Synthèse des travaux de recherche

pour l'habilitation à diriger des recherches

Géométrie et représentations des groupes réductifs finis

Cédric Bonnafé

Soutenue le mardi 21 juin 2005

devant le jury composé de

Michel BROUÉ
Meinolf GECK
Gus I. LEHRER
Jean MICHEL
Raphaël ROUQUIER
Toshiaki SHOJI

Table des matières

Introduction.

Soit G un groupe réductif défini sur une clôture algébrique $\mathbb{F}$ du corps fini à p éléments $\mathbb{F}_p$, p premier. Supposons G muni d'une isogénie $F : G \to G$ dont une puissance F^δ est un endomorphisme de Frobenius de G relatif à une $\mathbb{F}_q$-structure ($q = p^e$, $\mathbb{F}_q$ désignant le sous-corps de $\mathbb{F}$ à q éléments). Le groupe des points fixes de G sous F, noté

$$G^F = \{g \in G \mid F(g) = g\},$$

est fini et est appelé *groupe réductif fini*. Dans mes recherches, je me suis principalement intéressé à l'étude des représentations, modulaires ou ordinaires, des groupes réductifs finis en utilisant les méthodes géométriques développées depuis l'article fondateur de P. Deligne et G. Lusztig [DeLu] paru en 1976.

Une des premières questions qui se pose en présence d'un groupe fini est de déterminer sa table de caractères. G. Lusztig a obtenu, grâce à la théorie de Deligne-Lusztig, un paramétrage complet des caractères irréductibles de G^F ainsi que des formules explicites pour leur degré. Il a ensuite proposé une autre théorie géométrique (théorie des faisceaux-caractères) permettant de construire un algorithme conjectural pour calculer la table de caractères de G^F. La validité de cet algorithme a été établie lorsque le centre de G est connexe par T. Shoji (1995), lorsque G est orthogonal ou symplectique par J.L. Waldspurger (2003) et lorsque G^F est le groupe spécial linéaire ou spécial unitaire par moi-même (2005). Il est à noter que les résultats sur les groupes symplectiques. orthogonaux, spéciaux linéaires et spéciaux unitaires ne sont valides que pour q grand. Dans le cas du groupe spécial linéaire, la conjecture de Lusztig a aussi été résolue par T. Shoji (2005) indépendamment par des méthodes totalement différentes (descente de Shintani) : son résultat est valide pour p grand et q quelconque. Ceci sera développé dans la section 1.

La recherche d'équivalences de catégories entre blocs de groupes finis abstraits différents a connu depuis quinze ans de spectaculaires avancées. Ces équivalences sont de plusieurs natures : équivalences de Morita, équivalences dérivées, équivalences stables. Dans le cas des groupes réductifs finis, les théories géométriques fournissent des bimodules ou des complexes de bimodules qui sont des candidats naturels pour réaliser ces équivalences. Avec R. Rouquier, nous avons montré que la décomposition de Jordan des blocs des groupes réductifs finis était le reflet d'une équivalence de Morita. D'autre part, nous avons résolu un cas particulier de la version géométrique de la conjecture du défaut abélien (M. Broué), celui correspondant à la variété de Deligne-Lusztig associée à l'élément de Coxeter du groupe général linéaire. Ceci sera discuté dans la section 2.

Au cœur de l'étude des groupes réductifs et de leurs représentations se trouve la famille des groupes de réflexions finis. Ils interviennent dans plusieurs autres branches de l'algèbre (théorie des invariants, carquois, algèbres "cluster", correspondance de McKay...) et en topologie algébrique (groupes de tresses). Avec D. Bessis et R. Rouquier, nous avons étudié les quotients de groupes de réflexions. D'autre part, avec L. Iancu, M. Geck et T. Lam, nous travaillons actuellement sur les algèbres de Hecke à paramètres inégaux (qui sont des déformations des algèbres de groupes des groupes de réflexions réels), notamment sur les questions liées à la théorie de Kazhdan-Lusztig. Par ailleurs, j'ai récemment travaillé avec C. Hohlweg sur les algèbres de descente. La section 3 sera consacrée à ces sujets.

Dans la dernière section de cette synthèse, j'évoquerai rapidement les contributions que j'ai apportées à l'étude des classes de conjugaison des groupes réductifs : il s'agit essentiellement de résultats isolés, très souvent liés aux difficultés que peut introduire la non connexité du centre de G.

Quelques notations - Soit ℓ un nombre premier différent de p, soit K un extension finie suffisamment grande de $\mathbb{Q}_\ell$, soit $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de K sur $\mathbb{Z}_\ell$ et soit k le corps résiduel de $\mathcal{O}$ (qui est de caractéristique ℓ). Si H est un groupe fini, $\operatorname{Irr} H$ est l'ensemble de ses caractères irréductibles sur K et $\operatorname{Cent}(H)$ est le K-espace vectoriel des fonctions centrales $H \to K$. L'ensemble des caractères linéaires $H \to K^\times$ est noté $H^\wedge$. $\square$

1. Caractères des groupes réductifs finis

1.A. Induction, restriction de Deligne-Lusztig

Si L est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique P de notre groupe G, Deligne et Lusztig ont construit deux applications $\mathbb{Z}$-linéaire $R_L^G : \mathbb{Z}\operatorname{Irr} L^F \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr} G^F$ et ${}^*R_L^G : \mathbb{Z}\operatorname{Irr} G^F \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr} L^F$ appelées respectivement induction et restriction de Deligne-Lusztig. Grâce à ces applications, il est possible d'attaquer l'étude des représentations de G^F par récurrence : en effet, L est un groupe réductif plus petit que G.

Par ce procédé, Lusztig a réussi à classifier les caractères irréductibles de G^F. Lorsque le centre de G est connexe, cette classification l'a conduit à introduire une autre base de l'espace des fonctions centrales dont les éléments sont appelés *caractères fantômes*. La matrice de passage entre la base des caractères irréductibles et la base des caractères fantômes étant explicitement connue et relativement simple, connaître la table de caractères de G^F est équivalent à connaître la table de caractères fantômes.

