) - \eta \ell_1(x, u)$
- $H_1(x, p, u) = p \cdot f(x, u) - \eta \ell_1(x, u)$

Principe hybride

Théorème

Soit (x, u, y, v) une trajectoire optimale. Alors:

- $\exists p : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a.c. et $\exists q : [\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ a.c. et $\exists \eta \in \{0, 1\}$ t.q.: $(\eta, p(\tau), q(\tau)) \neq 0$.
- Transversalité : $p(0) - \eta \nabla \phi_0(x(0)) \in N_{M_0}(x(0))$, $q(T) - \eta \nabla \phi_1(x(T)) \in N_{M_1}(x(T))$
- Equations adjointes :

$$\dot{p} = -\frac{\partial H_1}{\partial x} \quad \dot{q} = -\frac{\partial H_2}{\partial y}$$

- Maximisation:

$$u(t) \in \arg \max_{\omega \in U} H_1(x(t), p(t), \omega), \quad v(t) \in \arg \max_{\omega' \in U} H_2(y(t), q(t), \omega').$$

- Conservation des Hamiltoniens : $H_1(x(t), p(t), u(t)) = h_1$ et $H_2(y(t), q(t), v(t)) = h_2$
- Relation à l'interface:

$$(h_1 - h_2, -p(\tau^-), q(\tau^+)) \in \eta D_{x,y} \phi_1(x(\tau), y(\tau)) + N_S(\tau, x(\tau), y(\tau)).$$

Problème du temps de crise

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J(u) := \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt \quad (\mathcal{P})$$

- $x_u(\cdot)$ est l'unique solution du problème de Cauchy:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T], \\ x(0) &= x_0. \end{cases}$$

- $u \in \mathcal{U}$ l'ensemble des commandes admissibles:

$$\mathcal{U} := \{u : [0, T] \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m ; u \text{ mes.}\}.$$

- $K \subset \mathbb{R}^n$ est convexe fermé d'intérieur non-vidé et:

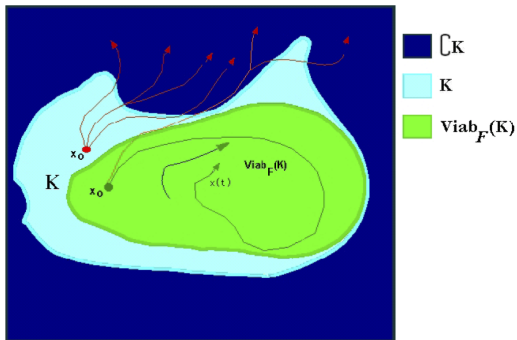
$$\mathbb{1}_{K^c}(x) := \begin{cases} 0 & x \in K, \\ 1 & x \notin K. \end{cases}$$

Motivations pour le temps de crise

Définition

Etant donnée une dynamique $\dot{x} = f(t, x, u(t))$

- L'ensemble K est viable ssi $\forall x_0 \in K \exists u(\cdot) x_u(t, x_0) \in K \forall t \geq 0$.
- Le noyau de viabilité de K est $Viab_K(f) := \{x_0 \in K ; \exists u \in \mathcal{U} x_u(t) \in K \forall t \geq 0\}$.



\Rightarrow il existe de nombreuses méthodes pour calculer **numériquement** le noyau de viabilité (HJB).

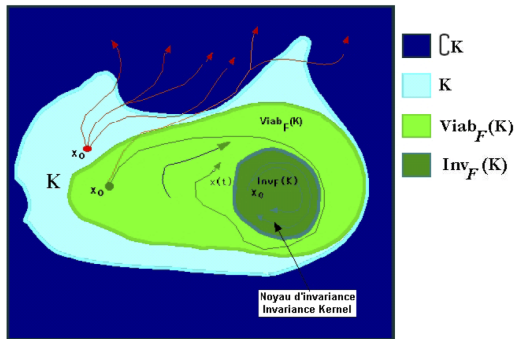
Motivations pour le temps de crise

Etant donnée une dynamique $\dot{x} = f(t, x, u(t))$:

Définition

Le sous-ensemble de K , noté $\text{Inv}_K(f)$ (noyau d'invariance) est l'ensemble des conditions initiales $x_0 \in K$ t.q.:

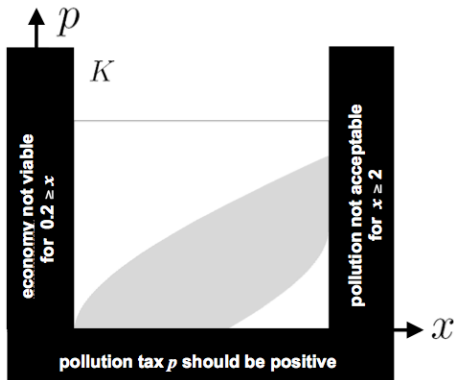
$$\forall u(\cdot), x_u(t, x_0) \in K \quad \forall t \geq 0.$$



Trade-off entre développement économique et pollution

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) - p(t) \\ \dot{p}(t) = u(t) \end{cases} \quad u(t) \in [u_{min}, u_{max}]$$

- Contraintes : taxe sur la pollution $p \geq 0$. Economie assujettie à $x \geq 0.2$, $x \leq 2 \Rightarrow 3$ contraintes.



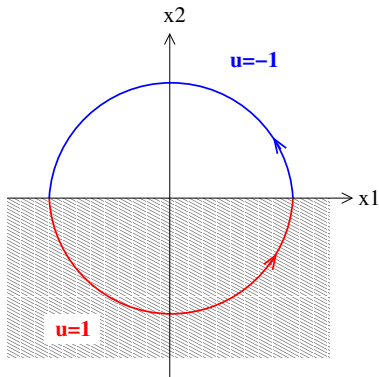
Motivation pour le temps de crise

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt$$

où x_u est solution du système "oscillant":

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_2(t)(2 + u(t)) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t)(2 + u(t)) \end{cases} \quad u(t) \in [-1, 1] \quad K = \{x_2 \geq 0\}.$$

Stratégie intuitive:

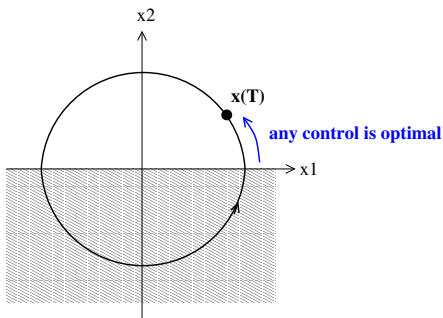


Stratégie myope

Propriété

La stratégie **myope** est optimale :

$$u_m[x] := \begin{cases} 1 & x \notin K \\ -1 & x \in K \end{cases}$$



Points de croisement

Définition

On dit qu'un instant $t_c \in [0, T]$ est un *point de croisement régulier* si

- (i) Le point $x(t_c)$ est tel que $x(t_c) \in \partial K$, et il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in [t_c - \eta, t_c)$, resp. $t \in (t_c, t_c + \eta]$, on a $x(t) \in K$, resp. $x(t) \in K^c$.
- (ii) Le contrôle u associé à la trajectoire x est continue à gauche et à droite au point t_c .
- (iii) La trajectoire est *transverse* à l'ensemble K au point $x(t_c)$.
(i.e. $\forall h^* \in N_K(x)$ tel qu'il existe $h \in T_K(x(t_c)) \setminus R_K(x)$ avec $h^* \cdot h = 0$, on a: $h^* \cdot f(x(t_c), u(t_c)) \neq 0$.)

(H') Toute trajectoire optimale $(x(\cdot), u(\cdot))$ a soit zéro ou un nombre fini $m \geq 1$ de points de croisement réguliers $\{t_1, \dots, t_m\}$ sur $[0, T]$.

