

LES THÉORIES QUANTIQUES DES CHAMPS HYPERBOLIQUES

Stéphane Baseilhac¹

*Os que avançam de frente para o mar
E nele enterram como uma aguda faca
A proa negra dos seus barcos
Vivem de pouco pão e de luar.*

Sophia de Mello Breyner Andresen
Lusitânia, in *Mar Novo*

CONTENTS

1. Introduction	1
2. La conjecture du volume	3
3. Cobordismes et propriétés des TQCH	5
4. Origines : dilogarithmes quantiques et invariants de Cheeger-Chern-Simons	10
4.1. Dilogarithmes quantiques et dilogarithmes classiques	10
4.2. Dilogarithmes quantiques et $6j$ -symboles	11
4.3. Invariants de Cheeger-Chern-Simons et combinatoire des triangulations	13
5. Classes de découpage	15
5.1. \mathcal{I} -tétraèdres, redressements et charges	15
5.2. \mathcal{I} -triangulations, redressements et charges globales	17
5.3. Poids, existence et classes d'isomorphisme	19
5.4. Un exemple singulier : les variétés hyperboliques à pointes	21
5.5. Idérialisation et homologie discrète de $PSL(2, \mathbb{C})$	23
6. Invariants des 3-variétés	24
6.1. Dilogarithmes matriciels et tenseurs $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$	24
6.2. Invariants; le cas des variétés hyperboliques à pointes	26
7. Travaux actuels et perspectives	27
References	29

1. INTRODUCTION

Après la découverte du polynôme de Jones en 1984 [54], la théorie des invariants quantiques des variétés de dimension trois et des noeuds dans ces variétés, ou “topologie quantique”, s’est développée de manière spectaculaire. Elle s’est nourrie de ses relations profondes avec la physique théorique [1, 102] (voir aussi [65]), et en a établi de nouvelles entre de nombreuses branches des mathématiques, par exemple la combinatoire des variétés et la théorie des représentations des groupes quantiques [27, 63]. C’est probablement de là que sont issus ses produits les plus achevés, comme les théories *skein* [66, 13], les théories quantiques des champs topologiques [95, 67, 14, 100], et la théorie des invariants de type fini (voir eg. [101]), qui ont largement éclairé les structures algébriques et perturbatives gouvernant la construction des invariants quantiques. Une application importante est la preuve de la fidélité asymptotique des suites de représentations linéaires (projectives) des groupes modulaires associées au groupe quantique $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ [2, 43, 78].

¹ URL : www-fourier.ujf-grenoble.fr/~baseilha

Les invariants quantiques ont aussi semblé pouvoir s'imposer comme un cadre permettant de résoudre des problèmes anciens et difficiles de topologie. Pourtant cet espoir a été déçu, et leur *signification* reste encore aujourd'hui largement mystérieuse (voir le recueil de problèmes [86]). En particulier, jusqu'à récemment la topologie quantique n'avait que très peu, et indirectement, interagi avec la géométrie hyperbolique, un thème majeur du programme de géométrisation de W. Thurston, qui avait parallèlement envahi la topologie de dimension trois. La première² relation entre ces deux domaines a été établie en 1997 par la conjecture du volume de R. Kashaev [58]. Celle-ci propose que le *volume* d'un complémentaire de noeud $S^3 \setminus K$ qui admet une structure hyperbolique complète (unique d'après la rigidité de Mostow) est déterminé, via une relation simple et explicite, par la *croissance*³ de la suite de nombres complexes $\{J'_N(K)(e^{2i\pi/N})\}_N$, où $J'_N(K)$ est le polynôme de Jones *colorié* de K de couleur N [64], convenablement normalisé, et évalué en la racine de l'unité $e^{2i\pi/N}$.

La conjecture du volume implique des résultats fondamentaux pour la topologie quantique. Elle fait l'objet d'une activité très intense à travers le monde. Elle pose de nombreux problèmes techniques difficiles, notamment d'analyse asymptotique, mais surtout elle est surprenante. En fait, après dix ans un problème fondamental reste à savoir par quel bout la prendre. Il faut rappeler ici qu'à la différence des invariants issus de la topologie algébrique et de la géométrie différentielle, les invariants quantiques ont été *découverts*, et non pas construits pour distinguer ou quantifier certaines propriétés intrinsèques. Un problème central est qu'ils sont toujours définis de manière indirecte et combinatoire, via des diagrammes de noeuds, ou des triangulations ou des présentations par chirurgie pour les 3-variétés, et leur existence semble dépendre de correspondances profondes avec des structures algébriques très particulières (par exemple, les mouvements de Reidemeister entre diagrammes de noeuds et les R-matrices de la théorie des représentations des groupes quantiques). En particulier on dispose de nombreuses méthodes pour *calculer* $J'_N(K)$, mais d'aucune formulation/interprétation purement tridimensionnelle qui utilise les propriétés *globales* de $S^3 \setminus K$ et contient "en soi" la preuve de son existence. La conjecture du volume demande implicitement comment les données combinatoires supportant $J'_N(K)$ détectent la géométrie de $S^3 \setminus K$.

Dans ce mémoire je présente les résultats de mes travaux avec R. Benedetti [5, 6, 7, 8, 9], qui donnent des éléments de réponse à cette question. En essence, nous avons intégré $J'_N(K)$ dans de nouvelles familles d'invariants définis pour les 3-variétés compactes Y munies d'un entrelacs L et d'une représentation d'holonomie $\rho : \pi_1(Y \setminus L) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ (mod conjugaison), et construits par des formules simpliciales analytiques très similaires à celles connues du volume et de l'invariant de Chern-Simons, et supportées par les mêmes données. Elles diffèrent par l'utilisation de tenseurs issus de l'algèbre quantique, les *dilogarithmes matriciels*, au lieu du dilogarithme de Rogers. Outre les travaux de R. Kashaev sur ces familles de tenseurs [55, 56, 57], nous nous sommes appuyés sur ceux de W. Neumann [81, 82, 83] sur la seconde classe de Cheeger-Chern-Simons $\check{C}_2 \in H^3(BPSL(2, \mathbb{C})^\delta; \mathbb{Z})$ (cohomologie du groupe discret). La notion de *classe de découpage*, issue du 3ème problème de Hilbert, est ainsi centrale dans les TQCH. Ces théories sont liées aux espaces de Teichmüller quantiques de R. Kashaev [59], L. Chekhov et V. Fock [28], et F. Bonahon et X. Liu [18].

La section 2 est un bref état des lieux sur la conjecture du volume. La section 3 suffit pour une lecture rapide : elle contient les énoncés de nos résultats principaux sur les TQCH et s'achève avec un synopsis de leur construction, décrite en détails dans les sections 5 et 6 où je développe plus particulièrement le cas des variétés hyperboliques à pointes. Des travaux antérieurs sont rappelés dans la section 4.

²Parallèlement J. Przytycki et A. Sikora [88], et C. Frohman et ses collaborateurs [20, 21], ont relié la variété des caractères dans $SL(2, \mathbb{C})$ d'une variété de dimension trois à son module skein de Kauffman. Dans [45], ces derniers ont aussi proposé une version quantique du A-polynôme, développée par S. Garoufalidis et T.T.Q. Lê [46, 47], pour définir les polynômes de Jones colorés comme solutions d'une équation aux différences. Les liens avec la conjecture du volume sont mal compris.