1.A.1. Formule de Mackey. Le calcul explicite des applications de Deligne-Lusztig joue un rôle central dans la théorie des caractères de G^F. Pour calculer l'induction et la restriction classique dans les groupes finis abstraits, la formule de Mackey est un ingrédient fort utile. Pour l'induction et la restriction de Deligne-Lusztig, on conjecture que la formule suivante (encore appelée *formule de Mackey*) a lieu :

$$(\mathfrak{M}_{G,L,M}) \qquad {}^*R_L^G \circ R_M^G = \sum_{g \in [L^F \backslash \mathcal{S}_G(L,M)^F / M^F]} R^L_{L\cap {}^gM} \circ {}^*R^{{}^gM}_{L\cap {}^gM} \circ (\operatorname{ad} g).$$

Ici, $\mathcal{S}_G(L,M)$ est l'ensemble des $g \in G$ tels que $L \cap {}^gM$ contienne un tore maximal de G. Après plusieurs tentatives ponctuées de résultats intermédiaires [B1], [B5], j'ai réussi à montrer le théorème suivant [B13] :

Théorème 1.1. *Si $\delta = 1$, c'est-à-dire si F est un endomorphisme de Frobenius, alors :*

(a) *Si $q \geqslant 3$, alors $(\mathfrak{M}_{G,L,M})$ a lieu.*

(b) *Si $q = 2$ et si G ne contient pas de composante irréductible de type E_6, E_7 ou E_8, alors $(\mathfrak{M}_{G,L,M})$ a lieu.*

Il est à noter que la preuve que je propose de ce théorème est indirecte et particulièrement déplaisante : par un argument de récurrence sur la dimension de G, on montre qu'une propriété des éléments semi-simples de G^{*F^*} (ici, (G^*, F^*) est un dual de (G,F)) implique la formule de Mackey. Il n'est pas très dûr de montrer que cette propriété a lieu lorsque q est assez grand [B1]. En utilisant d'autres réductions proposées dans [B5], on arrive à prouver cette propriété, certains cas (groupes exceptionnels et petites valeurs de q) étant traités par ordinateur en utilisant des programmes écrits en `GAP` par J. Michel.

Remarque - En fait, la preuve par récurrence montre que, pour prouver la formule de Mackey lorsque $\delta = 1$, il ne reste plus qu'à vérifier que $(\mathfrak{M}_{G,L,M})$ a lieu lorsque le quadruplet (G, L, M, F) satisfait les conditions suivantes :

(1) G est semi-simple simplement connexe de type E_6 ;
(2) $\delta = 1$, $q = 2$ et F n'est pas déployé ;
(3) L et M sont de type $A_2 \times A_2$;
(4) L'automorphisme $\frac{1}{2}F$ des réseaux $X(Z(L)^\circ)$ et $X(Z(M)^\circ)$ est d'ordre 6.

Notons que, dans le cas ci-dessus, le groupe G^F est d'ordre

$$229597439051324561817600 = 2^{36}.3^{10}.5^2.7^2.11.13.17.19,$$

ce qui rend une vérification directe délicate. $\square$

1.A.2. Groupe spécial linéaire. Dans ma thèse, j'ai obtenu une formule pour le calcul de l'induction de Deligne-Lusztig dans la base des caractères irréductibles dont les ingrédients essentiels étaient la formule de Mackey et un résultat de Digne, Lehrer et Michel sur la restriction de Deligne-Lusztig d'un caractère de Gelfand-Graev [DLM2]. À l'époque, la formule de Mackey n'était connue que lorsque q est assez grand (c'était un des résultats de ma thèse) et le résultat de Digne, Lehrer et Michel n'était pas assez précis pour permettre de lever quelques ambiguïtés. Je me suis donc attaqué à ces deux questions. La formule de Mackey a été évoquée dans la sous-section précédente. La levée de l'imprécision du résultat de Digne, Lehrer et Michel sera expliquée dans la prochaine section.

1.B. Faisceaux-caractères : géométrie

En analysant la preuve de Digne, Lehrer et Michel, qui utilisait la théorie des faisceaux-caractères, il ressortait que l'ambiguïté découlait d'un manque d'information sur l'action de l'algèbre d'endomorphismes d'un induit d'un faisceau-caractère cuspidal. Lusztig avait montré [Lu3, théorème 9.2] que cette algèbre d'endomorphismes $\mathcal{A}$ était isomorphe à l'algèbre de groupe d'un groupe de Weyl relatif $\mathcal{W}$ associé au contexte. Son isomorphisme permet de calculer la correspondance de Springer généralisée mais n'est pas explicite. Dans [B8, partie I], j'ai proposé une construction explicite d'un autre isomorphisme entre $\mathcal{A}$ et l'algèbre de groupe de $\mathcal{W}$ et montré que les deux isomorphismes différaient par un caractère linéaire γ de $\mathcal{W}$. J'ai aussi proposé une méthode réduisant le calcul de γ à un calcul de stabilisateurs.

Connaître γ permet de concilier le caractère explicite de mon isomorphisme avec le calcul de la correspondance de Springer généralisée. Dans [B8, partie II], j'ai calculé explicitement γ lorsque le faisceau-caractère cuspidal à partir duquel on induit est supporté par la classe unipotente régulière, et ceci pour tout groupe réductif G en bonne caractéristique.

Comme application, j'obtenais le résultat suivant, qui ne différe du résultat de Digne, Lehrer et Michel que par le côté explicite de Γ^L (dont on verra les applications plus tard).

Théorème 1.2. *Supposons que $\delta = 1$ et que q soit assez grand. Soit Γ^G un caractère de Gelfand-Graev de G^F. Alors il existe un caractère de Gelfand-Graev Γ^L de L^F, déterminé explicitement, tel que ${}^*R_L^G \Gamma^G = \pm\Gamma^L$.*

1.C. Faisceaux-caractères : conjecture de Lusztig en type A

Fort du théorème 1.2, j'ai pu attaquer la question de la conjecture de Lusztig pour les groupes de type A. Je vais rappeler brièvement en quoi consiste cette conjecture. À chaque faisceau-caractère F-stable sur G est associée une fonction centrale sur G^F, sa *fonction caractéristique*. Ces fonctions caractéristiques forment une base orthonormale de l'espace des fonctions centrales sur G^F.

> **Conjecture de Lusztig.** *Les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F-stables sont obtenues à partir de $\operatorname{Irr} G^F$ par une transformée de Fourier, puis une multiplication par une racine de l'unité.*

Il n'est pas le lieu ici de préciser plus le terme *transformée de Fourier*. Il convient juste de dire que, lorsque le centre de G est connexe, ces transformées de Fourier sont les caractères fantômes. En général, la matrice de la transformée de Fourier est diagonale par bloc et les blocs sont explicites et de taille “générique”, c'est-à-dire indépendants de q. Lusztig ayant proposé un algorithme théorique pour calculer les fonctions caractéristiques, une réponse positive à la conjecture de Lusztig fournit un algorithme théorique de calcul de la table de caractères de G^F.

