INTRODUCTION AUX ESPACES DE TEICHMÜLLER

Stéphane Baseilhac

Notes du cours de formation doctorale et Master II Mathématiques Fondamentales
Grenoble (2005-2006)

Dans ce cours (20 heures) on construit les coordonnées de Fenchel-Nielsen de l'espace de Teichmüller hyperbolique d'une surface S, que nous suposerons compacte et sans bord pour simplifier. On montre que ces coordonnées sont analytiques réelles, et on en déduit le plongement de Fricke-Kein. Comme applications principales on détermine les compacts de l'espace de Teichmüller de S, on montre que l'action du groupe modulaire est proprement discontinue, on définit l'espace (quotient) des modules, et on prouve le théorème de précompacité de Mumford.

Les résultats prouvés sont numérotés, les objets définis dans le cours sont écrits en italique à leur première mention.

Sommaire

1. L'espace hyperbolique de dimension deux

Dans cette section on prouve quelques propriétés de deux modèles de l'espace hyperbolique de dimension deux, le modèle du disque et celui du demi-plan. Ces propriétés décrivent la géométrie hyperbolique de manière essentiellement exhaustive, sauf pour ce qui concerne la convexité de la fonction distance hyperbolique et sa courbure, abordées dans les sections 4.3 et 2.3 respectivement. La nature "hyperbolique" de ces modèles est expliquée dans la Remarque 1.10, 2). Deux rérérences générales sont [BP, Ch. A] et [T, Ch. 2].

La *mesure des angles* détermine complètement la géométrie de l'espace hyperbolique (cf. Remarque 1.10.1)). Cette affirmation repose essentiellement sur les deux résultats classiques suivants (le second étant une application directe du premier). On note $D = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$, et $\mathrm{Aut}(D)$ le groupe des biholomorphismes de D.

1. Principe du maximum : Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$, $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe d'extension continue sur $K = \bar{\Omega}$. Alors pour tout $z \in \Omega$ on a $|f(z)| \leq \sup_{z\in\partial K}|f(z)|$, avec égalité en un point ssi f est constante.

2. Lemme de Schwartz : Soit $f : D \to D$ holomorphe telle que $f(0) = 0$. Alors : (i) $|f(z)| \leq |z|$, et (ii) $|f'(0)| \leq 1$. Si on a égalité dans (i) pour $z \in D \setminus \{0\}$ ou dans (ii), alors f est une rotation : $f(z) = \lambda z$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$.

On déduit du lemme de Schwartz une description simple de $\mathrm{Aut}(D)$ (qui peut être ainsi être identifié avec le groupe $PSU(1,1) = \{z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, |a|^2 - |b|^2 = 1\}$) :

Théorème 1.1. *On a Aut(D)* $= \{z \mapsto e^{i\theta}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}, \theta \in \mathbb{R}, \alpha \in D\}$.

Un problème d'extremum (sans hypothèse de régularité au bord !) caractérise également $\mathrm{Aut}(D)$:

Proposition 1.2. *Toute* $f : D \to D$ *holomorphe vérifie* $\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$, *avec égalité ssi* $f \in$ *Aut(D).*

On définit une *métrique riemanienne* (cf. [BG] ou [GHL]) sur D via la forme quadratique $ds_z^2 : T_zD \to \mathbb{R}_+$ donnée par

$$ds_z^2 = \frac{4|dz|^2}{(1-|z|^2)^2}.$$

Pour tout chemin continu $\gamma : [0,1] \to D$ on pose

$$l(\gamma) = \int_\gamma \frac{2|dz|}{(1-|z|^2)}.$$

Pour tous $x, y \in D$, la distance *hyperbolique* sur D est définie par $d(x,y) = \inf_{\gamma \in C_{x,y}}\{l(\gamma)\}$, où $C_{x,y}$ désigne l'ensemble des chemins joignant x à y.

La proposition 1.2 montre que si $f \in \mathrm{Aut}(D)$, alors $f^*ds^2 = ds^2$ (c'est-à-dire pour tout $z \in D$, $v \in T_zD$ on a $ds_z^2(v) = ds_{f(z)}^2(df_z(v)))$. Donc $\mathrm{Aut}(D)$ coincide avec le groupe des *isométries* $\mathrm{I}^+(\mathbb{D})$ de *l'espace hyperbolique* $\mathbb{D} = (D, ds^2)$ qui préservent l'orientation naturelle donnée par la structure complexe.

Pour étudier le groupe $\mathrm{I}^+(\mathbb{D})$, on est amener à le factoriser en transformations élémentaires, qui font apparaître les ensembles possibles de points fixes. (Penser à la décomposition du groupe orthogonal en produit de réflexions). Pour tous $x \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha > 0$, l'*inversion* $i_{x_0,\alpha}$ par rapport au cercle $S(x_0, \alpha)$ de centre x_0 et de rayon $\sqrt{\alpha}$ (dit *de réflexion*) est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$ par

$$i_{x_0,\alpha} : x \mapsto \alpha\frac{x - x_0}{||x - x_0||^2} + x_0$$

et s'étend à $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ en échangeant x_0 et ∞. Modulo une dilatation, la translation par le vecteur $x - x_0$ conjugue $i_{x_0,\alpha}$ à $i_{0,1}$. Cette inversion envoie simplement $P \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sur le point P' tel que $OP.OP' = 1$. On vérifie (par exemple par calculs directs dans les quatre cas où x_0 et ∞ sont contenus ou pas dans $S(x_0, \alpha)$) le résultat suivant :

Proposition 1.3. *Les inversions sont des involutions lisses, et leur restriction au cercle de réflexion est l'identité. De plus on a*

1. *Les inversions préservent les angles (ce sont des applications conformes) et elles renversent l'orientation.*
2. *Le cercle* $S(x_0, \alpha)$ *est* $i_{x_1,\beta}$*-invariant ssi* $||x_1 - x_0||^2 = \alpha + \beta$, *ssi* $S(x_0, \alpha)$ *et* $S(x_1, \beta)$ *sont orthogonaux en leurs points d'intersection (non vides).*
3. *Les inversions (vues comme applications de* S^2*) agissent bijectivement sur l'ensemble des cercles de* S^2*, et sur l'ensemble des boules ouvertes de* S^2*.*

En particulier, les inversions dont le cercle de réflexion est orthogonal au cercle unité $S^1 = \partial\bar{D}$ préservent $\bar{D}^2$. Par réduction des fractions rationelles on obtient facilement (c'est la version en dimension deux d'un théorème de Liouville, qui décrit les diffeomorphismes conformes entre domaines de $\mathbb{R}^n$) :

Proposition 1.4. *On a Aut(D)* $\cup$ *c(Aut(D))* $= \{x \mapsto Ai(x), A \in O(2), i = id$ ou inversion $\perp S^1\}$, *où c désigne la conjugaison complexe.*

Le groupe c(Aut(D)) coincide avec les anti-biholomorphismes de D (qui renversent l'orientation), donc Aut(D) $\cup$ c(Aut(D)) $=$ I($\mathbb{D}$) (le groupe formé par *toutes* les isométries de $\mathbb{D}$)).

Pout tous z_0, $z_1 \in D$ on appelle *géodésique* de z_0 à z_1 une courbe $\gamma : [0,1] \to D$ continue (ou rectifiable) telle que $\gamma(0) = z_0$, $\gamma(1) = z_1$ et qui réalise la distance hyperbolique entre z_0 et z_1 : $d(z_0, z_1) = l(\gamma)$.

Corollaire 1.5. *Pour tous z_0, $z_1 \in D$ il existe une géodésique joingnant z_0 à z_1. Cette géodésique est unique : c'est le sous-arc du cercle ou du segment passant par z_0 et z_1 et orthogonal à S^1.*

Dans la suite, on appelle géodésique tout arc de cercle formé par la trace dans $\mathbb{D}$ d'un cercle de S^2 orthogonal à $S^1 = \partial\bar{D}$. On a :

Corollaire 1.6. *Le groupe I($\mathbb{D}$) agit transitivement sur $\mathbb{D}$ et pour tout point z de $\mathbb{D}$ le stabilisateur $I_z(\mathbb{D}) = \{g \in \mathrm{I}(\mathbb{D}), gz = z\}$ est isomorphe à $O(2)$. Donc en notant*

$$U\mathbb{D} = \{(x,v) \mid x \in \mathbb{D}, v \in T_x\mathbb{D}, ds_x^2(v) = 1\},$$

l'action $\mathrm{I}(\mathbb{D}) \times U\mathbb{D} \to U\mathbb{D}$ donnée par $(\phi,(x,v)) \mapsto (\phi(x), d\phi_x(v))$ est transitive et libre.

Dans la suite on va s'intéresser au sous groupe $\mathrm{I}^+(\mathbb{D})$ de $\mathrm{I}(\mathbb{D})$. Une conséquence est que le groupe $\mathrm{I}^+(\mathbb{D})$ agit transitivement sur les géodésiques, et qu'il peut être identifié avec le fibré des repères de $\mathbb{D}$ via la projection $\pi : g \to g(x)$, où x est un point arbitraire de D. Aussi, tout élément de $\mathrm{I}(\mathbb{D})$ est déterminé par son action sur S^1.