³La conjecture du volume est distincte de celle, plus ancienne et suggérée par E. Witten, du développement perturbatif pour les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev $\tau_r(W)$ d'une 3-variété fermée W ([102, 91, 92], [68, 66]). Cette dernière conjecture prévoit que la croissance de la suite $\{\tau_r(W)\}_r$ est polynomiale en r lorsque $r \rightarrow \infty$, et que le terme dominant de son développement asymptotique dépend des caractères de W dans $SU(2)$ (voir [86, Ch. 7]). Cette conjecture n'a été considérée sur des exemples de variétés hyperboliques que dans [3].

Je conclus dans la section 7 avec mes recherches actuelles, sur l'analyse asymptotique des invariants quantiques hyperboliques et leurs relations avec les théories homotopiques de V. Turaev [96].

2. LA CONJECTURE DU VOLUME

Motivé par les relations entre le calcul du volume hyperbolique et les dilogarithmes classiques [73], R. Kashaev a proposé la conjecture du volume dans [58] pour décrire le comportement asymptotique d'une famille d'invariants $\langle K \rangle_N$ à valeurs complexes, définis pour les noeuds K de la sphère de dimension trois S^3 , qu'il venait de construire à l'aide des "dilogarithmes quantiques" [56] (voir le synopsis, section 3). Le rôle de cette conjecture ne fut pleinement reconnu qu'après les travaux de Hitoshi et Jun Murakami [77] montrant que $\langle K \rangle_N = J'_N(K)(e^{2i\pi/N})$, où $J'_N(K) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ est le polynôme de Jones $J_N(K)$ de K de couleur N , c'est-à-dire l'invariant quantique associé à la représentation irréductible de dimension N de l'algèbre de Lie $sl(2, \mathbb{C})$ [64], qu'on normalise en fixant sa valeur sur le noeud trivial égale à 1. Cette normalisation revient à diviser⁴ $J_N(K)$ par l'entier quantique $[N]_q = (q^{N/2} - q^{-N/2})/(q^{1/2} - q^{-1/2})$. H. et J. Murakami ont alors traduit la conjecture du volume de la manière suivante :

Conjecture 2.1. (Conjecture du Volume) Soit K un noeud hyperbolique de S^3 et $\text{Vol}(S^3 \setminus K)$ le volume de la structure hyperbolique complète de son complément. Alors

$$(1) \quad 2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |J'_N(K)(e^{2i\pi/N})|}{N} = \text{Vol}(S^3 \setminus K).$$

On peut étendre la conjecture du volume aux entrelacs non nécessairement hyperboliques et qui ne sont pas scindés (sinon $J'_N(K) \equiv 0$) en remplaçant dans (1) la limite par la limite supérieure, et $\text{Vol}(S^3 \setminus K)$ par $v_3 \|S^3 \setminus K\|$, où v_3 est le volume d'un tétraèdre hyperbolique idéal régulier et $\|S^3 \setminus K\|$ est le volume simplicial de Gromov de la variété (non compacte !) $S^3 \setminus K$ (voir [77], et [98], Conjecture 2). Un corollaire important de cette extension de la conjecture du volume est que les polynômes de Jones colorés, donc les invariants de Vassiliev, distinguent le noeud trivial ([86], Problèmes 2.6 et 3.3). Une version donnant le comportement asymptotique de la suite $\{J'_N(K)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N})\}_N$, et non seulement de son module complexe, en fonction du volume et de l'invariant de Chern-Simons de $S^3 \setminus K$ pour sa structure hyperbolique complète, a aussi été considérée [80, 98].

À ma connaissance la conjecture du volume a été prouvée pour les quatre noeuds hyperboliques avec le plus petit nombre de croisements : noeud "de huit" 4_1 (Ekholm, voir par exemple [86]), 5_2 (Yokota), 6_1 et 6_3 (Murakami-Yokota), et son extension aux entrelacs, décrite ci-dessus, a également été prouvée pour les noeuds toriques (Kashaev-Tirkonnen [62]), les doubles de Whitehead de certains noeuds toriques, et la famille infinie des "chaînes de Whitehead", qui inclut les entrelacs borroméens et de Whitehead (Van der Veen, [98]). Des confirmations numériques pour quelques autres noeuds se trouvent sur l'ArXiv (voir par exemple [80] et [49]).

Il est naturel de se demander ce qui se passe lorsqu'on remplace $J'_N(K)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N})$ par $J'_N(K)(e^{a/N})$, où $a \in \mathbb{C}$, dans (1). On doit alors considérer le volume de représentations de $\pi_1(S^3 \setminus K)$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$ autres que celle discrète et fidèle, qui détermine la structure hyperbolique complète de $S^3 \setminus K$ (conjecture de Gukov [52]). Murakami-Yokota [79] ont ainsi montré que pour le noeud de huit $K = 4_1$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{O}_K \subset \mathbb{C}$ de 0 tel que si $u \in \mathcal{O}_K$ alors la limite

$$(2) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |J'_N(K)(e^{(u+2\sqrt{-1}\pi)/N})|}{N}$$

existe, et la fonction de u

$$H(K; u) := (u + 2\sqrt{-1}\pi) \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |J'_N(K)(e^{(u+2\sqrt{-1}\pi)/N})|}{N}$$

est analytique sur \mathcal{O}_K et satisfait

$$(3) \quad \text{Im}(H(K; u)) = \text{Vol}(S^3 \setminus K; u) + \pi \text{Re}(u) + \frac{1}{2} \text{Re}(u) \text{Im}(v_K(u))$$

⁴Pour $q = e^{2i\pi/N}$ on a $[N]_q = 0$: donc $J'_N(K)(e^{2i\pi/N})$ est obtenu par une sorte de règle de l'Hôpital (C'est une remarque de R. Kashaev).

où $v_K(u) := -2\sqrt{-1}\pi + 2dH(K; u)/dt$. Ici, on note $\text{Vol}(S^3 \setminus K; u)$ le volume d'une représentation ρ_u de $\pi_1(S^3 \setminus K)$ dans $SL(2, \mathbb{C})$ telle que l'image du méridien et de la longitude aient pour valeurs propres $\exp(\pm u/2)$ et $\exp(\pm v_K(u)/2)$, respectivement (la représentation ρ_u est unique à conjugaison près). Le cas $u = 0$ correspond à l'holonomie de la structure hyperbolique complète de $S^3 \setminus K$, et à la Conjecture 2.1. Lorsque la représentation ρ_u définit une structure hyperbolique au voisinage de la structure complète et dont la complétion est une variété fermée obtenue par un remplissage de Dehn de $S^3 \setminus K$, alors $-\text{Im}(uv_K(u))/2\pi$ est la longueur de l'âme (géodésique) γ du remplissage, et (3) devient

$$\text{Im}(H(K; u)) = \text{Vol}(S^3 \setminus K; u) + \pi \text{Re}(u) + \frac{1}{4} \text{Im}(uv_K(u)) + \frac{\pi}{2} \text{long}(\gamma)$$

où $\text{Vol}(S^3 \setminus K; u)$ est le volume de la variété complétée, et la pente p/q du remplissage de Dehn satisfait $pu + qv_K(u) = 2\sqrt{-1}\pi$. Pour les noeuds toriques H. Murakami a calculé dans [75] la limite (2) (qui ne définit cependant pas une fonction continue de u en 0), puis vérifié que l'identité (3) a lieu [76], et proposé pour tout noeud K une version "paramétrée" de la conjecture 2.1 sous cette forme. Le développement asymptotique complet de $J'_N(K)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N})$ lorsque $N \rightarrow \infty$ pour un noeud torique K est maintenant bien compris (Dubois-Kashaev [34]).