1.C.1. Induction de Deligne-Lusztig en type *A*. Le calcul de l'induction de Deligne-Lusztig dans le groupe spécial linéaire effectué dans ma thèse se trouvait précisé grâce au théorème 1.2. Je me suis aussi aperçu, et cela constituait une surprise pour moi, qu'en renversant légèrement l'approche de ma thèse, je pouvais aussi obtenir une formule explicite pour l'induction de Deligne-Lusztig dans le cas du groupe spécial unitaire. En fait, n'importe quel groupe de type A, pourvu que F soit un endomorphisme de Frobenius et que q soit assez grand, pouvait être traité ainsi [B14, chapitre VII].

1.C.2. Conjecture de Lusztig en type *A*. Supposons ici que toutes les composantes de G sont de type A, que $\delta = 1$ et que q soit assez grand. Lusztig ayant donné des formules précises en termes d'induction de Deligne-Lusztig pour le calcul des fonctions caractéristiques, il ne restait que deux étapes à franchir pour démontrer la conjecture de Lusztig dans ce cas. La première, assez facile, consiste à la démontrer pour les fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères cuspidaux [B6, théorème 6.2.2]. La deuxième, plus technique et qui a nécessité beaucoup de temps, consistait à comparer les formules de Lusztig et les miennes. Le résultat est présenté dans [B14, chapitre VII]. Nous introduisons quelques notations pour en donner un énoncé.

Tout d'abord, l'ensemble des caractères irréductibles de G^F est décomposé en *familles* :

$$\operatorname{Irr} G^F = \coprod_{i \in \mathcal{F}(G,F)} \mathcal{F}_i,$$

où $\mathcal{F}(G,F)$ est un ensemble fini associé au couple (G,F). À chaque $i \in \mathcal{F}(G,F)$ est associé un sous-groupe F-stable A_i de $(Z(G)/Z(G)^\circ)^\wedge$. On a alors une bijection

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,A_i) \times (A_i^F)^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{F}_i \\ (\alpha,\xi) & \longmapsto & \chi_{i,\alpha,\xi}. \end{array}$$

Soit maintenant $\mathrm{FCar}(G)$ l'ensemble des faisceaux-caractères sur G. Alors $\mathrm{FCar}(G)^F$ se décompose en familles

$$\mathrm{FCar}(G)^F = \coprod_{i \in \mathcal{F}(G,F)} \mathcal{F}_i^\wedge.$$

De plus, pour tout i, on a une bijection

$$\begin{array}{ccc} H^1(F,A_i)^\wedge \times A_i^F & \longrightarrow & \mathcal{F}_i^\wedge \\ (\tau,a) & \longmapsto & K_{i,a,\tau}. \end{array}$$

Soit $\hat{\chi}_{i,a,\tau}$ la fonction caractéristique de $K_{i,a,\tau}$ (avec une normalisation explicite).

Théorème 1.3. *Supposons que toutes les composantes quasi-simples de G sont de type A, que $\delta = 1$ et que q soit assez grand. Soient $i \in \mathcal{F}(G,F)$ et $(\tau,a) \in H^1(F,A_i)^\wedge \times A_i^F$. Il existe une racine de l'unité explicitement déterminée ζ_a (ne dépendant que de $a \in (Z(G)/Z(G)^\circ)^\wedge$) telle que*

$$\hat{\chi}_{i,a,\tau} = \frac{\zeta_a}{|A_i^F|} \sum_{(\alpha,\xi) \in H^1(F,A_i) \times (A_i^F)^\wedge} \overline{\xi(a)\tau(\alpha)}\chi_{i,\alpha,\xi}.$$

Ce théorème offre donc un algorithme théorique pour calculer la table de caractères des groupes spéciaux linéaires ou unitaires. Je souhaiterais mettre en œuvre cet algorithme pour compléter la table de caractères de $SL(4,q)$: une partie en avait été donnée par G. Lehrer dans sa thèse [Le].

Remarque - T. Shoji a démontré, dans le cas du groupe spécial linéaire seulement mais sans hypothèse sur q un théorème équivalent à 1.3 mais avec un paramétrage *a priori* différent des caractères irréductibles. Ses familles sont les mêmes que les miennes et sont aussi paramétrées par le même ensemble, mais on ne sait pas faire le lien entre nos deux paramétrages. C'est certainement une question difficile que de les comparer. Une conséquence intéressante de son travail est la mise en évidence d'un lien entre les fonctions caractéristiques d'un faisceau-caractère et la descente de Shintani d'un caractère irréductible. □

Opérateur de torsion. Comme conséquence du théorème 1.3 (et de la description des fonctions $\hat{\chi}_{i,a,\tau}$ comme combinaisons linéaires d'induits de caractères semi-simples), on obtient que

$$\mathrm{Sh}_{F/F}\hat{\chi}_{i,a,\tau} = \tau(a)\hat{\chi}_{i,a,\tau},$$

où $\mathrm{Sh}_{F/F}$ est l'opérateur de torsion sur les fonctions centrales sur G^F. Ce résultat est valable sans hypothèse sur F, ce qui complète les résultats de [B6]. Il est à noter que les paramétrages des caractères irréductibles de G^F obtenus dans [B14] et dans [B6] sont a priori différents, bien que faisant intervenir les mêmes ensembles de paramètres. Il serait intéressant de relier ces deux paramétrages : cela permettrait de savoir si, lorsque $G^F = SL(n,q)$, les fonctions $\hat{\chi}_{i,a,\tau}$ sont les images par la descente de Shintani de caractères irréductibles de G^{F^d}, pour d suffisamment divisible.

1.C.3. Autres groupes. Au cours de la preuve du théorème 1.3, j'ai obtenu, pour un groupe G général, une description des fonctions caractéristiques de faisceaux-caractères F-stables dont le support rencontre la classe unipotente régulière comme transformée de Fourier de caractères semi-simples.

1.D. Groupes réductifs non connexes

Pour démontrer que la décomposition de Jordan des caractères irréductibles du groupe spécial linéaire était compatible avec l'induction de Deligne-Lusztig, j'avais été amené à paramétrer les caractères unipotents de produits en couronne de groupes linéaires. Ceci a été publié dans [B2] : j'ai apporté aussi dans cet article un résultat concernant le recollement d'extensions de caractères unipotents du groupe général linéaire données par la descente de Shintani.

J'ai étendu ces résultats à tous les caractères irréductibles de ces produits en couronne, obtenu une décomposition de Jordan dans ce cas particulier de groupe non connexe et généralisé le résultat sur la descente de Shintani à tous les caractères [B3], répondant ainsi à une question de P. Fong.