En utilisant le théorème du point fixe de Brouwer on déduit :

Théorème 1.7. *Soit $\phi \in \mathrm{I}^+(\mathbb{D}) \setminus \{id\}$, identifié avec son extension (continue) à S^1. Alors l'un des cas suivants a lieu :*

1. *ϕ a exactement un point fixe dans D, et aucun sur S^1. Alors ϕ est conjugué à une rotation. On dit qu'il est* elliptique.
2. *ϕ a exactement un point fixe sur S^1, et aucun dans D. Alors ϕ est* parabolique.
3. *ϕ a exactement deux points fixes sur S^1, et aucun dans D. Alors ϕ admet une géodésique invariante, son* axe*, dont les bouts sont les points fixes de ϕ, et ϕ agit sur son axe par translation. On dit que ϕ est* hyperbolique.

Le modèle suivant de l'espace hyperbolique est très commode pour les calculs algébriques. Soit $U = \{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Im}(z) > 0\}$, et $p : U \to D$ l'application définie par $p(z) = \frac{z-i}{z+i}$. C'est une inversion de $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ de centre $(0,-1)$ et rayon $\sqrt{2}$ telle que $p(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}) = S^1$. On pose $\mathbb{U} = (U, p^*ds^2)$, que l'on appelle le *modèle du demi-plan.* La transitivité de l'action de $\mathrm{I}^+(\mathbb{D})$ sur les géodésiques de $\mathbb{D}$ implique :

Corollaire 1.8. *Les géodésiques de $\mathbb{U}$ sont les demi-droites verticales et les demi-cercles orthogonaux à $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. De plus on a $I^+(\mathbb{U}) \cong \{z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, ad - bc = 1\}$, que l'on peut identifier au groupe $PSL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R})/\{\pm 1\}$.*

Lemme 1.9. *Soit $\phi \in \mathrm{I}^+(\mathbb{D}) \setminus \{id\}$ représenté par la matrice $A \in SL(2,\mathbb{R})$. On a :*

1. $|\mathrm{tr}(A)| < 2$ *ssi ϕ est elliptique.*
2. $|\mathrm{tr}(A)| = 2$ *ssi ϕ est parabolique, et A est conjugué à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $b \in \mathbb{R}$ (translation horizontale $z \mapsto z + b$).*
3. $|\mathrm{tr}(A)| > 2$ *ssi ϕ est hyperbolique. Alors A est conjugué à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, $a > 0$ (dilatation $z \mapsto a^2 z$), et la distance de translation sur son axe est $2\log(a)$.*

Dans la suite on passera d'un modèle à l'autre de l'espace hyperbolique, qu'on notera $\mathbb{H}$.

Remarque 1.10. 1) Soit deux domaines de $\mathbb{C}$ munis de métriques riemaniennes compatibles avec la structure complexe, ie. telles que $ds_z^2 = \lambda(z)|z|^2$, $\lambda(z) > 0$. Les équations de Cauchy-Riemann impliquent que tout biholomorphisme entre les deux domaines est un difféomorphisme qui préserve les angles, et réciproquement. Nous avons donc montré indirectement l'équivalence entre les quatre caractérisations suivantes de l'espace hyperbolique : un difféomorphisme de $\mathbb{H}$ est une isométrie ssi c'est un biholomorphisme; un difféomorphisme de $\mathbb{H}$ est une isométrie ssi il préserve les angles; les géodésiques de $\mathbb{H}$; le groupe d'isométrie de $\mathbb{H}$. La classe d'équivalence de métriques satisfaisant ces caractérisations est déterminée à un facteur scalaire près; on choisit ce facteur dans la métrique hyperbolique pour normaliser sa courbure (voir §2.3).

2) L'espace hyperbolique $\mathbb{H}$ est isométrique à la nappe d'hyperboloide

$$\mathcal{H} = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|< x, x >_{(2,1)}= -1, x_3 > 0\}$$

munie de la métrique riemanienne induite par la forme bilinéaire symétrique $<\ ,\ >_{(2,1)}$ sur $\mathbb{R}^3$, de signature $(2,1)$. L'isométrie vers le modèle $\mathbb{D}$ est donnée par la projection stéréographique p : $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \frac{(x_1,x_2)}{(1+x_3)}$.

Exercices 1.11. 1) Calculer le rayon, la circonférence et l'aire d'un cercle hyperbolique de centre 0 et rayon euclidien r.

2) Montrer que la distance hyperbolique entre deux points z_1 et z_2 de $\mathbb{D}$ est $d(z_1, z_2) = \log(\frac{1+t}{1-t})$, où $t = |\frac{z_2-z_1}{1-\bar{z_1}z_2}|$.

3) Montrer que les cercles hyperboliques sont des cercles euclidiens (mais de centres "décentrés").

4) Montrer que tous les triangles à bord géodésique dont les sommets sont sur S^1 sont congrus, ou, de manière équivalente, que les isométries de $\mathbb{H}$ agissent transitivement sur les triplets de points de $\partial\mathbb{H}$.

5) Déterminer l'ensemble des points à distance inférieure à $\epsilon > 0$ d'une géodésique de $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{U}$ (ses *ϵ-voisinages*).

6) Quelle est la dynamique d'un élément parabolique (respectivement hyperbolique) sur $S^1 = \partial\mathbb{H}$? Montrer que toute boule euclidienne de D tangeante à S^1 en un point fixe d'un parabolique ϕ est globalement invariante sous l'action de ϕ.

7) Chaque isométrie de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{U}$ s'écrit comme la composée de deux inversions. Décrire les relations d'incidence entre les ensembles de points fixes de ces deux inversions selon le type de l'isométrie : elliptique, parabolique ou hyperbolique.

8) (Birapport). On définit le birapport de quatre points ordonnés $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}P^1$ par

$$[z_1 : \ldots : z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

(L'expression est prolongé par continuité en ∞).

1. Montrer que $I^+(\mathbb{H})$ préserve les birapports;
2. Montrer que $[z_1 : \ldots : z_4] \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ssi il existe un cercle de $\mathbb{C}P^1$ contenant $z_1, \ldots, z_4$, et que si $[z_1 : \ldots : z_4] > 0$, alors la paire z_1, z_2 ne sépare pas z_3, z_4 sur le cercle contenant z_1, $\ldots, z_4$;
3. Interpréter la distance de translation sur l'axe d'un élément hyperbolique en terme de birapport.

9) Montrer que deux géodésiques disjointes de $\mathbb{H}$ ont soit un bout commun, soit une géodésique orthogonale commune qui réalise la distance entre elles.

Une application frappante des résultats précédents, en utilisant la méthode des découpages due à Gauss, est la version suivante du théorème de Gauss-Bonnet :

Théorème 1.12. *L'aire d'un polygone hyperbolique à n faces et d'angles $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ est égal à $(n-2)\pi - \sum_i \alpha_i$.*

Exercices 1.13. Calculer l'aire d'un polygone géodésique sur la sphère S^2.

Enfin, comme $\mathbb{H}$ est l'union des boules fermées (compactes) de centre 0 et rayon $r > 0$, on a

Proposition 1.14. *L'espace métrique $(\mathbb{H}, d)$ est complet.*

2. Surfaces géométriques et groupes discrets

Par *surface*, on désignera toujours une variété lisse (différentiable à tous ordres), connexe orientée et de dimension deux. L'espace hyperbolique est muni de l'orientation complexe. Deux références générales : [BP, Ch. B.1] et [T, Ch. 3.4].

Dans cette section on détermine l'ensemble des surfaces qui supportent une métrique localement isométrique à celle de $\mathbb{H}$, et lorsque ces métriques sont complètes on les caractérise en terme d'actions de groupes sur leur revêtement universel. On termine par quelques remarques sur les relations entre ces résultats et le théorème d'uniformisation de B. Riemann.

Une structure hyperbolique sur une surface S est la donnée d'un *atlas hyperbolique* (U_i, ϕ_i), formé par un recouvrement ouvert $\{U_i\}$ de la surface et des applications lisses ouvertes $\phi_i : U_i \to \mathbb{H}$ (les cartes) telles que :

1. $\phi_i : U_i \to \phi_i(U_i)$ est un difféomorphisme;
2. si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, alors *la restriction* de $\phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ à chaque composante connexe de $\phi_i(U_i \cap U_j)$ est la *restriction* d'une isométrie directe de $\mathbb{H}$.

La surface hyperbolique S est munie d'une métrique riemanienne, définie localement par la condition que les cartes soient des isométries. De même, on définit les géodésiques de S localement, comme l'ensemble des courbes γ dont tout point x admet une carte locale U_i telle qu'il existe une géodésique $\tilde{\gamma}$ de $\mathbb{H}$ vérifiant $\gamma_{|U_i} = \phi_i^{-1}(\tilde{\gamma}_{|\phi_i(U_i)})$. On dit que S est *complète* si la distance hyperbolique $d : S \times S \to \mathbb{R}_+$ (définie de manière analogue au chapitre 1) est complète.