Dans une autre direction, les polynômes de Jones ont été étendus comme fractions rationnelles aux entrelacs dans les sommes connexes de copies de $S^2 \times S^1$, et une conjecture du volume étendue à ces invariants a été prouvée pour une famille infinie d'entrelacs hyperboliques "universels", en la structure complète et certaines de ses déformations (Costantino [30, 31])⁵. Enfin, on a la version analytique suivante de la conjecture de Melvin-Morton (voir [48] pour la preuve) : pour tout noeud K de S^3 il existe un ouvert \mathcal{O}_K de \mathbb{C} contenant 0 tel que pour tout $a \in \mathcal{O}_K$ on ait

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J'_N(K)(\exp(a/N)) = \Delta(K; \exp(a))^{-1},$$

où $\Delta(K)$ est le polynôme d'Alexander de K et la convergence est uniforme sur les compacts de \mathcal{O}_K . Ce résultat est compatible avec (3) (pour $|a| \ll 1$, $u = a - 2\sqrt{-1}\pi$ est proche de $-2\sqrt{-1}\pi$ et la représentation ρ_u est abélienne, proche de la représentation triviale, et de volume nul).

Tous ces travaux traitent d'entrelacs assez particuliers, et ont abordé la conjecture du volume par une analyse directe qui se révèlent vite techniquement difficile. On a déjà mentionné qu'il n'existe pas de formulation tridimensionnelle globale des polynômes de Jones coloriés. Par conséquent, une telle analyse consiste en :

- (a) la détermination de "formules efficaces" pour chaque noeud K (ou des familles déterminées);
- (b) la preuve de l'existence de la limite (2) à partir de ces formules (la limsup existe toujours, voir par exemple [48]);
- (c) l'identification de cette limite comme volume d'une représentation d'holonomie dans $PSL(2, \mathbb{C})$.

Les invariants $J'_N(K)(e^{2i\pi/N})$ peuvent toujours être écrits comme des séries q -hypergéométriques tronquées, évaluées en $q = e^{2i\pi/N}$. Leurs termes sont des fractions rationnelles en

$$(4) \quad (q)_n = (1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^n)$$

(on pose $(q)_0 := 1$), et ils oscillent beaucoup lorsque $N \rightarrow \infty$. Ainsi, des propriétés de symétrie vérifiées par les polynômes de Jones coloriés [68] impliquent que pour tout $l \neq r$ la suite $\{|J_r(K)(e^{2i\pi/l})|\}_r$ est bornée⁶, alors que la conjecture du volume prédit une croissance exponentielle de $\{J'_N(K)(e^{2i\pi/N})\}_N$.

⁵J. Murakami a aussi vérifié une version de la conjecture du volume pour les entrelacs borroméens, en remplaçant J'_N par les invariants quantiques de Akutsu-Deguchi-Ohtsuki.

⁶C'est une remarque de T.T.Q. Lê. De telles suites sont utilisées pour définir les invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev pour $U_q(sl(2, \mathbb{C}))$ (cf. note ²) : si W est obtenue par chirurgie sur un entrelacs parallélisé L de S^3 , on a $\tau_r(W) = \alpha_L \sum_{\mathbf{k}=1}^{r-1} [\mathbf{k}] J_{\mathbf{k}}(L)(e^{2i\pi/r})$, où $\alpha_L = b^{n_L} c^{\sigma_L}$, $b = \sqrt{2/r} \sin(\pi/r)$, $c = \exp(-6\pi i(r-2)/8r)$, n_L est le nombre de composantes de L et σ_L la signature de sa matrice d'enlacement, $[\mathbf{k}] = \prod_{i=1}^{n_L} [k_i]_{e^{2i\pi/r}}$ (produit d'entiers quantiques), et $J_{\mathbf{k}}(L)$ est le polynôme de Jones de L de couleur $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n_L})$, avec $0 < k_i < r$ ([68, (1.5)]).

Par exemple, pour le noeud de huit 4_1 et le noeud 5_2 on a

$$\begin{aligned} J'_N(4_1)(q) &= \sum_{n=0}^{N-1} |(q)_n|^2 \in \mathbb{R}_+ \\ J'_N(5_2)(q) &= \sum_{0 \leq m < n < N} \frac{(q)_n^2}{(\bar{q})_m} q^{-m(n+1)} \end{aligned}$$

où \bar{q} est le conjugué complexe de q .

En général on peut tenter de montrer que $\{J'_N(K)(e^{2i\pi/N})\}_N$ est asymptotiquement équivalent à une suite d'intégrales indexées par N d'une fonction de plusieurs variables complexes, puis prouver (b)-(c) ci-dessus en appliquant *in extenso* la méthode du col (voir [58], [62, 105, 79] et [3]). Il semble cependant difficile d'obtenir des informations qualitatives en suivant une telle approche. D'un autre côté, les exemples considérés par Kashaev dans [55, 58] montraient le rôle crucial, autant pour l'heuristique de la conjecture du volume que pour les problèmes d'analyse asymptotique, d'une ressemblance formelle entre certaines expressions de $J'_N(K)(e^{2i\pi/N})$ et des formules simpliciales connues du volume de $S^3 \setminus K$ (voir [104, 105] pour un étude plus systématique). Cette observation est à l'origine de mon travail.

3. COBORDISMES ET PROPRIÉTÉS DES TQCH

Les TQCH sont des foncteurs définis sur une catégorie de cobordismes en dimension $(2+1)$ qu'on va commencer par décrire.

Pour chaque type topologique, on fixe une surface compacte sans bord et orientée S munie d'un ensemble non-vide de points marqués p_i . Chaque point p_i est "parallélisé" par un vecteur tangent v_i , et on suppose que $\chi(S \setminus \{p_i\}) < 0$. On note $-S$ la même surface avec l'orientation opposée, et $*S$ pour S ou $-S$. On considère deux difféomorphismes directs $\phi_1 : *S \rightarrow \Sigma$ et $\phi_2 : *S \rightarrow \Sigma$ comme équivalents s'ils sont reliés par une isotopie qui fixe les images des points marqués parallélisés (p_i, v_i) . On note $[*S, \phi]$ les classes d'équivalence de tels difféomorphismes.

On va maintenant décrire des structures géométriques additionnelles sur les classes $[*S, \phi]$. Soit

$$\text{Rep}(S \setminus \{p_i\}) = \text{Hom}(\pi_1(S \setminus \{p_i\}), PSL(2, \mathbb{C}))$$

la variété des représentations de $\pi_1(S \setminus \{p_i\})$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$, et

$$X(S \setminus \{p_i\}) = \text{Rep}(S \setminus \{p_i\}) // PSL(2, \mathbb{C})$$

son quotient défini par la théorie des invariants, la *variété des caractères de $S \setminus \{p_i\}$* . Rappelons que $\text{Rep}(S \setminus \{p_i\})$ a une structure canonique de variété algébrique complexe (obtenue en fixant un système de générateurs $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ de $\pi_1(S \setminus \{p_i\})$ et en plongeant $\text{Rep}(S \setminus \{p_i\})$ dans $PSL(2, \mathbb{C})^n$ via $\rho \mapsto (\rho(\gamma_1), \dots, \rho(\gamma_n))$). Pour étudier les représentations modulo conjugaison, et éviter les problèmes posés par les orbites qui ne sont pas fermées, on considère $X(S \setminus \{p_i\})$. C'est un ensemble algébrique affine tel qu'il existe une application régulière surjective

$$t : \text{Rep}(S \setminus \{p_i\}) \rightarrow X(S \setminus \{p_i\})$$

(la "trace"), qui induit un isomorphisme de l'anneau des fonctions régulières de $X(S \setminus \{p_i\})$ sur celui des fonctions régulières de $\text{Rep}(S \setminus \{p_i\})$ qui sont invariantes par conjugaison. En particulier les caractères des représentations irréductibles sont en bijection avec leurs classes de conjugaison.