Encouragé par le fait que les résultats de ma thèse sur le groupe spécial linéaire se sont étendus à tous les groupes de type A, je souhaiterais en faire de même pour les produits en couronne de groupes de type A. Si cela fonctionne aussi bien, je pourrais obtenir que la décomposition de Jordan commute avec l'induction de Deligne-Lusztig.

2. Représentations modulaires

Dans cette partie, tous les résultats ont été obtenus en collaboration avec R. Rouquier. Il s'agit d'étudier les représentations des algèbres de groupe $\mathcal{O}G^F$ et kG^F.

L'induction et la restriction de Deligne-Lusztig sont les reflets, au niveau des groupes de Grothendieck, de véritables foncteurs entre les catégories dérivées de $\mathcal{O}L^F$ et $\mathcal{O}G^F$. Plus précisément, le complexe $R\Gamma_c(Y_{L,P},\mathcal{O})$ donnant la cohomologie à support compact de la variété de Deligne-Lusztig $Y_{L,P}$ est un complexe borné de $\mathcal{O}G^F$-modules-$\mathcal{O}L^F$ projectifs à droite et à gauche. On définit alors

$$\mathcal{R}_{L,P}^G : D^b(\mathcal{O}L^F) \longrightarrow D^b(\mathcal{O}G^F)$$

en tensorisant par ce complexe. On note

$${}^*\mathcal{R}_{L,P}^G : D^b(\mathcal{O}G^F) \longrightarrow D^b(\mathcal{O}L^F)$$

son adjoint. Ici, P est un sous-groupe parabolique de G dont L est un sous-groupe de Levi F-stable. Il est à noter que $\mathcal{R}_{L,P}^G$ dépend grandement du choix de P, alors que R_L^G ne devrait pas en dépendre (c'est le cas par exemple lorsque la formule de Mackey a lieu).

2.A. Décomposition de Jordan

Soit s un élément semi-simple de G^{*F^*} d'ordre premier à ℓ. Notons e_s^G l'idempotent central de $\mathcal{O}G^F$ associé à s par Broué et Michel [BrMi]. Avec R. Rouquier, nous avons montré le théorème suivant [BR, théorème B'], répondant ainsi à une conjecture de M. Broué [Br].

Théorème 2.1. *Soit L un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique P de G. On suppose que $C_{G*}(s) \subset L^*$. Alors $\mathcal{R}_{L,P}^G$ induit une équivalence de Morita entre $\mathcal{O}L^F e_s^L$ et $\mathcal{O}G^F e_s^G$. Plus précisément, le complexe $R\Gamma_c(Y_{L,P},\mathcal{O})e_s^L$ est concentré en degré $d = \dim Y_{L,P}$ et le bimodule $R^d\Gamma_c(Y_{L,P},\mathcal{O})e_s^L$ réalise cette équivalence.*

Nous espérons généraliser ce résultat au cas ou seulement la composante neutre de $C_{G^*}(s)$ est contenue dans L^*. Pour cela, il faut pouvoir étendre l'action de L^F sur $R\Gamma_c(Y_{L,P},\mathcal{O})$ à un sous-groupe de G^F très légèrement plus grand que L^F. Une fois cette action étendue, la preuve n'a aucun mal à se généraliser. Quelques calculs dans le groupe spécial linéaire incitent à l'optimisme.

2.B. Engendrement de la catégorie dérivée

Au cours de la démonstration du théorème 2.1, nous avions obtenu que la catégorie des objets parfaits de $D^b(\mathcal{O}G^F)$ est engendrée par les complexes $\mathcal{R}_{T,B}\mathcal{O}T^F$, lorsque T parcourt l'ensemble des tores maximaux F-stables de G. Nous avons précisé ce résultat :

Théorème 2.2. *Les familles de complexes $(k\mathcal{R}_{T,B}^G S)_{T,S}$ et $(\mathrm{Ind}_{T^F}^{G^F} S)_{T,S}$ engendrent les mêmes sous-catégories de $D^b(kG^F)$. Ici, T parcours l'ensemble des tores maximaux F-stables de G et S parcourt l'ensemble des kT^F-modules simples.*

Corollaire 2.3. *Si tout ℓ-sous-groupe abélien élémentaire de G^F est contenu dans un tore maximal, alors $(\mathcal{R}_{T,B}^G S)_{T,S}$ engendre $D^b(kG^F)$.*

Remarque - L'hypothèse sur les ℓ-sous-groupes abéliens élémentaires de G^F est très souvent vérifiée (par exemple, lorsque ℓ est très bon pour G). $\square$

2.C. Représentations de Gelfand-Graev

Dans le chapitre I, on a vu le rôle crucial joué par les caractères de Gelfand-Graev dans la solution de la conjecture de Lusztig pour les groupes de type A. Nous nous intéressons à la version modulaire des questions abordées précédemment.

2.C.1. Une conjecture. Soit U le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel F-stable de G. Soit $\psi : U^F \to \mathcal{O}^\times$ un caractère linéaire. On note $\mathcal{O}_\psi$ le $\mathcal{O}U^F$-module dont le $\mathcal{O}$-module sous-jacent est $\mathcal{O}$ et sur lequel U^F agit via ψ. On pose

$$\Gamma_\psi^G = \mathrm{Ind}_{U^F}^{G^F} \mathcal{O}_\psi.$$

Puisque $|U^F|$ est inversible dans $\mathcal{O}$ (c'est une puissance de p), Γ_ψ^G est un $\mathcal{O}G^F$-module projectif.

Lorsque ψ est un caractère *régulier* de U^F, Γ_ψ est appelé un *module de Gelfand-Graev* de G^F (le caractère de $K\Gamma_\psi$ est un caractère de Gelfand-Graev). Le théorème 1.2 doit avoir un sens au niveau des modules.

> **Conjecture 1.** *Si ψ est un caractère régulier de U^F et si U_L est le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel F-stable d'un sous-groupe de Levi F-stable L d'un sous-groupe parabolique P de G, alors il existe un caractère linéaire régulier ψ_L de U_L^F tel que*
>
> $$^*\mathcal{R}_{L,P}^G \Gamma_\psi^G = \Gamma_{\psi_L}^L[-\dim Y_{L,P}].$$

Si P est F-stable, alors la conjecture 1 est vraie [DLM1]. Cette conjecture est aussi rendue plausible par le fait que le caractère de Steinberg (qui est une composante irréductible de tout caractère de Gelfand-Graev) apparaît uniquement en degré moitié dans la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig associées à un tore [DMR]. Un autre indice favorable est le théorème 2.4 ci-dessous.