2.1. **Développantes, holonomies.** On a :

Théorème 2.1. *Toute surface hyperbolique connexe, simplement connexe et complète S est isométrique à $\mathbb{H}$.*

Ce résultat fondamental repose sur les deux propositions suivantes, qui ont indépendemment une très grande valeur :

Proposition 2.2. *Si S est une surface hyperbolique connexe et simplement connexe et $\phi : U \to \mathbb{H}$ est une isométrie définie sur un ouvert $U \subset S$ connexe, alors il existe une unique isométrie locale $D : S \to \mathbb{H}$ telle que $D_{|U} = \phi$. De plus, si D et D' sont deux telles isométries locales (pour deux cartes ϕ et ϕ'), alors il existe $g \in I^+(\mathbb{H})$ tel que $D = g \circ D'$.*

On dit que $D : S \to \mathbb{H}$ est une application *développante* de la surface hyperbolique S. Pour la définir, on fixe un point $x_0 \in U$, et pour tout $x \in S$ on choisit un chemin γ de x_0 à x et un recouvrement de γ par une chaîne réduite (avec intersections connexes deux à deux) de cartes $\{(U_i, \phi_i)\}$ de l'atlas (maximal) de S. La valeur de D en x est obtenue en ajustant les cartes ϕ_i le long de γ (en utilisant la propriété 2. dans la définition d'un atlas hyperbolique), de manière successive en partant de ϕ_0. On trouve :

$$D(x) = g_1 \circ g_2 \circ \ldots \circ g_n \circ \phi_n(x) \tag{1}$$

où ϕ_n est la carte en x et g_i est l'extension de $\phi_{i-1} \circ \phi_i^{-1}$. (Cette construction est analogue au principe de continuation analytique). La simple connexité de S et la propriété 2. des ϕ_{ij} impliquent que D est bien définie, c'est-à-dire ne dépend pas du choix de γ et des $\{(U_i, \phi_i)\}$. L'unicité (analogue, encore, du théorème de prolongement analytique) est une conséquence du fait que deux isométries locales définies sur un domaine connexe et coincidant avec leur différentielle en un point sont égales en tout point (utiliser par exemple le corollaire 1.6). La dernière affirmation est une conséquence de la propriété 2. des ϕ_{ij} et de l'unicité.

La *complétude* de S permet de relever les chemins de $\mathbb{H}$ via D. En effet :

Proposition 2.3. *Soit S est une surface hyperbolique connexe, simplement connexe et complète, et $D : S \to \mathbb{H}$ une développante de S. Pour tous $x \in D(S)$, $\tilde{x} \in D^{-1}(x)$ et tout chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{H}$ tel que $\gamma(0) = x$, il existe un unique chemin $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{H}$ tel que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{x}$ et $D(\tilde{\gamma}) = \gamma$.*

Cette proposition montre en particulier que D est surjective. Elle est aussi injective car on peut également relever les homotopies via D. Donc D est un difféomorphisme isométrique. On obtient l'inverse de D comme suit. La proposition montre que toute géodésique $\gamma(t)$ de S peut être prolongée indéfiniment, c'est-à dire étendue à tout $t \in \mathbb{R}$. On en déduit une section $E : \mathbb{H} \to S$ de D, l'application *exponentielle*, qui envoie $y \in \mathbb{H}$ sur le point de la géodésique relevant $[0, y]$ à distance $d(0, y)$ du point base x_0 de S.

Si S est une surface hyperbolique connexe complète mais non simplement connexe, alors son revêtement universel $\pi : \tilde{S} \to S$ est muni de la structure hyperbolique complète induite par π. On définit les applications développantes de S comme étant celles obtenues à la Proposition 2.2 pour $\tilde{S}$. L'identité (1) montre que toute application développante de S commute avec l'action du groupe fondamental de S, c'est-à-dire :

$$\forall \gamma \in \pi_1(S),\ \exists g_\gamma \in I^+(\mathbb{H}), \quad D \circ \gamma = g_\gamma \circ D.$$

(On omet le point base du groupe fondamental pour simplifier.) L'application $\rho : \gamma \mapsto g_\gamma$ est un homomorphisme de groupe appelé *l'holonomie* de (la structure hyperbolique sur) S, et $\rho(\pi_1(S))$ est son *groupe d'holonomie*.

Corollaire 2.4. *Toute surface hyperbolique connexe et complète est isométrique à l'espace quotient $\mathbb{H}/\Gamma$, où Γ est son groupe d'holonomie.*

Remarque 2.5. On peut remplacer dans la définition de structure hyperbolique l'espace $\mathbb{H}$ par une variété riemanienne orientée connexe, ou même une variété analytique réelle. Alors les applications développantes sont seulement des revêtements. On obtient ainsi la notion de $(X, I^+(X))$-structure sur S. Au §2.3 on s'intéressera notamment aux cas $X = \mathbb{S}^2$ (structures elliptiques) et $X = \mathbb{R}^2$ (structures plates).

2.2. **Bons quotients.** Il s'agit de déterminer les groupes d'holonomie possibles pour une structure hyperbolique, plate ou elliptique (cf. Remarque 2.5). On rappelle les notions d'action *libre* et *proprement discontinue* d'un groupe sur un espace topologique (localement compact). On a :

Proposition 2.6. *Soit X un espace topologique séparé (de Hausdorff), connexe et localement compact, et Γ un groupe d'homéomorphismes de X. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Γ agit librement et proprement discontinuement sur X.*
2. *X/Γ est de Hausdorff et pour tout $x \in X$ il existe un voisinage U de x tel que pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a $\gamma(U) \cap U = \emptyset$.*
3. *X/Γ est de Hausdorff et la projection $\pi : X \to X/\Gamma$ est un revêtement.*

Exercices 2.7. 1) Montrer que l'action de $\Gamma = \mathbb{Z}$ sur $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ engendré par l'application $(x, y) \mapsto 2x, \frac{1}{2}y)$ est libre et vérifie la seconde condition dans la proposition 2.6. 2). En déduire que le quotient $X \to X/\Gamma$ est une revêtement (donc X/Γ est une variété), bien que X/Γ n'est pas de Hausdorff.

2) Soit $\mathcal{R}$ l'espace des représentations $\rho \in \mathrm{Hom}(F_2, PSL(2, \mathbb{R}))$ telles que

$$\rho(\gamma_1) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(\gamma_2) = \begin{pmatrix} b & c \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$$

où F_2 est le groupe libre de rang 2 engendré par γ_1 et γ_2. Montrer que $\rho(\gamma_1)^n \rho(\gamma_2) \rho(\gamma_1)^{-n}$ converge pour $n \to \infty$ ou $n \to -\infty$ vers $\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$, puis que le quotient topologique de $\mathcal{R}$ par l'action par conjugaison de $PSL(2, \mathbb{R})$ n'est pas Hausdorff. En déduire que le sous-espace de $\mathrm{Hom}(F_n, PSL(2, \mathbb{R}))$ dont le quotient par $PSL(2, \mathbb{R})$ est Hausdorff, est formé par les représentations dont l'image ne fixe aucun point de $S^1 = \partial \mathbb{H}$ (les représentations *irréductibles*).

Les groupes d'isométrie de $X = \mathbb{H}$, $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}^2$ sont munis d'une topologie naturelle, induite par leurs représentations comme quotients de groupes de matrices. Pour $I^+(\mathbb{H}) = PSL(2, \mathbb{R})$, identifié à $\mathrm{Aut}(D)$, cette topologie coincide avec celle de la convergence uniforme sur les compacts (cf. corollaire 1.8). On a :

Proposition 2.8. *Soit $X = \mathbb{H}$, $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}^2$ et Γ est un sous-groupe de $I^+(X)$ agissant librement. Alors Γ est un sous-ensemble discret de $I^+(X)$ si et seulement si Γ agit proprement discontinuement sur X.*

Avec le corollaire 2.4 et la remarque 2.5 on déduit le

Théorème 2.9. *Soit $X = \mathbb{H}$, $\mathbb{S}^2$ ou $\mathbb{R}^2$. Toute $(X, I^+(X))$-surface S connexe complète est isométrique au quotient de X par un sous-groupe discret de $I^+(X)$ isomorphe à $\pi_1(S)$ et agissant librement sur X. De manière équivalente, les $(X, I^+(X))$-structures sur S sont en bijection avec les classes de conjugaison de tels sous-groupes de $I^+(X)$.*

Un sous-groupe discret de $I^+(\mathbb{H})$ est appelé un groupe *fuchsien.* Si le revêtement universel $\tilde{S}$ d'une surface hyperbolique complète S est identifié à $\mathbb{H}$, le groupe fuchsien correspondant au groupe fondamental de S est appelé le *modèle fuchsien* de S (attention : cela dépend de l'identification de $\tilde{S}$ avec $\mathbb{H}$, déterminée seulement modulo $I^+(\mathbb{H})$).