A l'aide de *triangulations efficaces* τ de S canoniquement associées aux *triangulations idéales* de la surface $S \setminus \{p_i\}$ et à ses parallélisations locales (p_i, v_i) , on peut définir des espaces de paramètres $\mathcal{P}(\tau)$ pour les composantes d'une partition de $X(S \setminus \{p_i\})$, déterminée par les holonomies autour des points p_i [8, Section 3]. Par exemple, lorsque ces holonomies sont toutes non triviales, $\mathcal{P}(\tau)$ coïncide avec le revêtement universel des coordonnées de Bonahon-Thurston [94, 17] de l'espace des structures hyperboliques sur $S \setminus \{p_i\}$ pliées le long d'une triangulation idéale [93, 41]. En général, les points de $\mathcal{P}(\tau)$ sont des collections de nombres complexes associés aux arêtes de τ ; on les notera $\mathcal{L} = \{L(e)\}_{e \in \tau}$. On aura aussi besoin d'une collection d'entiers $\mathcal{C} = \{C(e)\}_{e \in \tau}$ (les *charges*), et, pour réduire certaines ambiguïtés des foncteurs TQCH, d'un système d'orientation des arêtes de τ qui induit un ordre total

sur les sommets de chaque triangle (on dit que τ est *branchée*). On obtient finalement des surfaces de base $(*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}))$, et les classes $[*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi]$ des difféomorphismes $\phi : (*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C})) \rightarrow \Sigma$.

Soit Y une variété de dimension trois compacte et orientée, et $L_{\mathcal{F}}$ un enchevêtrement parallélisé *non-vide* de Y , c'est-à-dire l'union d'anneaux orientables dans l'intérieur de Y , et de quadrilatères $I \times [0, 1]$ proprement plongés, qui intersectent ∂Y le long de l'image de $\partial I \times [0, 1]$. On considère $L_{\mathcal{F}}$ à isotopie ambiante près relativement au bord ∂Y , qu'on oriente positivement par rapport à un champs de vecteur sortant. Pour chaque composante Σ de ∂Y on suppose que $\Sigma \cap L_{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, et que la caractéristique d'Euler de $\Sigma \setminus L_{\mathcal{F}}$ est négative. En particulier il existe $\phi : *S \rightarrow \Sigma$ tel que $\phi(\{(p_i, v_i)\}_i)$ corresponde aux arcs de $\Sigma \cap L_{\mathcal{F}}$. On munit ∂Y d'une bipartition $\partial Y = \partial_- Y \cup \partial_+ Y$, et on notera $U(L_{\mathcal{F}})$ un voisinage tubulaire de $L_{\mathcal{F}}$.

Rappelons que $PSL(2, \mathbb{C})$ est le groupe des automorphismes conformes de \mathbb{CP}^1 , qu'on identifie avec le bord $\partial \mathbb{H}^3$ du modèle du demi-espace de Poincaré de l'espace hyperbolique. Pour toute représentation $\rho \in \text{Rep}(S \setminus \{p_i\})$, et l'image par ρ de chaque sous-groupe périphérique de $\pi_1(S \setminus \{p_i\})$, on choisit un point fixe sur $\partial \mathbb{H}^3$ de manière équivariante par rapport aux choix des points base et des arcs les joignant (action de $\pi_1(S \setminus \{p_i\})$ par conjugaison et de $PSL(2, \mathbb{C})$ par transformations de Moëbius). Si l'image d'un sous-groupe périphérique est parabolique, il a un unique point fixe; s'il est loxodromique deux choix sont possibles; s'il est trivial, on peut prendre n'importe quel point de \mathbb{CP}^1 . L'ensemble des points fixes est en fait associé au caractère de ρ . On procède de même pour les caractères des 3-variétés $Y \setminus L_{\mathcal{F}}$ et les sous-groupes périphériques images des applications $\pi_1(\partial U(L_{\mathcal{F}})) \rightarrow \pi_1(Y \setminus L_{\mathcal{F}})$ induites par l'inclusion. Dans la suite, pour alléger les notations cette donnée supplémentaire, ou *augmentation* des caractères de $X(S \setminus \{p_i\})$ et $X(Y \setminus L_{\mathcal{F}})$, sera implicite.

Definition 3.1. ([8, Section 4]) *La catégorie TQCH a :* pour objets l'ensemble vide et toute union finie des classes $[*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi]$; pour morphismes les 4-uplets $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$, où ρ est un caractère de $\pi_1(Y \setminus L_{\mathcal{F}})$ dans $PSL(2, \mathbb{C})$, et $\alpha_{\pm} = \coprod_{\phi(*S) \in \partial_{\pm} Y} [*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi]$ est tel que pour chaque composante le caractère $\phi^*(\rho)$ de S coïncide avec celui défini par \mathcal{L} . On dit que $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho)$ est le support d'un bordisme de α_- vers α_+ . Soit $\mathcal{B} = (Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$ et $\mathcal{B}' = (Y', L'_{\mathcal{F}}, \rho', \alpha'_{\pm})$ deux bordismes tels que β_+ and β'_- sont des sous-objets de α_+ et α'_- qui coïncident sauf pour l'orientation. En recollant \mathcal{B} et \mathcal{B}' le long de β_+ on obtient un bordisme $\mathcal{B}'' = (Y'', L''_{\mathcal{F}}, \rho'', \alpha''_{\pm})$, où $\alpha''_- = \alpha_- \cup (\alpha'_- \setminus \beta'_-)$ et $\alpha''_+ = \alpha'_+ \cup (\alpha_+ \setminus \beta_+)$. On appelle \mathcal{B}'' la *composition* de \mathcal{B} suivie de \mathcal{B}' , et on le note $\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' * \mathcal{B}$.

La géométrie hyperbolique fournit naturellement de nombreux exemples de bordismes TQCH.

Soit maintenant $N \geq 1$ un entier impair. Pour tout $\alpha \in \text{Ob}(\text{TQCH})$ on définit un espace vectoriels $\mathcal{H}_N(\alpha)$ de la façon suivante. On pose $\mathcal{H}_N(\emptyset) = \mathbb{C}$. Ensuite, notons $V = \mathbb{C}^N$ et V^{-1} son dual. On munit V de sa base canonique $\{e_i\}$ et du produit scalaire hermitien de base orthonormale les vecteurs e_0 et $(e_i + e_{N-i})/\sqrt{2}$, pour $i = 1, \dots, N-1$. Pour tout objet $[*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi]$ on ordonne les 2-simplexes t de τ . Alors $\mathcal{H}_N([*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi]) = \otimes_{t \in \tau(2)} V^{\sigma_{\pm}(t)}$, où $\sigma_{\pm}(t) = 1$ si l'orientation du simplexe t (définie par son branchement) coïncide avec celle de $*S$, et $\sigma_{\pm}(t) = -1$ sinon. Enfin, $\mathcal{H}_N(\alpha)$ est le produit tensoriel des espaces $\mathcal{H}_N([*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi])$ associés aux composantes (ordonnées) de α .