2.C.2. Un théorème. La conjecture 1 semble pour l'instant hors de portée en général : en effet, elle est équivalente à l'étude de la cohomologie d'un faisceau constructible défini par le caractère ψ de U^F sur le quotient $U^F\backslash Y_{L,P}^G$. Cependant, lorsque L est un tore nous avons bon espoir d'arriver à une solution. Pour l'instant, nous ne sommes capables de répondre positivement que dans le cas suivant :

Théorème 2.4. *Soit ψ est un caractère régulier de U^F. Soit T un tore maximal F-stable d'un sous-groupe de Borel B de G. On suppose que $F(B) = wBw^{-1}$, où $w \in N_G(T)/T$ est un produit de réflexions simples (relativement à B) appartenant à des $w^{-1}F$-orbites différentes. Alors*

$$^*\mathcal{R}_{T,B}^G \Gamma_\psi^G = \mathcal{O}T^F[-\dim Y_{T,B}].$$

La preuve de ce théorème repose sur la description explicite de la variété $U^F\backslash Y_{T,B}^G$ donnée par Lusztig [Lu1]. Notons que ce théorème répond bien à un cas particulier de la conjecture 1 car $\mathcal{O}T^F$ est bien un module (le seul) de Gelfand-Graev de T^F.

2.C.3. Une application possible. Soit ψ un caractère régulier de U^F. Si la conjecture 1 a lieu, alors, par fonctorialité, on obtient un morphisme d'algèbres $f_L^G : \mathcal{H}_\psi^G \to \mathcal{H}_{\psi_L}^L$, où $\mathcal{H}_\psi^G$ est l'algèbre d'endomorphismes du $\mathcal{O}G^F$-module Γ_ψ^G.

Cette construction, si elle est valide, fournit une construction fonctorielle d'un homomorphisme construit par Curtis (au niveau du corps K) :

Proposition 2.5. *Si L est un tore, alors $\mathcal{H}_{\psi_L} = \mathcal{O}L^F$ et l'extension des scalaires de $\mathcal{O}$ à K de l'homomorphisme f_L^G coïncide avec l'homorphisme de Curtis* [Cu].

Le caractère fonctoriel de notre construction permet d'obtenir des résultats nouveaux (et faciles) sur les homomorphismes de Curtis. Par exemple, la transitivité des foncteurs de Deligne-Lusztig implique que :

Proposition 2.6. *Si $L \subset M$ sont des sous-groupes de Levi F-stables de G et si la conjecture 1 a lieu, alors*

$$f_L^G = f_L^M \circ f_M^G.$$

Exemple - Si M est un sous-groupe de Levi F-stable d'un sous-groupe parabolique F-stable et si L est un tore maximal de M du type décrit dans le théorème 2.4, alors la proposition 2.6 s'applique. □

Remarque - Nous avons, pour alléger les notations, oublié volontairement le sous-groupe parabolique impliqué dans la définition de la restriction de Deligne-Lusztig. Il faudrait le mentionner mais, rendus optimistes par le cas des tores, nous pensons que le morphisme d'algèbres f_L^G n'en dépend pas. □

2.C.4. Une application certaine. Supposons ici que $G = GL_n(\mathbb{F})$, que $F : G \to G$ est l'endomorphisme de Frobenius déployé naturel sur $\mathbb{F}_q$ et que n soit l'ordre de q modulo ℓ. Soit S un ℓ-sous-groupe de Sylow de G^F et soit $T = C_G(S)$. Alors S est cyclique, T est un tore maximal de G et $N_{G^F}(S) = N_{G^F}(T)$. Notons e_ℓ la somme des idempotents primitifs centraux e de $\mathcal{O}G^F$ tels que KG^Fe ne soit pas une algèbre simple. Soit B un sous-groupe de Borel de G contenant T et vérifiant les conditions du théorème 2.4 (il en existe : $F(B) = wBw^{-1}$ où w est un élément de Coxeter standard de $N_G(T)/T$). En utilisant une version légèrement améliorée du théorème 2.4 (à savoir le calcul du complexe ${}^*\mathcal{R}_{T,B}^G \Gamma_\psi^G$ pour un ψ général) et le fait que $\oplus_{\psi \in (U^F)^\wedge} \Gamma_\psi^G$ est un progénérateur de la catégorie $\mathcal{O}G^F$-mod, on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.7. *Le complexe $e_\ell R\Gamma_c(Y_{T,B}^G, \mathcal{O})$ est un complexe de $\mathcal{O}G^F e_\ell$-modules-$\mathcal{O}N_{G^F}(T)$ induisant une équivalence de catégories triangulées entre les catégories dérivées $D^b(\mathcal{O}G^F e_\ell)$ et $D^b(\mathcal{O}N_{G^F}(T))$.*

Remarque - Au premier abord, ce résultat peut paraître décevant. En effet, S étant cyclique, l'existence d'une équivalence de catégories dérivées $D^b(\mathcal{O}G^F e_\ell) \simeq D^b(\mathcal{O}N_{G^F}(T))$ est connue depuis longtemps par des arguments de théorie des groupes finis abstraits. D'autre part, sans hypothèse sur ℓ, R. Rouquier et J. Chuang ont montré la conjecture du défaut abélien de Broué pour $GL(n, q)$ par des méthodes purement algébriques.

Cependant, il faut premièrement remarquer que l'équivalence du théorème 2.7 est différente de celle donnée par Rouquier. Mieux, c'est la première fois que l'approche géométrique de la conjecture du défaut abélien pour les groupes réductifs finis, qui avait été suggérée par Broué, permet de conclure dans une infinité de cas, avec des variétés de dimension quelconque. Jusqu'ici, seul le cas des courbes avait été résolu (par R. Rouquier [R]). □

3. **Groupes de réflexions**

Les groupes de Weyl (ou groupes de réflexions rationnels) finis sont les squelettes des groupes réductifs. Il est donc nécessaire d'étudier les groupes de réflexions pour eux-mêmes, sans se restreindre au groupes de Weyl. En effet, certains groupes de réflexions complexes interviennent dans la version géométrique de la conjecture du défaut abélien : ce sont des centralisateurs d'éléments *réguliers* de groupes de Weyl.