2.3. **Géométries et uniformisation.** On se restreint aux surfaces lisses, connexes et orientables qui sont également compactes et sans bord.

On rappelle (voir par exemple [H]) que deux surfaces S_1 et S_2 sont difféomorphes si et seulement si elles sont homologues : $\mathrm{rang}(H_1(S_1;\mathbb{Z})) = \mathrm{rang}(H_1(S_2;\mathbb{Z}))$. Le *genre* de S est $g(S) = \frac{1}{2}\mathrm{rang}(H_1(S;\mathbb{Z}))$, sa *caractéristique d'Euler* est $\chi(S) = 2 - 2g$. Il existe des systèmes $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$, appelés *standards*, de courbes simples sur S basées en un point x_0 tels que

$$\pi_1(S, x_0) = < a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \mid [a_1, b_1] \ldots [a_g, b_g] = 1 > . \tag{2}$$

Toute surface S peut être triangulée, c'est-à-dire qu'elle est homéomorphe à un complexe simplicial de dimension deux. Alors $\chi(S) = S - A + T$, où S (respectivement A, T) est le nombre de sommets (respectivement arêtes, triangles) d'une triangulation de S. Toute surface peut être plongée dans $\mathbb{R}^3$, et possède un difféomorphisme qui renverse l'orientation. Enfin, en découpant une surface S de genre g le long d'un système standard de courbes, on vérifie que S peut être réalisée comme le quotient d'un polygone à $4g$ cotés en identifiant tous les sommets et les cotés par paires.

Voici la notion qui généralise dans le cadre hyperbolique la dernière construction. Un ensemble convexe fermé F de $\mathbb{H}$ dont le bord est formé par une collection finie ou dénombrable de géodésiques est un *domaine fondamental* pour un groupe fuchsien Γ si les quatre conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\gamma(\mathrm{Int}F) \cap \mathrm{Int}F = \emptyset$ pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq id$;
2. $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F)$;
3. Pour chaque face l de F, il existe une face l' et $\gamma \in \Gamma$ tels que $\gamma(l) = l'$.
4. Pour tout compact K de $\mathbb{H}$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(F) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Exercices 2.10. 1) (*Domaine de Dirichlet*) Soit Γ fuchsien et $a \in \mathbb{H}$ un point qui n'est pas fixé par un élément elliptique de Γ. Montrer que l'ensemble

$$F_a = \{p \in \mathbb{H} \mid d(p, a) \leq d(p, \gamma(a)) \ \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

est un domaine fondamental (indication : $\gamma(F_a) = F_{\gamma(a)}$).

2) Soit Γ un groupe fuchsien et D un domaine fondamental pour Γ. Montrer que l'application $\gamma \mapsto \gamma D$ est une bijection de Γ vers l'ensemble des cellules de la tesselation $\mathbb{H} = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(F)$. En déduire que Γ est engendré par les réflexions le long des faces de D. Donc Γ est finiment engendré si et seulement si D a un nombre fini de faces.

Il n'est pas très difficile de compléter l'exercice 2.10, 2), en montrant qu'un groupe fuchsien Γ est isomorphe au groupe engendré par les réflexions le long des faces d'un domaine fondamental de Γ. On peut ainsi identifier une surface hyperbolique complète $S = \mathbb{H}/\Gamma$ avec le quotient F/Γ (identification des points de ∂F via Γ). La même chose vaut pour les surfaces elliptiques ou plates (cf. Remarque 2.5). On a :

Théorème 2.11. *Soit S une surface compacte connexe orientée. Alors*

1. *S admet une structure elliptique si et seulement si $g(S) = 0$.*
2. *S admet une structure plate si et seulement si $g(S) = 1$.*

3. *S admet une structure hyperbolique si et seulement si $g(S) \geq 2$.*

On vérifie que les conditions de l'énoncé sont nécessaires en appliquant le théorème 1.12 au calcul de l'aire d'une surface hyperbolique compacte munie d'une *triangulation géodésique*. On trouve :

$$\text{Aire}(S) = -2\pi\chi(S). \tag{3}$$

On montre que les conditions sont suffisantes en construisant un domaine fondamental pour une structure plate, resp. hyperbolique (le cas elliptique est déduit immédiatement du fait que le groupe fondamental de S doit agir librement sur $\tilde{S}$). Dans le cas hyperbolique, par exemple, pour tout genre $g \geq 2$ on peut trouver un polyèdre compacte régulier F de $\mathbb{D}$ à $4g$ côtés, centré en 0, tel que si Γ est le sous-groupe de $I^+(\mathbb{H})$ engendré par les réflexions le long des faces de F, alors $\mathbb{H}/\Gamma$ est muni d'une structure hyperbolique complète; cette structure est obtenue via la description explicite d'un atlas. (Une généralisation de cette construction est donnée par le "théorème du polyèdre" de Poincaré).

Le théorème 2.11 permet de considérer l'espace des structures hyperboliques supportées par une surface. Du point de vue de la géométrie riemanienne, ces structures sont caractérisées par le

Théorème (Cartan-Hadamard). [GHL] *Toute surface riemanienne connexe, simplement connexe et complète de courbure constante -1 (respectivement 0, 1), est isométrique à $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$).*

On rappelle que la courbure $K(x)$ d'une variété riemanienne de dimension deux en un point x est le défaut infinitésimal par rapport au périmètre euclidien :

$$l(C(x,r)) = 2\pi r\left(1 - \frac{1}{6}K(x)r^2 + o(r^2)\right),$$

où $l(C(x,r)$ désigne la longueur d'un cercle centré en x et de rayon r (formule de Puiseux, cf. [BG]). C'est un invariant métrique. On calcule facilement les courbures de $\mathbb{H}$, $\mathbb{S}^2$ et $\mathbb{R}^2$ à l'aide de l'exercice 1.11.1. Le formule (3) est un version simple du théorème de Gauss-Bonnet, appliqué aux surfaces riemaniennes de courbure K et élément de volume dv : $\int_S K(x)dv(x) = 2\pi\chi(S)$.

Lorsque $X = \mathbb{H} = \mathbb{D}$, $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C}P^1$ ou $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, le groupe $I^+(X)$ est un sous-groupe de $\text{Aut}(X)$, les biholomorphismes de X. On en déduit que pour une surface S de genre $g \geq 2$ non nécessairement compacte, par exemple, l'ensemble des structures hyperboliques complètes de S est *canoniquement* en bijection avec l'ensemble des structures de surfaces de Riemann de S (i.e. de variétés complexes de dimension 1) telles que le revêtement universel $\tilde{S}$ s'identifie comme surface de Riemann à $X = D$, $\mathbb{C}P^1$ ou $\mathbb{C}$. De plus $\text{Isom}^+(S) < \text{Aut}(S)$. En fait cette bijection est exhaustive, car on a le

Théorème d'uniformisation (Riemann). *Toute surface complexe connexe et simplement connexe est biholomorphe à $\mathbb{C}P^1$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{D}$.*

On peut donc identifier canoniquement l'espace des structures hyperboliques complètes de S et l'espace de ses structures complexes. La condition de complètude (dans le cas des surfaces non compactes, non traité dans la suite) est essentielle, comme le montre l'exemple de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, que l'on peut munir de la structure hyperbolique incomplète donnée par l'inclusion dans $\mathbb{D}$, et de la structure hyperbolique complète associée au revêtement $\pi : \mathbb{U} \to \mathbb{D}$, $z \mapsto exp(2\pi iz)$. Les deux structures métriques correspondent pourtant à la même structure complexe.

Les dessins de surfaces hyperboliques sont trompeurs : l'infini hyperbolique est "beaucoup plus large" que dans le cas euclidien (voir les rayons des cercles hyperboliques, cf. l'exercice 1.11) :

Théorème (Hilbert-Milnor). *Il n'y a pas de plongement de classe C^2 d'une surface hyperbolique complète dans $\mathbb{R}^3$.*

3. Espaces de Teichmüller, espace de Fricke

Dans cette section on donne plusieurs définitions de l'espace de Teichmüller d'une surface compacte, et on montre que ces définitions sont équivalentes. On termine par le plongement de l'espace de Teichmüller dans l'espace des représentations dans $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ du groupe fondamental, dû à Fricke-Klein. Deux références sont [A] et [IT].

Sauf mention contraire on désigne par S une surface *compacte* (connexe orientée) et *sans bord* fixée, de genre $g \geq 2$.