Les TQCH sont des extensions fonctorielles de \mathcal{H}_N aux bordismes $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$, que l'on doit équiper de structures additionnelles de la manière suivante. Notons $r : H^1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'application de réduction modulo 2 des coefficients, et $i^* : H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rightarrow H^1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ l'application induite par l'inclusion $\partial U(L_{\mathcal{F}}) \subset Y$. Pour tout $a \in H_1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{Z})$, soit $\gamma'(a)$ le logarithme naturel de la dérivée de $\rho(a)$, l'holonomie de a , qu'on identifie à une similitude plane via l'augmentation de ρ ($\gamma'(a)$ est donc le carré d'une valeur propre de $\rho(a)$). Soit $(h_c, k_c) \in H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{Z})$, et $(h_f, k_f) \in H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{C})$ tels que

$$(5) \quad \begin{cases} (k_f - \gamma')/\sqrt{-1}\pi \in H^1(\partial U(L_{\mathcal{F}}); \mathbb{Z}) \\ r((k_f - \gamma')/\sqrt{-1}\pi) = i^*(h_f). \end{cases}$$

Definition 3.2. On appelle $\mathfrak{h} = ((h_c, k_c); (h_f, k_f))$ un *poïds* pour le bordisme $\mathcal{B} = (Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$.

Un objet naturellement associé à chaque paire $(Y, L_{\mathcal{F}})$ est son *espace des phases*, défini de la façon suivante. Supposons que chaque composante de ∂Y est seulement *marquée topologiquement*, c'est-à-dire donnée par une classe $[*S, \tau, \phi]$. L'inclusion $\partial U(L_{\mathcal{F}}) \subset Y \setminus L_{\mathcal{F}}$, où $U(L_{\mathcal{F}})$ est un voisinage

tubulaire de $L_{\mathcal{F}}$, induit une application régulière $p : X(Y \setminus L_{\mathcal{F}}) \rightarrow X(\partial U(L_{\mathcal{F}}))$ entre variétés des caractères.

Definition 3.3. ([8, Section 5]) L'espace des phases $Def(Y, L_{\mathcal{F}})$ de $(Y, L_{\mathcal{F}})$ est le produit de $p(X(Y \setminus L_{\mathcal{F}}))$ et des espaces de paramètres $\mathcal{P}(\tau)$ associés aux composantes de ∂Y .

Le coeur des TQCH est la construction d'applications linéaires

$$\mathcal{H}_N(\mathcal{B}, \mathfrak{h}) : \mathcal{H}_N(\alpha_-) \rightarrow \mathcal{H}_N(\alpha_+)$$

définies modulo la multiplication par une racine Nième de l'unité, et qui vérifient les propriétés suivantes :

1. **(Fonctorialité)** ([8, Proposition 5.7]) Comme dans la définition 3.1 on peut définir naturellement la composition des paires $(\mathcal{B}, \mathfrak{h})$. Pour toute composition $(\mathcal{B}'', \mathfrak{h}'') = (\mathcal{B}', \mathfrak{h}') * (\mathcal{B}, \mathfrak{h})$ on a

$$\mathcal{H}_N(\mathcal{B}'', \mathfrak{h}'') = \mathcal{H}_N(\mathcal{B}', \mathfrak{h}') \circ \mathcal{H}_N(\mathcal{B}, \mathfrak{h}).$$

2. **(Polarité)** ([7, Proposition 4.29], [8, Proposition 5.8]) Soit $\bar{\mathcal{B}}$ le bordisme obtenu à partir de \mathcal{B} en renversant l'orientation et en remplaçant son holonomie par la conjuguée complexe. Alors $\mathcal{H}_N(\bar{\mathcal{B}}, \mathfrak{h}) = \mathcal{H}_N(\mathcal{B}, \mathfrak{h})^*$, l'adjoint pour la structure hermitienne des espaces $\mathcal{H}_N(\alpha_{\pm})$.

3. **(Analyticité)** ([8, Proposition 5.10]) $\mathcal{H}_N((Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}), \mathfrak{h})$ varie analytiquement avec $(p(\rho), \mathcal{L}_{\pm}) \in Def(Y, L_{\mathcal{F}})$, où \mathcal{L}_{\pm} est le système de paramètres complexes de α_{\pm} . On ne sait pas encore si $\mathcal{H}_N((Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}), \mathfrak{h})$ dépend seulement de $(p(\rho), \mathcal{L}_{\pm})$ et de la composante connexe de ρ dans $X(Y \setminus L_{\mathcal{F}})$ (propriété de rigidité).

Un cas particulier important correspond aux cylindres $(Y, L_{\mathcal{F}}) \cong (S, \{(p_i, v_i)\}) \times [-1, 1]$. Notons $\text{Mod}(S)$ le groupe des difféotopies de S , c'est-à-dire le groupe des classes d'homotopie rel($\{(p_i, v_i)\}$) des difféomorphismes directs qui fixent les points parallélisés (p_i, v_i) . Soit $\psi_{\pm} : (\pm S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C})) \rightarrow S \times \{\pm 1\}$, $\psi = \psi_+^{-1} \psi_-$, et $[\psi] \in \text{Mod}(S)$ sa classe. Soit $\rho \in X((S \setminus \{p_i\}) \times [-1, 1]) \cong X(S \setminus \{p_i\})$ le caractère associé aux paramètres \mathcal{L} . On a $\mathcal{H}_N([\pm S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \psi_{\pm}]) = \otimes_{t \in \tau(2)} V^{\sigma_{\pm}(t)}$, et :

4. **(Représentations linéaires des groupes modulaires)** ([8, Section 5.4]) Soit $\rho \in X(S \setminus \{p_i\})$ et \mathfrak{h} fixés. Alors pour tout choix de $(\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C})$ l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N : \text{Mod}(S) &\longrightarrow \text{GL}(\otimes_{t \in \tau(2)} V^{\sigma_{\pm}(t)}) \\ \psi &\longmapsto \mathcal{H}_N(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, [\pm S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \psi_{\pm}], \mathfrak{h}) \end{aligned}$$

est un homomorphisme bien défini modulo conjugaison et multiplication par une racine Nième de l'unité. Ces représentations linéaires sont unitaires lorsque ρ prend ses valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$.

Une autre façon de voir ces représentations consiste à considérer pour τ fixé un fibré vectoriel trivial sur $X(S \setminus \{p_i\})$, de fibre $\otimes_{t \in \tau(2)} V^{\sigma_{\pm}(t)}$, et $\mathcal{H}_N([\psi], \mathfrak{h})$ comme un automorphisme de ce fibré.

5. **(Fonctions de partition et formules de chirurgie)** ([6], [8, Section 6]) La construction des TQCH peut être adaptée aux bordismes supportés par des 4-uplets $(Y, L_{\mathcal{F}} \cup L^0, \rho)$, où $L_{\mathcal{F}} \cup L^0$ est un enchevêtrement, ρ est trivial sur les méridiens de L^0 , et les composantes de $L_{\mathcal{F}}$ sont parallélisées. Dans cette situation les composantes k_c et k_f des poids \mathfrak{h} de $(Y, L_{\mathcal{F}} \cup L^0, \rho)$ sont nulles sur $\partial U(L^0)$. Pour les 3-variétés fermées W on obtient donc des invariants numériques $\mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}}, L^0, \rho, \mathfrak{h})$ appelés *fonctions de partition*, définis modulo la multiplication par une racine Nième de l'unité, et calculables explicitement [8, Section 7]. En particulier $\mathcal{H}_N(W, \emptyset, L^0, \rho, 0)$ coïncide avec l'invariant $H_N(W, L, \rho)$ construit dans [6]. On va préciser des relations importantes entre ces différents objets.