3.A. Quotients

Avec D. Bessis et R. Rouquier [BBR], après avoir remarqué que, comme groupes abstraits, certains groupes de réflexions avaient des quotients isomorphes à des groupes de réflexions, nous avons été conduits à considérer la question suivante. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, soit W un sous-groupe fini de $GL_{\mathbb{C}}(V)$ engendré par des réflexions et soit H un sous-groupe distingué de W. Est-ce que W/H est un groupe de réflexions sur l'espace tangent $T_0(V/H)$ à la variété V/H en 0 ? La réponse est non en général mais nous avons obtenu une caractérisation du "oui" :

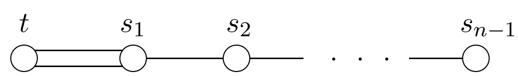
Théorème 3.1. *Voyons V/H comme une sous-variété fermée W-stable de $T_0(V/H)$, notons A l'algèbre symétrique $S(T_0(V/H))$ et I l'idéal définissant V/H. Soit A_+ l'idéal maximal homogène de A. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(1) *W/H est un groupe de réflexions sur $T_0(V/H)$.*
(2) *V/H est une variété d'intersection complète et W agit trivialement sur I/A_+I.*

Lorsque ces assertions sont satisfaites, nous avons relié les propriétés des groupes W et W/H (degrés, réflexions, arrangements d'hyperplans, degrés fantômes, éléments réguliers, présentations...). Nous avons aussi obtenu une classification des paires (W,H) pour lesquelles ces assertions sont vérifiées.

3.B. Théorie de Kazhdan-Lusztig

Soit (W,S) un *groupe de Coxeter* (c'est-à-dire un groupe de réflexions réel agissant proprement). Certaines déformations de l'algèbre de groupe de W (*algèbres de Hecke*) apparaissent naturellement comme algèbres d'endomorphismes de représentations de groupes réductifs finis. L'étude de leurs représentations a explosé en 1979 après l'article de Kazhdan et Lusztig [KaLu] dans lequel était introduite une nouvelle base de ces algèbres (appelée depuis *base de Kazhdan-Lusztig*) permettant d'en construire des représentations. Cet article se plaçait dans le cas des paramètres égaux, mais en 1983, Lusztig généralisait les constructions au cas des paramètres inégaux [Lu2]. Récemment, Lusztig a relancé la théorie des algèbres de Hecke à paramètres inégaux [Lu7] et proposé une série de conjectures permettant de généraliser à ce cas des constructions faites dans le cas des paramètres égaux (*algèbre asymptotique* par exemple...). Dans le cas des paramètres égaux, la validité de ces conjectures repose sur les propriétés géométriques des groupes réductifs. En ce moment, Lusztig est en train de proposer une approche géométrique permettant de traiter le cas des paramètres inégaux lorsque W est fini (faisceaux-caractères *paraboliques*) : il a publié une dizaine d'articles en deux ans reliés à ce sujet et il n'est pas de ma compétence d'espérer le concurrencer sur ce sujet. En revanche, une des questions que ne devrait pas résoudre sa théorie géométrique est la détermination combinatoire de la partition en cellules de W : j'ai déjà étudié le problème avec L. Iancu dans le cas des groupes de type B_n pour un choix très particulier de paramètres (cas *asymptotique*). Actuellement, avec M. Geck, L. Iancu et T. Lam, nous avons une conjecture très précise sur la forme que doit prendre les cellules pour n'importe quel choix de paramètres en type B. Il est à noter que le cas du groupe F_4 a été totalement résolu par M. Geck [Ge] (en utilisant entre autres des programmes `GAP`).

3.B.1. Choix de paramètres. Soit λ un nombre réel strictement positif. Soit n un entier naturel non nul. Soit W_n le groupe de Weyl de type B_n, de diagramme de Dynkin



Notons $L_\lambda : W_n \to \mathbb{R}$ la *fonction de poids* telle que $L_\lambda(t) = \lambda$ et $L_\lambda(s_i) = 1$ si $1 \leqslant i \leqslant n-1$. Notons $\mathcal{L}_\lambda(W_n)$ la partition de W en *cellules à gauche* associée à la fonction de poids L_λ.

3.B.2. Insertion de dominos. Si $i \in \mathbb{N}$, on note δ_i le 2-cœur $(i, i-1, \ldots, 2, 1)$. Si $w \in W_n$, on note $(\mathbf{P}_i(w), \mathbf{Q}_i(w))$ les tableaux obtenus par l'algorithme d'insertion des dominos (voir par exemple [La]) à partir du 2-cœur δ_i. On note $\sim_i$ la relation d'équivalence sur W_n donnée par $w \sim_i w'$ si et seulement si $\mathbf{Q}_i(w) = \mathbf{Q}_i(w')$. M. Geck, L. Iancu, T. Lam et moi-même conjecturons que les classes d'équivalence pour cette relation correspondent aux cellules à gauche pour certains choix de λ de la façon suivante :

> **Conjecture 2 :** *Soit $i \in \mathbb{N}$. Alors :*
> (1) *Si $i < \lambda < i+1$, alors $\mathcal{L}_\lambda(W_n)$ est la partition de W_n en classes d'équivalences pour la relation $\sim_i$.*
> (2) *Si $i \geqslant 1$, alors $\mathcal{L}_i(W_n)$ est la partition la plus fine telle que les partitions $\mathcal{L}_{i-\frac{1}{2}}$ et $\mathcal{L}_{i+\frac{1}{2}}(W_n)$ soient plus fines que $\mathcal{L}_i(W_n)$.*

Nous avons vérifié cette conjecture pour $n \leqslant 6$ grâce au programme `coxeter` développé par F. Ducloux et grâce à `GAP`. D'autre part, elle est compatible avec d'autres conjectures de Lusztig sur les représentations unipotentes du groupe unitaire sur un corps fini. De plus, l'analogue du (2) de la conjecture 2 pour le groupe F_4 a été vérifié par M. Geck [Ge].

Il serait intéressant d'avoir une preuve *a priori* de l'assertion (2) de la conjecture 2 (notamment, est-ce encore vrai pour les groupes de Coxeter infinis ?). L'interprétation de cet énoncé en termes de théorie des représentations est pour nous totalement mystérieuse.

3.B.3. Cas asymptotique. Avec L. Iancu nous avions étudié le cas où $\lambda >> 0$ (cas *asymptotique*) et montré que la conjecture 2 (1) a alors lieu [BI]. Nous avons aussi déterminé le caractère (irréductible) associé à chaque représentation cellulaire.