Principe du maximum hybride

Proposition

On suppose (H') vérifiée et soit $\mathcal{T}_c := \{t_1, \dots, t_m\}$ les points de croisement. Alors :

- $\exists p_0 \leq 0, p : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ t.q. $(p_0, p(\cdot)) \neq 0$ et

$$\dot{p}(t) = -\partial_x H(x(t), p(t), p^0, u(t)) \quad \text{p.p. } t \in [0, T].$$

- $u(t) \in \arg \max_{v \in U} H(x(t), p(t), p^0, v)$ p.p. $t \in [0, T]$.
- Condition de transversalité : $p(T) = 0$.
- Le Hamiltonien est constant le long de l'extrémale.
- A un instant $t_j \in \mathcal{T}_c$, on a :

$$p(t_j^+) - p(t_j^-) \in N_K(x(t_j)).$$

Ou encore : $\exists h \in N_K(x(t_c))$ t.q. :

$$p(t_j^+) = p(t_j^-) + \frac{p(t_j^-) \cdot (f(x(t_j), u(t_j^-)) - f(x(t_j), u(t_j^+))) + \sigma p_0}{h \cdot f(x(t_j), u(t_j^+))} h$$

où $\sigma = \pm 1$.

Pourquoi régulariser?

- Résoudre numériquement un problème "lisse".
- Pas d'hypothèses sur une trajectoire optimale !

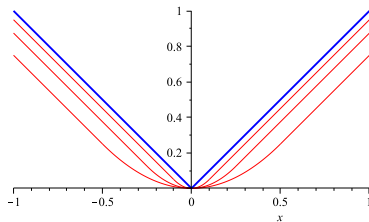
Régularisation de Moreau-Yosida

Définition

Etant donné $\varepsilon > 0$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la régularisée de Moreau-Yosida est définie par:

$$f_\varepsilon(x) := \inf_{u \in \mathbb{R}^n} \{f(u) + \frac{1}{2\varepsilon} \|x - u\|^2\}.$$

- $f(x) = |x| \Rightarrow f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2\varepsilon}, & x \in [-\varepsilon, \varepsilon] \\ x - \frac{\varepsilon}{2}, & x > \varepsilon \\ -x + \frac{\varepsilon}{2}, & x < -\varepsilon \end{cases}$
- $f(x) = \chi_K(x) = \begin{cases} 0, & x \in K \\ +\infty, & x \notin K \end{cases} \Rightarrow f_\varepsilon(x) = \frac{d(x, K)^2}{2\varepsilon}$



Problème régularisé

On considère le problème régularisé:

$$\inf_{u \in \mathcal{U}} J_\varepsilon(u) := \int_0^T \gamma(e_\varepsilon(x_u(t))) dt \quad (\mathcal{P}_\varepsilon)$$

- avec $\gamma(v) = 1 - e^{-v}$; $\mathbb{1}_{K^c}(x) = \gamma(\chi_K(x))$ et χ_K est la fonction caractéristique de K :

$$\chi_K(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x \in K, \\ +\infty & \text{if } x \notin K. \end{cases}$$

- On suppose K convexe \implies l'enveloppe de Moreau de K :

$$x \mapsto e_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon} d(x, K)^2$$

est de classe $C^{1,1}$.

Convergence du système état-adjoint

Théorème

Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ et $(x_n(\cdot), p_n(\cdot), u_n(\cdot))$ une solution de $\mathcal{P}_{\varepsilon_n}$. Alors:

- $x_n(\cdot)$ converge uniformément vers une fonction $x^*(\cdot)$ a.c. qui est une **solution du problème \mathcal{P}** .
- $\dot{x}_n(\cdot)$ converge faiblement dans L^2 vers $\dot{x}^*(\cdot)$.

En outre si (H') est vérifiée:

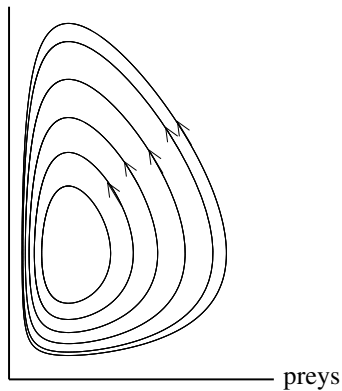
- $p_n(\cdot)$ est uniformément bornée sur $[0, T]$.
- $p_n(\cdot)$ converge uniformément vers $p^*(\cdot)$ sur tout compact de $[0, T] \setminus \mathcal{T}_C$.
- $\dot{p}_n(\cdot)$ converge faiblement vers $\dot{p}^*(\cdot)$.

où $\mathcal{T}_C := \{t_1, \dots, t_m\}$, $p^*(\cdot)$ est a.c. sur $[0, T] \setminus \mathcal{T}_C$ et $(x^*(\cdot), p^*(\cdot), u^*(\cdot))$ satisfait le **HMP**.