Pour tout 4-uplet $(W, L_{\mathcal{F}}, L^0, \rho, \mathfrak{h})$ on a les formules de chirurgie suivantes. Soit L_j une composante de $L_{\mathcal{F}}$, $U(L_j)$ un voisinage tubulaire, L'_j une longitude qui correspond à sa parallélisation, et $l \subset \partial U(L_j)$ une courbe simple non séparante. Notons $W(l)$ la 3-variété obtenue par remplissage de Dehn de $W \setminus \text{Int}(U(L_j))$ le long de l , et l^* l'âme du tore de remplissage. Supposons que $\rho(l) = \text{id} \in PSL(2, \mathbb{C})$, et que les composantes k_f et k_c du poids \mathfrak{h} vérifient $k_f([l]) = k_c([l]) = 0$. On a [8, Théorème 6.7]

$$(6) \quad \mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}}, L^0, \rho, \mathfrak{h}) = \mathcal{H}_N(W(l), L_{\mathcal{F}} \setminus L_j, L^0 \cup l^* \cup L_j \cup L'_j, \rho', \mathfrak{h}'),$$

où ρ' et \mathfrak{h}' sont les extensions naturelles de $\rho|_{W \setminus U(L_j)}$ et \mathfrak{h} à $W(l)$. Fixons maintenant une parallélisation \mathcal{F}_0 de L^0 , et notons $\bar{\lambda}$ l'entrelacs *non parallélisé* formé par les composantes de bord du ruban

canoniquement associé à $L_{\mathcal{F}_0}^0$. On a

$$(7) \quad \mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}} \cup L_{\mathcal{F}_0}^0, \emptyset, \rho, \mathfrak{h}) = \mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}}, \bar{\lambda}, \rho, \mathfrak{h}).$$

Supposons maintenant que dans (6) on prenne pour L^0 l'union λ_r de r copies parallèles de L_j le long du ruban canoniquement associé à $L_{\mathcal{F}}$, et que l est un méridien de L_j . Donc $\bar{\lambda} = \lambda_2$, avec les notations ci-dessus, et $l^* = L_j$. En appliquant inductivement (6) et (7) on obtient que pour tout $r \geq 2$, [8, Corollaire 6.8]

$$\mathcal{H}_N(W, \emptyset, \lambda_r, \rho, 0) = H_N(W, \lambda_r, \rho) = H_N(W, \lambda_2, \rho).$$

6. **(Relation avec $J'_N(K)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N})$)** (voir [6], Théorème 5.1) On a mentionné dans la Section 2 que d'après [77], $J'_N(L)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N})$ coïncide avec l'invariant d'entrelacs $\langle L \rangle_N$ défini par Kashaev dans [56]. Un résultat de [56] et le fait que les invariants $H_N(W, L, \rho)$ généralisent les formules simpliciales de Kashaev (voir le synopsis plus bas) impliquent que pour $W = S^3$ et ρ_0 la représentation triviale on a

$$(8) \quad H_N(S^3, L, \rho_0) = C_N J'_N(L)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N}),$$

où $\{C_N\}_N$ est une suite bornée de nombres complexes (des invariants élémentaires de (S^3, L, ρ_0)).

7. **(Invariants des variétés hyperboliques à pointes)** Dans [7] on a construit des invariants numériques $H_N(M, \mathfrak{h})$ pour les variétés hyperboliques à pointes M (ie complètes, non compactes et de volume fini). Ici \mathfrak{h} est défini comme dans le paragraphe précédant (5) sauf pour la substitution de Y par M et $\partial U(L_{\mathcal{F}})$ par ∂M . Les invariants $H_N(M, \mathfrak{h})$ sont reliés aux fonctions de partition de la façon suivante.

Soit $\{(W_n, L_n, \rho_n)\}_n$ une suite de variétés hyperboliques compactes obtenues par des remplissages de Dehn de M et convergeant vers M pour la topologie géométrique (théorème de Thurston). À l'aide d'une formule de chirurgie [8, Théorème 6.4] reliant les formules simpliciales de $H_N(M, \mathfrak{h})$, évaluées en de petites déformations M_{def} de la structure complète, à l'invariant $H_N(W, L, \rho)$ de la complétion métrique (W, ρ) de M_{def} munie de l'âme de la chirurgie L , on prouve [8, Corollaire 6.5]

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} H_N(W_n, L_n, \rho_n) = H_N(M, 0).$$

Supposons que M fibre sur le cercle. Alors $M \cong ((\Sigma \setminus \{p_i\}) \times [0, 1]) / ((x, 0) \sim (\varphi(x), 1))$, où Σ est une surface fermée avec l points marqués p_i tels que $\chi(\Sigma \setminus \{p_i\}) < 0$, et φ est un difféomorphisme homotopiquement apériodique de Σ fixant $\{p_i\}$. Notons $W = (\Sigma \times [0, 1]) / ((x, 0) \sim (\varphi(x), 1))$. C'est une variété fermée, munie de l'entrelacs $L_{\mathcal{F}} = \{p_i\} \times [0, 1]$ parallélisé par φ , et on a la représentation d'holonomie ρ_c de la structure hyperbolique complète sur $M \cong W \setminus L_{\mathcal{F}}$. Alors [8, Proposition 6.12]

$$\mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}}, \rho_c, \mathfrak{h}) = N^{2l} H_N(M, \mathfrak{h}).$$

8. **(Conjecture(s) du volume)** ([6, Section 5], [7, Section 7], [10]) Il existe \mathfrak{h} tel que

$$(10) \quad 2\pi \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log |H_N(M, \mathfrak{h})|}{N} = \text{Vol}(M).$$

Plus généralement

$$(11) \quad H_N(M, \mathfrak{h})^N = \left[CN^D \exp \left(\frac{N}{2\pi} (\text{Vol}(M) + \sqrt{-1} \text{CS}(M)) \right) (1 + \mathcal{O}(1/N)) \right]^N, \quad N \rightarrow \infty$$

où $C \in \mathbb{C}^*$, $D \in \mathbb{C}$, et $\text{CS}(M)$ est l'invariant de Chern-Simons de M pour sa structure hyperbolique complète (on considère dans (11) la puissance N ième de $H_N(M, \mathfrak{h})$ à cause de son ambiguïté modulo la multiplication par les racines N èmes de l'unité). Le rôle du poids \mathfrak{h} dans le comportement asymptotique de $H_N(M, \mathfrak{h})$ est essentiel, mais pas encore compris.

Notons que (10) est formellement similaire à (1). Cette conjecture offre des angles d'attaque pour l'analyse, et elle est géométriquement motivée par la construction des invariants $H_N(M, \mathfrak{h})$, très similaire aux formules simpliciales de $\text{CS}(M) + \sqrt{-1} \text{Vol}(M)$ et supportée par les mêmes données (voir la Section 6). Une certaine cohérence globale est aussi impliquée par les formules de chirurgie hyperboliques et l'identité (9) dans 7. ci-dessus, qui sont analogues à des résultats classiques pour $\text{Vol}(M) + \sqrt{-1} \text{CS}(M)$ [84, Théorème 14.5-14.7].

D'après la propriété 3. les fonctions de partition $\mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}}, L^0, \rho, \mathfrak{h})$ forment une famille de fonctions analytiques des caractères de $W \setminus L_{\mathcal{F}}$. En particulier, pour un noeud hyperbolique $K_{\mathcal{F}}$ de S^3 muni de sa parallélisation canonique, la conjecture du volume de Kashaev prédit le comportement asymptotique de $H_N(S^3, K, \rho_0)$ quand $N \rightarrow +\infty$ (voir 6.). Une variante raisonnable concerne les fonctions de partition $\mathcal{H}_N(S^3, K_{\mathcal{F}}, \rho_0, 0) = H_N(S^3, K \cup K', \rho_0)$ (voir (7)), qui sont reliées à celles, $\mathcal{H}_N(S^3, K_{\mathcal{F}}, \rho_{\text{hyp}}, \mathfrak{h})$, en l'holonomie ρ_{hyp} de la structure hyperbolique complète de $S^3 \setminus K$ (la décomposition géométrique de $S^3 \setminus (K \cup K')$ a une seule composante hyperbolique, de volume égal à celui de $S^3 \setminus K$).