Nous avons aussi poursuivi l'étude de ce cas avec M. Geck. J'ai de mon côté obtenu une description des cellules bilatères ainsi que la description de l'ordre $\leqslant_{LR}$ à t-longueur constante [B12]. J'ai d'autre part montré qu'une partie de ces résultats (description des cellules à gauche et des cellules bilatères) restait valide lorsque $\lambda > n-1$: en fait, si $n-1 < \lambda \leqslant \mu$, alors $\mathcal{L}_\lambda(W_n) = \mathcal{L}_\mu(W_n)$. Cela montre la conjecture 2 (1) pour $i \geqslant n-1$.

En utilisant la description de l'ordre $\leqslant_{LR}$ à t-longueur constante, M. Geck et L. Iancu ont calculé la fonction $\mathbf{a}$ en développant la théorie des *représentations orthogonales* et ainsi obtenu que les conjectures de Lusztig P_i (voir [Lu2, chapitre 14]) étaient valides pour $i \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,13,14\}$ (voir [GI]).

3.C. Algèbres de Solomon

Si (W,S) est un groupe de Coxeter fini, L. Solomon a introduit une sous-algèbre particulière $\Sigma(W)$ de $\mathbb{Z}W$ appelée *algèbre de descentes* ou *algèbre de Solomon*. Cette sous-algèbre unitaire est équipée d'un morphisme d'algèbres $\theta : \Sigma(W) \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr} W$ dont le noyau est l'ensemble des éléments nilpotents de $\Sigma(W)$. En particulier, $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}\theta$ est le radical de $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma(W)$.

Lorsque W est de type A, cette algèbre est reliée à l'étude des représentations du groupe linéaire sur l'algèbre de Lie libre sur sa représentation naturelle et de plus θ est surjectif. Cependant, c'est le seul cas où θ est surjectif.

3.C.1. Une suralgèbre de $\boldsymbol{\Sigma(W)}$. Lorsque W est de type B_n, inspirés par les résultats que j'avais obtenus avec L. Iancu sur les cellules dans le cas asymptotique, C. Hohlweg et moi avons construit une sous-algèbre $\Sigma'(W)$ de $\mathbb{Z}W$ contenant $\Sigma(W)$ ainsi qu'un morphisme d'algèbres $\theta' : \Sigma'(W) \to \mathbb{Z}\operatorname{Irr} W$ étendant θ.

Théorème 3.2. *Si W est de type B_n, alors :*
(a) *θ' est surjectif.*
(b) *$\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{Ker}\theta'$ est le radical de $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma'(W)$.*

En utilisant ce théorème, en mimant ce qui se fait avec le groupe symétrique et en utilisant les cellules de Kazhdan-Lusztig de W dans le cas asymptotique, nous avons obtenu une nouvelle construction des caractères irréductibles de W.

3.C.2. Aspects numériques. J'ai aussi développé des programmes `GAP` permettant de calculer avec les algèbres de Solomon (ainsi qu'avec la généralisation $\Sigma'(W)$). Pour les groupes exceptionnels de type E_6, E_7, G_2, F_4, H_3 et H_4, j'ai obtenu la matrice de Cartan complète de $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} \Sigma(W)$ ainsi que d'autres résultats comme la longueur de Loewy, une famille d'idempotents orthogonaux, la dimension du centre...

3.D. G_{31}

À partir du morphisme surjectif exceptionnel $\mathbf{SL}_4(\mathbb{C}) \to \mathbf{SO}_6(\mathbb{C})$ (via l'action sur la puissance extérieure deuxième), j'ai obtenu [B7] une (nouvelle ?) construction du groupe de réflexions complexe de rang 4 noté G_{31} dans la classification de Shephard et Todd. Cela explique par exemple pourquoi le quotient du groupe dérivé de G_{31} par $\{1, -1\}$ est isomorphe au groupe dérivé du groupe de Weyl de type D_6.

4. Classes de conjugaison des groupes réductifs

4.A. Éléments unipotents

J'ai beaucoup étudié les éléments unipotents réguliers dans le but de montrer la conjecture de Lusztig pour les groupes de type A. J'ai notamment obtenu une description du centralisateur d'un tel élément (et de son groupe de Weyl) en termes du diagramme de Dynkin pondéré associé à cet élément unipotent valable en toute caractéristique [B9]. Cela m'a permis de montrer des résultats annoncés dans [B4] qui sont nécessaires pour démontrer le théorème 1.2.

Concernant les centralisateurs d'éléments unipotents quelconques, j'ai montré dans un grand nombre de cas que le centralisateur d'un élément unipotent induit à partir d'un sous-groupe de Levi d'un autre élément unipotent était contenu dans le sous-groupe parabolique utilisé pour le procédé d'induction [B10]. Ce résultat a été appliqué à la théorie des faisceaux-caractères dans [B8, partie I].

4.B. Éléments semi-simples

Soit G un groupe réductif connexe et soit s un élément semi-simple de G. L'élément s est dit *isolé* (respectivement *quasi-isolé*) si $C_G^\circ(s)$ (respectivement $C_G(s)$) n'est contenu dans aucun sous-groupe de Levi d'un sous-groupe parabolique propre de G.

La classification des classes de conjugaison semi-simples isolées en termes du diagramme de Dynkin affine est connue depuis longtemps. Au cas par cas, la classification des classes de conjugaison semi-simples quasi-isolées était aussi connue. J'ai trouvé une classification de ces dernières uniquement en termes du diagramme de Dynkin affine de G et de l'action de son stabilisateur dans le groupe de Weyl [B11].

Donnons-en un énoncé précis dans le cas où G est adjoint et quasi-simple. Soit T un tore maximal de G. Notons Δ le diagramme de Dynkin de G et $\tilde{\Delta}$ son diagramme de Dynkin affine. Soit W le groupe de Weyl de G et posons $A = \{w \in W \mid w(\tilde{\Delta}) = \tilde{\Delta}\}$. Si $\alpha \in \Delta$, notons $\varpi_\alpha^\vee \in Y(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ le (co-)poids fondamental associé (ici, $Y(T)$ désigne le réseau des co-caractères de T) et n_α le coefficient de α dans la plus grande racine. Notons $\tilde{\Delta} \setminus \Delta = \{-\tilde{\alpha}\}$ et posons $\varpi_{-\tilde{\alpha}}^\vee = 0$ et $n_{-\tilde{\alpha}} = 1$. Pour finir, on fixe un isomorphisme $\imath : (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{p'} \to \mathbb{F}^\times$ et on note $\tilde{\imath}_T : Y(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \to T$ l'application induite par $\imath$.