Soit $\mathcal{H}(S)$ l'espace des métriques hyperboliques sur S, $\mathrm{Diff}^+(S)$ le groupe des difféomorphismes directs de S et $\mathrm{Diff}_0(S)$ le sous-groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité. On munit $\mathcal{H}(S)$ de la topologie $\mathcal{C}^\infty$ induite par l'inclusion dans l'espace des sections du fibré $T^*(S) \otimes T^*(S)$, et $\mathrm{Diff}^+(S)$ de la topologie $\mathcal{C}^\infty$. Un théorème de Baer affirme que deux difféomorphismes de S sont homotopes ssi ils sont isotopes (cf. cours "Groupes Modulaires"). Donc $\mathrm{Diff}_0(S)$ coincide avec la composante connexe de l'identité de $\mathrm{Diff}^+(S)$. Le groupe $\mathrm{Diff}^+(S)$ agit continuement sur $\mathcal{H}(S)$ par :

$$\forall \phi \in \mathrm{Diff}^+(S), \forall g \in \mathcal{H}(S), \quad \phi.g = (\phi^{-1})^* g.$$

On définit *l'espace de Teichmüller de S* comme l'espace topologique quotient $\mathcal{T}(S) = \mathcal{H}(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$. C'est l'espace des métriques sur S, modulo la relation d'équivalence engendrée par l'existence d'un difféomorphisme isométrique isotope à l'identité.

On a la description équivalente suivante de $\mathcal{T}(S)$. On considère l'ensemble des paires (R, ϕ), où R est une surface hyperbolique orientée et $\phi : S \to R$ un difféomorphisme direct. On dit que (R, ϕ) est une *surface marquée*. Deux surface marquées (R_1, ϕ_1) et (R_2, ϕ_2) sont dites équivalentes s'il existe une isométrie $\phi : R_1 \to R_2$ telle que l'application $\phi_2^{-1} \circ \phi \circ \phi_1 : S \to S$ est isotope à l'identité. L'ensemble $\{[R, \phi]\}$ des classes d'équivalences de surface marquées s'identifie naturellement avec $\mathcal{T}(S)$, et cette identification commute avec l'action du groupe modulaire

$$\mathcal{M}od(S) = \mathrm{Diff}^+(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$$

définie sur l'ensemble des classes $[R, \phi]$ par $[\psi].[R, \phi] = [R, \phi \circ \psi^{-1}]$. On munit $\{[R, \phi]\}$ de la topologie induite par cette identification.

On va décrire l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ comme ensemble algébrique. Dans ce but, pour chaque structure hyperbolique sur S on introduit une notion de modèle fuchsien "normalisé" (cf. définition après le théorème 2.9) en marquant S à l'aide de systèmes standards de courbes (cf. (2)). Précisément, soit R une surface hyperbolique orientée et $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$ un système standard de courbes sur R (un *marquage*). On note $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g$ les générateurs "canoniques" d'un modèle fuchsien $\Gamma \cong \pi_1(R, x_0)$, associés au marquage $\{a_i, b_i\}_{i=1}^g$. On dit que Γ est *normalisé* si :

N1. β_g a pour points fixes 0 (répulsif) et ∞ (attractif);
N2. α_g a pour point fixe attractif 1.

Lemme 3.1. *Les éléments non nuls du groupe fondamental d'une surface hyperbolique compacte, éventuellement à bord, agissent sur le revêtement universel $\mathbb{H}$ comme isométries de type hyperbolique.*

Lemme 3.2. *Soit γ et δ deux éléments d'un groupe fuchsien Γ (non nécessairement cocompact). Si γ est hyperbolique et $\delta \neq id$, alors l'une des situations suivantes a lieu :*

1. *$Fix(\gamma) = Fix(\delta)$.*
2. *$Fix(\gamma) \cap Fix(\delta) = \emptyset$.*

Les lemmes 3.1 et 3.2 impliquent l'existence d'un modèle fuchsien de R normalisé associé à Σ. Soit maintenant Σ_0 un marquage fixé de notre surface de base S, et $\phi \in \mathrm{Diff}^+(S)$. Notons Γ_0 le modèle fuchsien normalisé d'une structure hyperbolique sur S, et Γ_ϕ le modèle fuchsien normalisé de $R = \phi(S)$, associés respectivement aux marquages Σ_0 et $\phi(\Sigma_0)$.

Proposition 3.3. *Le groupe Γ_ϕ (resp. Γ_0) est canoniquement associé à $[R, \phi] \in \mathcal{T}(S)$ (resp. la classe d'homotopie libre de Σ_0).*

Soit $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g$ et $\{\alpha_i^\phi, \beta_i^\phi\}_{i=1}^g$ les générateurs canoniques de Γ_0 et Γ_ϕ. Il existe un *unique* relevé $\tilde{\phi} : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ de ϕ tel que

$$\tilde{\phi} \circ \alpha_g = \alpha_g^\phi \circ \tilde{\phi}, \quad \tilde{\phi} \circ \beta_g = \beta_g^\phi \circ \tilde{\phi}. \tag{4}$$

L'homéomorphisme $\tilde{\phi}$ définit un homomorphisme injectif $\theta_{\tilde{\phi}} : \Gamma_0 \to PSL(2, \mathbb{R})$ tel que $\theta_{\tilde{\phi}}(\Gamma_0) = \Gamma_\phi$, et donné par

$$\theta_{\tilde{\phi}}(\gamma) = \tilde{\phi} \circ \gamma \circ \tilde{\phi}^{-1}, \quad \gamma \in \Gamma_0.$$

On définit *l'espace de Teichmüller du groupe fuchsien normalisé* Γ_0 (ou *espace des déformations fuchsiennes* de Γ_0) comme l'ensemble

$$\mathcal{T}(\Gamma_0) = \{\theta : \Gamma_0 \to PSL(2,\mathbb{R}) \mid \theta \text{ homomorphisme injectif et d'image discrete}\}.$$

Proposition 3.4. *L'application* $\Phi_\Sigma : \mathcal{T}(S) \to \mathcal{T}(\Gamma_0)$ *définie par* $\Phi_\Sigma([R,\phi]) = \theta_\phi$ *est injective.*

Théorème (Dehn-Nielsen). (cf. [ZVC] et cours "Groupes Modulaires") *Le groupe modulaire* $\mathcal{M}od(S)$ *est isomorphe au groupe des automorphismes extérieurs de* $\pi_1(S)$.

Corollaire 3.5. *Pour toute représentation* $\theta : \Gamma_0 \to PSL(2,\mathbb{R})$ *fidèle et discrète, il existe un homéomorphisme* h *de* $\mathbb{H}$ *tel que* $h \circ \gamma \circ h^{-1} = \theta(\gamma)$ *pour tout* $\gamma \in \Gamma_0$. *Donc l'application* $\Phi_\Sigma : \mathcal{T}(S) \to \mathcal{T}(\Gamma_0)$ *est bijective.*

Exercices 3.6. Soit $\mathcal{T}_g$ l'ensemble des classes de paires (R,Σ), où R est une surface hyperbolique orientée difféomorphe à S et Σ un marquage de R, et deux paires (R,Σ) et (R',Σ') sont identifiées si il existe un difféomorphisme isométrique $h : R \to R'$ tel que $h(\Sigma)$ est librement homotope à Σ'. Montrer que $\mathcal{T}_g$ est en bijection avec $\mathcal{T}(S)$.

Dans la suite on passera librement de $\mathcal{T}(S)$ à $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ pour représenter l'espace de Teichmüller de S. On munit $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ de la topologie induite comme sous-ensemble de $PSL(2,\mathbb{R})$. Pour cette topologie et celle de $\mathcal{T}(S)$ introduite plus haut, on peut montrer (mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat) que Φ_Σ est un homéomorphisme (cf. [A, Ch. I]). La topologie de $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ coincide avec celle induite par les coordonnées de Fricke, définies de la manière suivante.

Lemme 3.7. *Soit* $\{\alpha_i,\beta_i\}_{i=1}^g$ *le système canonique de générateurs du modèle fuchsien normalisé* Γ *d'un point de* $\mathcal{T}(S)$. *Pour tout élément* $\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ *de* $\{\alpha_i,\beta_i\}_{i=1}^g$ *distinct de* β_g *on a* $bc \neq 0$.

Le lemme implique qu'on peut écrire de manière unique les générateurs canoniques d'un groupe fuchsien normalisé sous la forme :

$$\begin{array}{llll} \alpha_j = \frac{a_j z + b_j}{c_j z + d_j}, & a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}, & c_j > 0, & a_j d_j - b_j c_j = 1 \\ \beta_j = \frac{a'_j z + b'_j}{c'_j z + d'_j}, & a'_j, b'_j, c'_j \in \mathbb{R}, & c'_j > 0, & a'_j d'_j - b'_j c'_j = 1 \end{array}$$

pour tout $j = 1, \dots g-1$. On définit les coordonnées de Fricke $\mathcal{F}_\Sigma : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}^{6g-6}$ par

$$\mathcal{F}_\Sigma(\theta) = (a_1, b_1, c_1, a'_1, b'_1, c'_1, \dots a'_{g-1}, b'_{g-1}, c'_{g-1}).$$

Théorème 3.8. *Le paramétrage de Fricke* $\mathcal{F}_\Sigma : \mathcal{T}(S) \to \mathbb{R}^{6g-6}$ *est un homéomorphisme sur son image, appelée l'espace de Fricke de* S.