À la recherche de la géométrie perdue : un synopsis de la construction de \mathcal{H}_N . A tout bordisme pondéré $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ on associe un ensemble de triangulations équipées de structures combinatoires additionnelles qui permettent de le reconstruire intégralement (Théorème 5.6, 1.– 3.). Cet ensemble est muni d'une relation d'équivalence supportée par des mouvements élémentaires entre triangulations, dont les classes sont canoniquement associées à $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ (Théorème 5.6, 4.). On les appelle *classes de découpage*; elles sont décrites dans la Section 5.

Nous avons élaboré les classes de découpage par analogie avec la description de $H_3(BPSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$ basée sur les groupes de Bloch (travaux de Dupont et C-H. Sah [39, 38] et W. Neumann [82]), et les formules simpliciales du volume et de l'invariant de Chern-Simons ([37], [81, 83]). Deux ingrédients fondamentaux, les *redressements* et les *charges*, avaient déjà été introduits par W. Neumann [81, 83]. Pour des soucis de clarté on rappelle certains de ces résultats dans les sections 4 et 5.5.

Les classes de découpage ont aussi émergé de notre analyse parallèle des $6j$ -symboles de la théorie des représentations cycliques d'une sous-algèbre de Borel B_{ζ} de $U_{\zeta}(sl(2, \mathbb{C}))$, où ζ est une racine primitive de l'unité d'ordre impair. On décrit ces $6j$ -symboles dans la section 4. Dans [55] R. Kashaev en avait donné des formules explicites, ainsi que des versions à paramètres satisfaisant des relations de symétrie tétraédrales et une équation du pentagone. Il avait aussi considéré des formules simpliciales à la Turaev-Viro [97] pour ces symétrisations, associées aux paires $(W, L) = (3\text{-variété orientée fermée triangulée, entrelacs de } W \text{ triangulé et hamiltonien})$. Les structures combinatoires supportant ces formules simpliciales étaient données par des équations explicites, les questions d'existence et d'interprétation géométrique restant ouvertes. R. Kashaev démontra l'invariance pour certains mouvements entre triangulations. Dans le cas $W = S^3$, à l'aide de R -matrices calculées à partir de ses $6j$ -symboles il définit les invariants $\langle K \rangle_N$ des entrelacs de S^3 (égaux à $J'_N(K)(e^{2\sqrt{-1}\pi/N})$, voir 6. plus haut) via des "sommées d'états" sur des diagrammes planaires [56, 57].

Nous avons montré qu'à un facteur multiplicatif près, les *formules* des $6j$ -symboles symétrisés de Kashaev définissent des *dilogarithmes matriciels*, qui sont des tenseurs $\mathcal{R}_N : \widehat{\mathbb{C}}_N \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$ sur une surface de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_N$ qu'on peut associer à chaque 3-simplexe d'un représentant \mathcal{T} d'une classe de découpage de $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$. Ici, N est l'ordre de la racine de l'unité ζ du groupe quantique B_{ζ} . Les tenseurs \mathcal{R}_N satisfont des relations à cinq termes, qui d'une part généralisent l'identité du pentagone pour les $6j$ -symboles, et d'autre part sont engendrées par la relation d'équivalence entre représentants d'une classe de découpage de $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ (Théorème 6.1). Les morphismes $\mathcal{H}_N(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ sont définis comme le résultat d'une certaine procédure de contraction totale des tenseurs \mathcal{R}_N attachés aux 3-simplexes de \mathcal{T} (Section 6.1). Ils coïncident avec les formules simpliciales de Kashaev sur les triplets (W, L, ρ_0) , où ρ_0 est le caractère trivial. L'invariance est une conséquence des relations à cinq termes.

La surface de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}_N$ est isomorphe à l'espace des modules des tétraèdres hyperboliques idéaux orientés, munis de relevés dans $\mathbb{R}/N\pi\mathbb{Z}$ des angles dièdres, qui sont définis à partir des charges et des redressements. Les formules simpliciales de $\mathcal{H}_N(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ sont donc supportées par des familles (cohérentes) de tels tétraèdres. En prenant $N = \infty$ et en oubliant les charges on obtient l'espace $\widehat{\mathbb{C}}$ des paramètres associés aux 3-simplexes dans les formules simpliciales du volume et de l'invariant de Chern-Simons des caractères dans $PSL(2, \mathbb{C})$. En fait, on peut construire ces invariants de façon analogue à $\mathcal{H}_N(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ en remplaçant les dilogarithmes matriciels par le dilogarithme de Rogers (Section 6.2).

La construction des foncteurs \mathcal{H}_N a été obtenue par étapes : dans [6] pour les variété fermées, dans [7] pour les variété hyperboliques à pointes, et dans [8] pour les bordismes TQCH arbitraires. La

preuve de l'existence des classes de découpages repose essentiellement sur des résultats de [6, 7]. La catégorie des bordismes TQCH est naturelle et minimale, dans le sens où elle est obtenue par une réduction systématique à partir d'une catégorie primitive basée sur des pseudo-variétés triangulées et munies de structures additionnelles, modulo une relation d'équivalence batie *ad hoc* sur les identités à cinq termes des dilogarithmes matriciels. Les dilogarithmes matriciels sont considérés dans [4] (ma thèse) et [6] du point de vue de la théorie des représentations des groupes quantiques, reproduisant des résultats de R. Kashaev [55, 57], puis étudiés systématiquement dans [7] (voir aussi [8, Section 2], et [9, 10]).

4. ORIGINES : DILOGARITHMES QUANTIQUES ET INVARIANTS DE CHEEGER-CHERN-SIMONS

On présente d'abord quelques résultats sur les déformations des dilogarithmes classiques via l'algèbre quantique, puis on décrit les $6j$ -symboles de Kashaev [55, 57]. On termine avec des résultats de W. Neumann [81, 82, 83] liés aux formules simpliciales de $\text{Vol} + \sqrt{-1}\text{CS}$.

4.1. Dilogarithmes quantiques et dilogarithmes classiques. Soit $N \geq 1$ un entier, et ζ une racine primitive N ième de l'unité. Considérons la famille de fonctions définies pour chaque $n \in \mathbb{N}$ sur la courbe $x^N + y^N = z^N$ de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ par

$$\omega_N(x, y, z|n) = \prod_{j=1}^n \frac{y}{z - x\zeta^j} \quad , \quad \omega_N(x, y|0) := 1.$$

La fonction ω_N a été très étudiée en physique statistique et dans le modèle de Baxter-Bazhanov en théorie des systèmes intégrables quantiques (voir [60] et ses références). À cause de la périodicité $\omega_N(x, y, z|n) = \omega_N(x, y, z|n + N)$ on peut considérer ω_N comme un analogue fini (ou "cyclique") du produit formel

$$(x; q)_\infty = \prod_{n=0}^{\infty} (1 - xq^n).$$

Le développement en série de $(x; q)_\infty$ est l'unique solution dans $\mathbb{C}[[q]]$ de l'équation aux q -différences $(1 - x)f(qx) - f(x) = 0$, telle que $f(0) = 1$. C'est un outil fondamental de la théorie des séries q -hypergéométriques [50] (voir [89] pour ses propriétés analytiques). On a

$$\omega_N(x, y, z|n) = (y/z)^n \left(\frac{(q^{n+1}x/z; q)_\infty}{(qx/z; q)_\infty} \right)_{|q=\zeta}.$$