Si $I \subset \tilde{\Delta}$, on pose

$$\omega_I^\vee = \frac{1}{|I|} \sum_{\alpha \in I} \varpi_\alpha^\vee / n_\alpha.$$

Théorème 4.1. *Supposons G adjoint et quasi-simple. Notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des parties I de $\tilde{\Delta}$ telles que le stabilisateur de I dans A agisse transitivement sur I. Notons $\mathcal{Q}_{p'}$ l'ensemble des $I \in \mathcal{Q}$ telles que $\varpi_I^\vee$ soit d'ordre premier à p dans $Y(T) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. Alors A agit sur $\mathcal{Q}_{p'}$ et l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}_{p'} & \longrightarrow & G \\ I & \longmapsto & \tilde{\imath}_T(\varpi_I^\vee) \end{array}$$

induit une bijection entre $\mathcal{Q}_{p'}/A$ et l'ensemble des classes de conjugaison semi-simples quasi-isolés de G.

Références

[BBR] D. Bessis, C. Bonnafé & R. Rouquier, *Quotients et extensions de groupes de réflexion*, Math. Ann. **323** (2002), 405-436.

[B1] C. Bonnafé, *Formule de Mackey pour q grand*, J. Algebra **201** (1998), 207-232.

[B2] C. Bonnafé, *Produit en couronne de groupes linéaires*, J. Algebra **211** (1999), 57-98.

[B3] C. Bonnafé, *On a theorem of Shintani*, J. Algebra **218** (1999), 229-245.

[B4] C. Bonnafé, *Regular unipotent elements*, C.R. Acad. Sci. Paris **328** (1999), 275-280.

[B5] C. Bonnafé, *Mackey formula in type A*, Proc. London Math. Soc. **80** (2000), 545-574.

[B6] C. Bonnafé, *Opérateurs de torsion dans* $\mathbf{SL}_n(\mathbb{F}_q)$ *et* $\mathbf{SU}_n(\mathbb{F}_q)$, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), 309-345.

[B7] C. Bonnafé, *Une (nouvelle ?) construction du groupe de réflexions complexe* G_{31}, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie **93** (2003), 133-143.

[B8] C. Bonnafé, *Actions of relative Weyl groups I*, J. Group Theory **7** (2004), 1-37 ; *Actions of relative Weyl groups II*, à paraître dans le J. Group Theory.

[B9] C. Bonnafé, *Éléments unipotents réguliers des sous-groupes de Levi*, Canad. J. Math. **56** (2004), 246-276.

[B10] C. Bonnafé, *A note on centralizers of unipotent elements*, Ital. J. Pure and Applied Math. **16** (2004), 163-171.

[B11] C. Bonnafé, *Quasi-isolated elements in reductive groups*, à paraître dans Comm. in Algebra.

[B12] C. Bonnafé, *Two-sided cells in type B (asymptotic case)*, `math.RT/0502086`.

[B13] C. Bonnafé, *Mackey formula for Lusztig induction and restriction*, en préparation.

[B14] C. Bonnafé, *Sur les caractères des groupes réductifs finis à centre non connexe : applications aux groupes spéciaux linéaires et unitaires*, `math.RT/0504078`.

[BI] C. Bonnafé & L. Iancu, *Left cells in type* B_n *with unequal parameters*, Repres. Theory **7** (2003), 587-609.

[BR] C. Bonnafé & R. Rouquier, *Catégories dérivées et variétés de Deligne-Lusztig*, Publ. Math. I.H.E.S. **97** (2003), 1-59.

[Br] M. Broué, *Isométries de caractères et équivalences de Morita ou dérivées*, Publ. Math. I.H.E.S. **71** (1990), 45-63.

[BrMi] M. Broué & J. Michel, *Blocs et séries de Lusztig dans un groupe réductif fini*, J. Reine Angew. Math. **395** (1989), 56-67.

[Cu] C.W. Curtis, *On the Gelfand-Graev representations of a reductive group over a finite field*, J. Alg. **157** (1993), 517-533.

[DeLu] P. Deligne & G. Lusztig, *Representations of reductive groups over finite fields*, Ann. of Math. **103** (1976), 103-161.

[DLM1] F. Digne, G.I. Lehrer & J. Michel, *The characters of the group of rational points of a reductive group with non-connected centre*, J. Reine Angew. Math. **425** (1992), 155-192.

[DLM2] F. Digne, G.I. Lehrer & J. Michel, *On Gelfand-Graev characters of reductive groups with non-connected centre*, J. Reine Angew. Math. **491** (1997), 131-147.

[DMR] F. Digne, J. Michel & R. Rouquier, *Cohomologie de certaines variétés de Deligne-Lusztig attachées à des éléments réguliers*, `math.RT/0410454`.

[Ge] M. Geck, *Computing Kazhdan-Lusztig cells for unequal parameters*, J. Algebra **281** (2004), 342–365.

[GI] M. Geck & L. Iancu, *Lusztig's* $\mathbf{a}$*-function in type* B_n *(asyptotic case)*, preprint (2005).

[KaLu] D. Kazhdan & G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 165-184.

[La] T. Lam, *Growth diagrams, domino insertion and sign-imbalance*, J. Combin. Theory **107** (2004), 87-115.

[Le] G.I. Lehrer, *On the discrete series characters of linear groups*, Ph.D. Thesis, University of Warwick (1971).

[Lu1] G. Lusztig, *Coxeter orbits and eigenspaces of Frobenius*, Invent. Math. **38** (1976), 101-159.

[Lu2] G. Lusztig, *Left cells in Weyl groups*, Lie group representations, I (College Park, Md., 1982/1983), 99–111, Lecture Notes in Math. **1024**.

[Lu3] G. Lusztig, *Intersection cohomology complexes on a reductive group*, Invent. Math. **75** (1984), 205-272.

[Lu4] G. Lusztig, *Character sheaves I*, Adv. in Math. **56** (1985), 193-237 ; *Character sheaves II*, Adv. in Math. **57** (1985), 226-265 ; *Character sheaves III*, Adv. in Math. **57** (1985), 266-315 ; *Character sheaves IV*, Adv. in Math. **59** (1986), 1-63 ; *Character sheaves V*, Adv. in Math. **61** (1986), 103-155.

[Lu5] G. Lusztig, *On the character values of finite Chevalley groups at unipotent elements*, J. of Alg. **104** (1986), 146-194.

[Lu6] G. Lusztig, *Green functions and character sheaves*, Annals of Math. **131** (1990), 355-408.

[Lu7] G. Lusztig, *Hecke Algebras with unequal parameters*, CRM lectures 2002.

[R] R. Rouquier, *Complexes de chaînes étales et courbes de Deligne-Lusztig*, J. Algebra **257** (2002), 482-508.