Système proie prédateur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - ax(t)y(t) & \text{proies} \\ \dot{y}(t) = -dy(t) + bx(t)y(t) & \text{prédateurs} \end{cases}$$

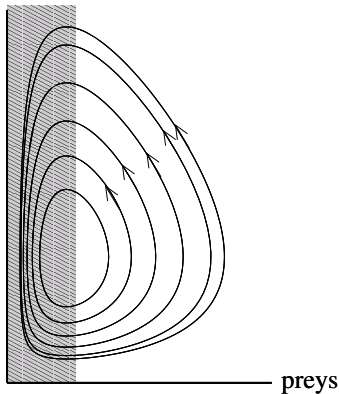
predators



Système proie prédateur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - ax(t)y(t) & \text{proies} \\ \dot{y}(t) = -dy(t) + bx(t)y(t) & \text{prédateurs} \end{cases}$$

predators

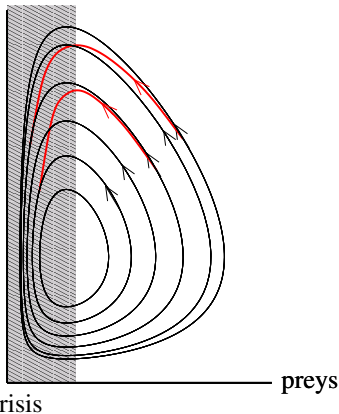


crisis

Système proie prédateur

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(t) - ax(t)y(t) & \text{proies} \\ \dot{y}(t) = -dy(t) + bx(t)y(t) - u(t)y(t) & \text{prédateurs} \end{cases}$$

predators

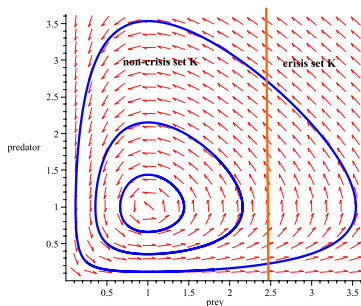


Etude numérique du temps de crise sur le système proie-prédateur

- On considère le problème de contrôle optimal :

$$\inf_{u(\cdot)} \int_0^T \mathbb{1}_{K^c}(x_u(t)) dt \quad \text{t.q.} \quad \begin{cases} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)(1 - x_2(t)) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t)(x_1(t) - 1) + u(t)x_2(t) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{proie} \\ \text{predateur} \end{array}$$

où $K := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 ; x_1 \geq \alpha\}$ et $0 \leq u(t) \leq u_{max}$.



Simulations numériques

- On prend $\varepsilon = 0.01$; méthode directe (bocop, INRIA Team Commands) :

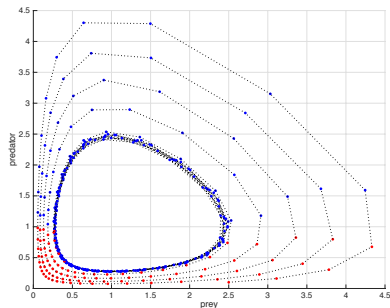
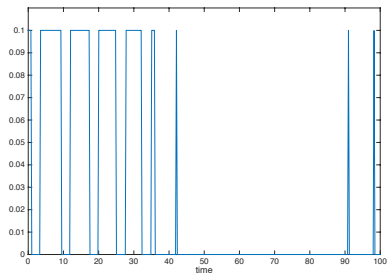


Fig : Optimal control (left) and corresponding trajectory (right).

- In red $u = u_{max}$ and in blue $u = 0$.