Le choix du marquage Σ de S détermine une carte, le paramétrage $\mathcal{F}_\Sigma$, pour réaliser l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S)$ comme ensemble algébrique réel. Clairement c'est un ouvert, et pour tous marquages Σ et Σ' de S on a un isomorphisme algébrique entre $\mathcal{F}_\Sigma(\mathcal{T}(S))$ et $\mathcal{F}_{\Sigma'}(\mathcal{T}(S))$.

Remarque 3.9. Soit $\mathcal{R}_S = \mathrm{Hom}(\Gamma_0, PSL(2,\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence simple. L'inclusion $\mathcal{T}(\Gamma_0) \subset \mathcal{R}_S$ induit un plongement $\mathcal{T}(\Gamma_0) \to \mathcal{R}_S/PSL(2,\mathbb{R})$, l'espace quotient sous l'action par conjugaison. L'image de ce plongement est un ouvert. On peut montrer que l'image est également un fermé (cf. [T], Th. 4.1.7). Donc $\mathcal{T}(\Gamma_0)$ est la composante connexe de $\mathcal{R}_S/PSL(2,\mathbb{R})$ formée des représentations fidèles et discrètes. L'exercice 2.7, 2), montre que ce quotient est Hausdorff, et la bijection Φ_Σ du corollaire 3.5 permet de l'identifier avec $\mathcal{T}(S)$.

4. Les paramétrages de Fenchel-Nielsen et Fricke-Klein

La stratégie consiste à découper notre surface S en composantes connexes d'un type topologique suffisamment simple pour pouvoir déterminer son espace de Teichmüller. Ensuite on étudie les structures hyperboliques obtenues par tous les recollements possibles entre ces composantes. Des références générales sont [A], §2.2-2.3, [BP], §B.4, et [IT], §3.

4.1. **Courbes, pantalons et géodésiques.** Un *pantalon* est une surface compacte homéomorphe à un disque fermé privé de deux (petites) boules ouvertes. On a :

Lemme 4.1. *Soit S une surface orientable, connexe et compacte de genre $g \geq 2$. Pour tout ensemble $\{\gamma_i\}_{i=1}^h$ maximal (pour l'inclusion) de courbes fermées simples et disjointes, non homotopiquement nulles et non homotopes deux à deux, $S \setminus (\cup_{i=1}^h \gamma_i)$ est l'union des intérieurs de k pantalons, et on a $h = 3g - 3$ et $k = 2g - 2$.*

On appelle $S \setminus (\cup_{i=1}^h \gamma_i)$ un *découpage en pantalons* de S, et $\{\gamma_i\}_{i=1}^h$ un *système de découpage de S*. Le résultat suivant garantit l'existence de découpages en pantalons hyperboliques. On définit une structure hyperbolique *à bord totalement géodésique* sur une surface compacte à bord par la propriété d'être localement isométrique à un ouvert d'un demi-espace hyperbolique fermé. (Un *demi-espace hyperbolique fermé* est l'adhérence d'une des composantes connexes du complément d'une géodésique dans $\mathbb{H}$).

Théorème 4.2. (Redressement) *Soit S une surface hyperbolique compacte à bord totalement géodésique (éventuellement vide). On a :*

1) Toute courbe fermée et non homotopiquement nulle sur S est librement homotope à une géodésique. Cette géodésique est unique à reparamétrisation près, et elle est disjointe du bord ou contenue dans le bord.

2) Pour toutes courbes $l_1, \ldots, l_p$ fermées simples et disjointes, non homotopiquement nulles et non homotopes deux à deux, il existe une unique famille de géodésiques $\gamma_1, \ldots \gamma_p$ fermées simples et disjointes telles que γ_i est homotope à l_i pour $i = 1, \ldots, p$.

Pour la preuve du 2) on utilise le fait que deux lacets simples et librement homotopes sur une surface connexe sont isotopes (théorème de Baer). Dans la suite on aura besoin du résultat suivant, conséquence assez directe du lemme 1.9 3) :

Lemme 4.3. *Soit $S = \mathbb{H}/\Gamma$ une surface hyperbolique compacte de modèle fuchsien Γ, et*

$$\gamma(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc = 1$$

un élément (hyperbolique) de Γ. La longueur l de la géodésique sur S projection de l'axe de γ vérifie :

$$\mathrm{trace}^2(\gamma) = (a+d)^2 = 4\cosh^2\left(\frac{l}{2}\right).$$

Soit P un pantalon orienté fixé. *L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(P)$* des structures hyperboliques à bord totalement géodésique sur P est défini en identifiant les structures reliées par un difféomorphisme isométrique isotope à l'identité, tel que l'isotopie fixe les composantes de bord.

Voici la relation entre un pantalon hyperbolique P (à bord totalement géodésique) plongé dans S, et ses modèles fuchsiens. Soit Γ un modèle fuchsien de S, et $\pi : \mathbb{H} \to S$ le revêtement universel métrique. Si $\tilde{P}$ est une composante connexe de $\pi^{-1}(P)$, alors le sous-groupe $\Gamma_{\tilde{P}} = \mathrm{Stab}(\tilde{P}) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(\tilde{P}) = \tilde{P}\}$ est libre, engendré par deux transformations hyperboliques, et $P = \tilde{P}/\Gamma_{\tilde{P}}$. On appelle $\hat{P} = \mathbb{H}/\Gamma_{\tilde{P}}$ *l'extension de Nielsen* de P, et P le *noyau de Nielsen* de $\hat{P}$. La surface hyperbolique $\hat{P}$ est non compacte et non complète, elle est obtenue en attachant un anneau hyperbolique à chaque géodésique du bord de P (donc $\hat{P}$ est homéomorphe à $\mathrm{Int}(P)$). Le pantalon P est uniquement déterminé par le groupe $\Gamma_{\tilde{P}}$. (On peut montrer que P est le plus petit sous-ensemble convexe de $\hat{P}$ pour lequel l'inclusion est une équivalence d'homotopie.

Le lemme 4.3 et la correspondance entre noyau et extension de Nielsen permet de montrer la partie unicité de l'énoncé suivant. L'existence est obtenue en construisant de manière explicite un hexagone hyperbolique à angles droits, isométrique à chacune des deux composantes de $P \setminus (\cup_j C_j)$:

Théorème 4.4. *Pour tout triplet (L_1, L_2, L_3) de réels strictement positifs il existe une unique structure hyperbolique sur P telle que les trois composantes de bord (ordonnées) l_1, l_2 et l_3 vérifient $L(l_i) = L_i$, $i = 1, 2, 3$. De plus, P admet une isométrie I_P d'ordre deux renversant l'orientation, et l'ensemble des points fixes de I_P consiste en l'union de trois géodésiques disjointes C_j telles que C_j connecte et est orthogonale à l_j et l_{j+1}.*

4.2. **Coordonnées de Fenchel-Nielsen.** Soit S une surface compacte connexe orientée et sans bord. On fixe un système de découpage $\{\gamma_i\}_{i=1}^h$ de S, et pour tout j une orientation de γ_j. Si γ_j est une composante de bord des pantalons $P_{j,1}$ et $P_{j,2}$ de S (on admet le cas où $P_{j,1} = P_{j,2}$), on choisit pour $k = 1, 2$ une autre composante de bord de $P_{j,k}$, disons $\gamma_{j,k}$.

A chaque point $p = [R, \phi] \in \mathcal{T}(S)$ on associe le système de découpage $\{\gamma_i(p)\}_{i=1}^h = \{\phi(\gamma_i)\}_{i=1}^h$ de la surface $R = \phi(S)$. On peut supposer que ce découpage est géodésique (Théorème 4.2. 2)). On note

$$l_j(p) = l(\gamma_j(p))$$

la longueur hyperbolique de $\gamma_j(p)$, $P_{j,k}(p)$ la composante connexe de $R \setminus \{\gamma_i(p)\}_{i=1}^h$ correspondant à $P_{j,k}$, $\gamma_{j,k}(p)$ la géodésique correspondant à $\gamma_{j,k}$, $C_{j,k}(p)$ la géodésique joignant $\gamma_j(p)$ à $\gamma_{j,k}(p)$ et invariante pour l'involution $I_{P_{j,k}(p)}$ (Théorème 4.4), et $c_{j,k}(p) = C_{j,k}(p) \cap \gamma_j(p)$. On définit la *torsion de p le long de γ_j* par

$$\theta_j(p) = 2\pi \, \frac{\tau_j(p)}{l_j(p)} \tag{5}$$

où $\tau_j(p)$ est la longueur hyperbolique du segment de $\gamma_j(p)$ joignant $c_{j,1}(p)$ à $c_{j,2}(p)$. La fonction θ_j est définie modulo 2π. Le lemme 4.3 implique que $l_j(p)$ définit une fonction analytique réelle sur l'espace de Fricke.

Théorème 4.5. *L'application*

$$\begin{array}{cccc} \Psi: & \mathcal{T}(S) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times (S^1)^{3g-3} \\ & p & \mapsto & (l_1(p), \ldots, l_{3g-3}(p), \exp(i\theta_1(p)), \ldots, \exp(i\theta_{3g-3}(p))) \end{array}$$

est un revêtement analytique réel.

On montre que Ψ est analytique en vérifiant que les relevés dans $\mathbb{H}$ des points $c_{j,k}(p)$ dépendent analytiquement des paramètres de Fricke des bouts de géodésiques relevant $\gamma_j(p)$, $\gamma_{j,k}(p)$ et $C_{j,k}(p)$. Pour la surjectivité de Ψ et la construction de sections locales, on montre une version géométrique (un cas particulier d'un théorème de combinaison de Klein-Maskit) de la construction de groupes par amalgames ou extension HNN. Dans le premier cas (le second est similaire), l'énoncé est le suivant :

Théorème 4.6. *Soit Γ_1 et Γ_2 des modèles fuchsiens de pantalons hyperboliques tels qu'il existe $\gamma \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, et B_1 et B_2 les composantes de $\mathbb{H} \setminus \mathrm{axe}(\gamma)$. Si δ est hyperbolique et de même axe que γ, alors le groupe Γ_δ engendré par Γ_1 et $\delta\Gamma_2\delta^{-1}$ est fuchsien et dépend analytiquement (comme sous-ensemble de $PSL(2, \mathbb{R})$) de la longueur de translation de δ. De plus, si $p_i : \mathbb{H} \to \mathbb{H}/\Gamma_i$ est le revêtement métrique, alors $\mathbb{H}/\Gamma_\delta$ est isométrique à l'union de $p_1(\mathbb{H}) \setminus p_1(B_1)$ et $p_2(\delta\mathbb{H}) \setminus p_2(\delta B_2)$ le long de la gédésique $\mathrm{axe}(\gamma)/ < \gamma >$.*

Par le théorème 4.5, il existe un groupe G de difféomorphismes de $\mathcal{T}(S)$ tel que $\mathcal{T}(S)/G$ est difféomorphe à $(\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times (S^1)^{3g-3}$. On vérifie facilement que pour tout $j = 1, \ldots, 3g-3$ et $p = [R, \phi] \in \mathcal{T}(S)$, le *twist de Dehn* $T_j : R \to T_j(R)$ le long de la géodésique $\gamma_j(p)$ induit un difféomorphisme de $\mathcal{T}(S)$ qui préserve les fibres de Ψ, c'est-à-dire tel que $\Psi(T_j(p)) = \Psi(p)$. L'action du groupe $G = \mathbb{Z}^{3g-3}$ engendré par les twists T_j est libre. On en déduit :

Théorème 4.7. *L'application Ψ se relève en un difféomorphisme analytique réel*

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\Psi}: & \mathcal{T}(S) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^+)^{3g-3} \times \mathbb{R}^{3g-3} \\ & p & \mapsto & (l_1(p), \ldots, l_{3g-3}(p), \theta_1(p), \ldots, \theta_{3g-3}(p)) \end{array}$$

appelé les coordonnées de Fenchel-Nielsen.

L'application de Fenchel-Nielsen $\tilde{\Psi}$ définit des coordonnées globales sur $\mathcal{T}(S)$, qui sont complètement déterminées par le choix du découpage en pantalons de S.

4.3. **Le plongement de Fricke-Klein.** On peut construire des coordonnées analytiques *locales* sur $\mathcal{T}(S)$ en utilisant les longueurs de $9g-9$ géodésiques fermées simples sur S. (On peut montrer que ce nombre est optimal). Ces coordonnées peuvent être utilisées, par exemple, pour compactifier $\mathcal{T}(S)$ au sens de Thurston. L'idée est de substituer à chaque paramètre de torsion θ_j dans (5) les longueurs de deux courbes convenables qui intersectent γ_j.

Avec les notations du paragraphe précédent, pour tout j soit $W_j = P_{j,1} \cup \gamma_j \cup P_{j,2}$ (une sphère privée de quatre petits disques ouverts et plongée dans S). On fixe une courbe fermée simple α_j sur W_j qui intersecte γ_j, et on note β_j la courbe obtenue en appliquant à α_j le twist de Dehn le long de γ_j. Soit $p : \mathbb{R} \to \mathcal{T}(S)$ la courbe définie par la *déformation de Fenchel-Nielsen*

$$p(s) = \tilde{\Psi}^{-1}(l_1, \ldots, l_{3g-3}, \theta_1, \ldots, \theta_{j-1}, \theta_j + s, \theta_{j+1}, \ldots, \theta_{3g-3})$$

issue du point $p_0 = p(0)$. Pour chaque $p(s) = [R_s, \phi_s] \in \mathcal{T}(S)$ on note $\alpha_j(p(s))$ la géodésique de R_s librement homotope à $\phi_s(\alpha_j)$. Le résultat suivant est fondamental :

Théorème 4.8. *La fonction $f : s \mapsto l(\alpha_j(p(s)))$ est strictement convexe et propre. En particulier, elle atteint son minimum en un unique point.*

La preuve, assez difficile, repose sur le fait que $f(s)$ est l'infimum en α_j^0 de la somme des longueurs des arcs $\alpha_j^0 \cup P_{j,1}(p_0)$ et $\alpha_j^0 \cup P_{j,2}(p_0)$ (en supposant pour simplifier que α_j intersecte γ_j en deux points), où α_j^0 est la trace sur R_0 d'une courbe librement homotope à $\alpha_j(p(s))$, et on note que $P_{j,k}(p(s))$ est isométrique à $P_{j,k}(p_0)$. Ces longueurs sont déterminées dans la métrique de R_0 à l'aide de la dernière affirmation du théorème 4.6, et on a :

Proposition 4.9. *Soit γ_1 et γ_2 des arcs géodésiques disjoints dans $\mathbb{H}$. Pour tous x, $x' \in \gamma_1$ et y, $y' \in \gamma_2$, on note x_0 et y_0 les milieux des arcs géodésiques $[x, x']$ et $[y, y']$. On a*

$$d(x_0, y_0) \leq \frac{d(x, y) + d(x', y')}{2}$$

avec égalité si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$. Donc la fonction distance hyperbolique $d(x, y)$ est strictement convexe sur $\{(x, y) \in \mathbb{H}^2 \mid x \in \gamma_1, y \in \gamma_2\}$.

Remarquons que la proposition 4.9 exprime de manière qualitative le fait que l'espace hyperbolique est de courbure négative. Ainsi, on a des cas d'égalité non triviaux dans $\mathbb{R}^2$ (courbure 0), et des cas où l'inégalité opposée a lieu sur S^2 (courbure 1).

Pour tout $p \in \mathcal{T}(S)$ et tout $j = 1, \ldots, 3g-3$ on pose $l_j(p) = l(\gamma_j(p))$, $l_{3g-3+j}(p) = l(\alpha_j(p))$ et $l_{6g-6+j}(p) = l(\beta_j(p))$. Le théorème 4.8 montre que l'application $s \mapsto (f(s), f(s+2\pi))$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ est analytique réelle, propre, et injective (par convexité de f). Comme $f(s+2\pi) = l(\beta_j(t(s)))$, le théorème 4.7 implique :

Théorème 4.10. (Plongement de Fricke-Klein) *L'application $l : \mathcal{T}(S) \to (\mathbb{R}^+)^{9g-9}$ définie par $l(p) = (l_1(p), \ldots, l_{9g-9}(p))$ est un plongement analytique propre.*

Comme pour les coordonnées de Fenchel-Nielsen, on vérifie facilement que pour tout choix de découpage en pantalons et des courbes α_j de S les plongements de Fricke-Klein sont reliés par un difféomorphisme analytique réel.

5. Applications

On a la conséquence immédiate suivante du théorème 4.10 :

Théorème 5.1. *Les parties relativement compactes de $\mathcal{T}(S)$ sont les parties dont l'image par le plongement de Fricke-Klein est bornée.*

On va finalement montrer que l'action du groupe modulaire $\mathcal{M}od(S)$ sur $\mathcal{T}(S)$ est proprement discontinue (Théorème 5.6) et à stabilisateurs finis (Théorème 5.5), puis en déduire le théorème de précompacité de Mumford (Corollaire 5.7). Dans un premier temps on doit introduire deux propriétés fondamentales du spectre des longueurs (Proposition 5.2 et Corollaire 5.4).

Soit R une surface hyperbolique compacte connexe orientée et sans bord, et $\mathcal{L} = \{\alpha_i\}$ une liste ordonnée des éléments de $\pi_1(R, x_0)$ (pour un x_0 arbitraire fixé). Le *spectre des longueurs ordonné* de R est la suite ordonnée des longueurs hyperboliques des géodésiques librement homotopes aux éléments de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R) = \{l(\alpha_i) \mid \alpha_i \in \mathcal{L}\}.$$

Soit α_i une suite quelconque de géodésiques fermées distinctes de R. Pour tout $p \in R$, soit $p_i \in \alpha_i$ tel que $d(p, p_i) = d(p, \alpha_i)$, et $\tilde{p}$, $\tilde{p}_i \in \mathbb{H}$ des relevés de p et p_i tels que $d(\tilde{p}, \tilde{p}_i) = d(p, p_i)$. Si γ_i est la transformation du revêtement métrique $p : \mathbb{H} \to R$ associée à α_i et $\tilde{p}_i \in \mathrm{axe}(\gamma_i)$ on a

$$d(\tilde{p}, \gamma_i(\tilde{p})) \leq 2d(p, p_i) + l(\alpha_i). \tag{6}$$

Comme le groupe fuchsien de R agit proprement discontinuement sur $\mathbb{H}$, si la suite des α_i est infinie on a $d(\tilde{p}, \gamma_i(\tilde{p})) \to \infty$, et (6) implique que la suite des longueurs $l(\alpha_i)$ ne peut pas être uniformément majorée. D'où :

Proposition 5.2. *Pour tout $\mathcal{L}$ le spectre des longueurs $\mathcal{S}_{\mathcal{L}}(R)$ (ordonné ou pas) est discret.*

Pour la preuve du théorème 5.5, on doit considérer plus généralement une surface hyperbolique connexe et orientée *quelconque* (mais de genre non nul) R', dont l'aire peut être infinie. Son groupe fuchsien contient des éléments hyperboliques, et éventuellement des éléments paraboliques et des elliptiques (alors R' a des points singuliers de type orbifold). On a (la référence [Be] décrit également en détail des généralisations, conséquences et résultats de nature similaire) :

Lemme. [Be] Si f et g sont des isométries de $\mathbb{H}$ de type hyperbolique et d'axes distincts, alors pour tout $z \in \mathbb{H}$ on a

$$\sinh(d(z, f(z))/2)\ \sinh(d(z, g(z))/2) \geq 1.$$

Corollaire 5.3. (Lemme du collier.) *Soit α_1, α_2 des lacets géodésiques simples sur R', qui sont distincts et s'intersectent. Alors* $\sinh(l(\alpha_1)/2)\ \sinh(l(\alpha_2)/2) \geq 1$. *En particulier, si α est un lacet géodésique simple de R' de longueur l, l'ensemble*

$$C(\alpha) = \{p \in R' \mid d(p, \alpha) < m(l)\}$$

est un voisinage annulaire plongé de α, où $m(l) = \mathrm{arcsinh}(1/\sinh(l/2))$.

Corollaire 5.4. *Il existe une constante universelle $r_0 > 0$ telle que R' a un disque hyperbolique plongé de rayon $r > r_0$.*

En effet, dans le cas contraire il existe un lacet géodésique simple α arbitrairement court sur R'. Alors le corollaire 5.3 montre qu'on peut trouver un disque hyperbolique arbitrairement large dans $C(\alpha)$, ce qui donne une contradiction.

On utilise le corollaire 5.4 pour montrer que le groupe $\mathrm{Aut}(R)$ des isométries de la surface hyperbolique compacte sans bord R qui préservent l'orientation est de cardinal fini. Si Γ est un groupe fuchsien, on vérifie immédiatement que son *normalisateur*

$$N(\Gamma) = \{\gamma \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid \gamma\Gamma\gamma^{-1} \in \Gamma\}$$

est aussi un groupe fuchsien ($N(\Gamma)$ peut contenir des éléments elliptiques ou paraboliques). Si Γ est un modèle fuchsien de R on a un isomorphisme $\mathrm{Aut}(R) \cong N(\Gamma)/\Gamma$. D'après le corollaire 5.4, l'aire d'un domaine fondamental P_N de $N(\Gamma)$ est minoré par l'aire d'un disque hyperbolique de rayon r_0 (ici, la surface R' est $\mathbb{H}/N(\Gamma)$). Si P est un domaine fondamental de Γ et $\{\gamma_i\}$ est une liste de représentants pour les classes de $N(\Gamma)/\Gamma$, on a $\cup_i \gamma_i(P_N) \subset P$ et $\gamma_i(P_N) \cap \gamma_j(P_N) = \emptyset$ pour $i \neq j$. Comme l'aire de P est finie, on en déduit la finitude de la liste $\{\gamma_i\}$. D'où :

Théorème 5.5. *Le groupe $Aut(R)$ des automorphismes de R est fini.*

On peut montrer que le cardinal de $\mathrm{Aut}(R)$ est au plus $84(g-1)$, où g est le genre de R.

Enfin, soit S une surface compacte connexe orientée et sans bord, et $\mathcal{L}$ une liste ordonnée des éléments de $\pi_1(S)$. Ce choix définit pour tout point de $\mathcal{T}(S)$ un spectre des longueurs. Supposons qu'il existe $\{g_k\}$ une suite de $\mathcal{M}od(S) = \mathrm{Diff}^+(S)/\mathrm{Diff}_0(S)$ et $[R, \phi], [R_0, \phi_0] \in \mathcal{T}(S)$ deux points tels que $[R_k, \phi_k] = g_k.[R, \phi]$ vérifie $[R_k, \phi_k] \to [R_0, \phi_0]$. Si f_k est un difféomorphisme qui représente la classe

g_k, on a une bijection naturelle $f_k^* : \mathcal{S_L}(R) \to \mathcal{S_L}(R_k)$ entre spectres des longueurs ordonnés. Comme $\mathcal{S_L}(R_k) \to \mathcal{S_L}(R_0)$ dans $(\mathbb{R}^+)^\infty$, et $\mathcal{S_L}(R)$ et $\mathcal{S_L}(R_0)$ sont discrets, pour chaque $\alpha \in \pi_1(R)$ on a $f_k^*(l(\alpha))$ constant pour k assez grand. En particulier, en notant l_j les coordonnées de Fricke-Klein de $p = [R, \phi]$, pour tout k assez grand et $l > k$ on a $f_l^* \circ (f_k^*)^{-1}(l_j) = l_j$. Donc $g_l.[R, \phi] = g_k.[R, \phi] \in \mathcal{T}(S)$ (Théorème 4.10). Avec le théorème 5.5 on déduit que la suite $\{g_k\}$ est fini. D'où :

Théorème 5.6. *L'action du groupe modulaire $\mathcal{M}od(S)$ sur $\mathcal{T}(S)$ est proprement discontinue.*

Rappelons qu'un orbifold est un espace topologique dont tout point admet un voisinage homéomorphe au quotient de $\mathbb{R}^n$ par un sous-groupe fini de $GL(n, \mathbb{R})$. On a :

Corollaire 5.7. *1) L'espace topologique quotient $\mathcal{M}_g = \mathcal{T}(S)/\mathcal{M}od(S)$ est un orbifold séparé (de Hausdorff) muni d'une structure analytique réelle et de dimension $6g - 6$.*
2) (Précompacité de Mumford) *Soit $\{R_n\}$ une suite de surfaces hyperboliques compactes sans bord et de même genre g. Si les longueurs de leurs géodésiques les plus courtes sont uniformément minorées, alors la suite $\{R_n\}$ sous-converge dans l'espace $\mathcal{M}_g$.*

L'espace $\mathcal{M}_g$ est appelé *l'espace des modules des surfaces hyperboliques de genre g*. Le point 1) est une conséquence directe des théorèmes 5.5 et 5.6. Pour 2), on observe que si les spectres des longueurs des surfaces R_n sont uniformément minorés, alors la preuve du théorème 4.4 implique que pour tous systèmes de découpages en pantalons des R_n, les diamètres des pantalons sont bornés. Donc la suite $\{R_n\}$ de $\mathcal{M}_g$ peut être représentée par une suite de points de $\mathcal{T}(S)$ dont les coordonnées de Fricke-Klein sont uniformément minorées *et* majorées. La conclusion vient alors du théorème 5.1.

Références

[A] W. Abikoff, *The Real Analytic Theory of Teichmüller Space*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 820, Springer, Berlin New-York, 1980;

[Be] A.F. Beardon, *The geometry of Riemann surfaces*, in "Topics on Riemann Surfaces and Fuchsian Groups", London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 287 (2001);

[BG] M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie Différentielle : Variétés, Courbes et Surfaces*, Presses Universitaires de France, seconde édition, 1992;

[BP] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Universitext, Springer, Berlin Heidelberg, 1992;

[GHL] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine, *Riemannian Geometry*, Springer, Berlin, second edition, 1990;

[H] M.W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate Texts in Math. 33, Springer, Berlin, 1976;

[IT] Y. Imayoshi, M. Taniguchi : *An Introduction to Teichmüller Spaces*, Springer, Tokyo, 1992;

[T] W. Thurston, *Three-Dimensional Geometry and Topology*, Vol. 1, S. Levy éd., Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1997;

[ZVC] H. Zieschang, V. Vogt, H-D. Coldewey, *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, Lecture Notes in Mathematics Vol. 835, Springer, Berlin New-York, 1980;