Notons que les factorielles quantiques (4) vérifient $(q)_n = (qx; q)_\infty / (q^{n+1}x; q)_\infty$. On peut aussi donner une version analytique de cette relation entre ω_N et $(x; q)_\infty$, de la façon suivante. Lorsque q est fixé et hors du cercle unité, $(x; q)_\infty$ définit une fonction sur \mathbb{C} , entière pour $|q| < 1$, et méromorphe pour $|q| > 1$. Par contre, son comportement devient très singulier lorsque $|q| \rightarrow 1$, et il est relié au dilogarithme d'Euler (log désigne la détermination naturelle du logarithme)

$$(12) \quad \text{Li}_2(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = - \int_0^x \frac{\log(1-t)}{t} dt.$$

Proposition 4.1. ([11, 57]) *Soit $q = \exp(-\epsilon/N^2)\zeta$ avec $\text{Re}(\epsilon) > 0$. Pour tout x tel que $|x| < 1$ on a*

$$(13) \quad (x; q)_\infty = \prod_{k=1}^{N-1} (1 - x\zeta^k)^{-k/N} (1 - x^N)^{1/2} \exp\left(-\frac{\text{Li}_2(x^N)}{\epsilon}\right) (1 + \mathcal{O}(\epsilon)) \quad , \quad \epsilon \rightarrow 0$$

où chaque racine doit être remplacée par son développement en série en $x = 0$.

Notons $g_N(x) = \prod_{k=1}^{N-1} (1 - x\zeta^{-k})^{k/N}$; en remplaçant ζ par ζ^{-1} c'est l'inverse du premier facteur à droite dans (13), et le seul non nul modulo $\mathbb{C}[[x^N]]$. La relation entre ω_N et $(x; q)_\infty$ se réduit alors à l'identité suivante [6, Lemme 8.2] :

$$g_N(x\zeta^k) = g_N(x) \omega_N(x, (1 - x^N)^{1/N}, 1|k).$$

La proposition 4.1 présente $(x; q)_\infty$ comme une déformation par quantification du dilogarithme d'Euler. Une propriété similaire à lieu pour g_N et pour $\omega_N(\cdot|n)$, lorsque $N, n \rightarrow \infty$. Précisément, en utilisant la formule d'Euler–MacLaurin pour estimer $\sum_{k=1}^n \log(1 - x\zeta^k)$ on trouve facilement [44]

$$(14) \quad \prod_{k=1}^n (1 - x\zeta^k) = \exp\left(-\frac{N}{2i\pi} (\text{Li}_2(x\zeta^n) - \text{Li}_2(x)) + \frac{1}{2} (\log(1 - x\zeta^n) - \log(1 - x))\right) (1 + \mathcal{O}(1/N))$$

où $|x| < 1$ est fixé. Notons que $\zeta^n = e^{2\sqrt{-1}\pi n/N}$ est négligeable seulement si n l'est par rapport à N . On en déduit immédiatement un équivalent asymptotique pour $\omega_N(x, y, z|n_N)$, lorsque $n_N/N \rightarrow \theta \in \mathbb{R}$. On peut aussi montrer [10]

$$(15) \quad g_N(x) \sim C(x) \exp\left(\frac{N}{2i\pi} \text{Li}_2(x)\right), \quad N \rightarrow \infty$$

où $C(x)$ est une fonction uniformément bornée sur les compacts de $\mathbb{C} \setminus S^1$.

Les fonctions g_N , ω_N et $(x; q)_\infty$ satisfont aussi des équations qu'on peut interpréter comme des quantifications de *l'identité de Rogers*

$$(16) \quad L(u) - L(v) + L(v/u) - L\left(\frac{1 - u^{-1}}{1 - v^{-1}}\right) + L\left(\frac{1 - u}{1 - v}\right) = 0.$$

(Voir [37, Appendice] pour une preuve.) Ici $u, v \in \mathbb{C}$ et u est dans le triangle formé par 0, 1 et v , de sorte que toutes les variables ont une partie imaginaire de même signe (le cas dégénéré où u et v sont réels est vérifié pour $0 < v < u < 1$), et L est le *dilogarithme de Rogers*

$$(17) \quad L(x) := -\frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{2} \log(x) \log(1 - x) + \text{Li}_2(x) = -\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\log(t)}{1 - t} + \frac{\log(1 - t)}{t}\right) dt.$$

Théorème 4.2. (voir [44, 11, 57]) *Soit $\mathbb{C}_q[[u, v]]$, $q \in \mathbb{C}^*$, l'algèbre des séries formelles sur \mathbb{C} engendrées par deux éléments u et v tels que $uv = qvu$. Dans $\mathbb{C}_q[[u, v]]$ on a l'équation du q -dilogarithme*

$$(v; q)_\infty (u; q)_\infty = (u; q)_\infty (-vu; q)_\infty (v; q)_\infty.$$

De plus, lorsque $q = \exp(-\epsilon/N^2)\zeta$, $\text{Re}(\epsilon) > 0$, et $\epsilon \rightarrow 0$, les termes dominants des séries formelles limites des deux membres donnent les équations

$$\begin{aligned} S(v^N) S(u^N) &= S(u^N) S(-v^N u^N) S(v^N) \\ d_N(v) d_N(u) &= d_N\left(\frac{u}{(1 - v^N)^{1/N}}\right) d_N\left(\frac{-vu}{(1 - u^N - v^N)^{1/N}}\right) d_N\left(\frac{v}{(1 - u^N)^{1/N}}\right), \end{aligned}$$

où $S(x) := (1 - x^N)^{1/2} \exp(-\text{Li}_2(x^N)/\epsilon)$, et $d_N(x) = (1 - x^N)^{(N-1)/2N} \prod_{k=1}^{N-1} (1 - x\zeta^k)^{-k/N}$.

Ce résultat vient en utilisant la proposition 4.1 et le développement asymptotique de la loi de multiplication de $\mathbb{C}_q[[u, v]]$ lorsque $q \rightarrow \zeta$. Noter la relation entre d_N et g_N . La première équation est dans le centre de $\mathbb{C}_\zeta[[u, v]]$. On peut vérifier que les puissances N èmes des arguments de la seconde équation vérifient les mêmes relations que ceux de (16).

4.2. Dilogarithmes quantiques et $6j$ -symboles. Notons B_ζ , la forme intégrale en ζ du groupe quantique associé à une sous-algèbre de Borel de $SL(2, \mathbb{C})$. Nous allons voir comment g_N et son équation du théorème 4.2 jouent un rôle majeur dans la description des $6j$ -symboles de la théorie des représentations cycliques de B_ζ , et dans leur équation caractéristique, *l'équation du pentagone* (voir [55, 57], et les appendices de [6, 7]). Rappelons d'abord brièvement ces notions.

L'algèbre B_ζ est engendrée par des éléments $U^{\pm 1}$ et V tels que $UV = \zeta VU$, et sa structure de bigèbre de Hopf est définie par les homomorphismes (Δ , ϵ et S sont le coproduit, la counité et l'antipode):

$$\begin{aligned} \Delta(U) &= U \otimes U, \quad \Delta(V) = U \otimes V + V \otimes 1 \\ \epsilon(U) &= 1, \quad \epsilon(V) = 0, \quad S(U) = U^{-1}, \quad S(V) = -U^{-1}V. \end{aligned}$$

Notons V_ρ le B_ζ -module associé à une représentation linéaire ρ de B_ζ . Si ρ est irréductible alors $\dim(V_\rho) \leq N$. On dit que ρ est cyclique si $\rho(V)$ est inversible; en particulier, si ρ est irréductible

et cyclique alors $\dim(V_\rho) = N$. Le coproduit Δ permet de définir le produit tensoriel de deux représentations ρ et μ de B_ζ , par $(\rho \otimes \mu)(a) = \sum_i \rho(a'_i) \otimes \mu(a''_i)$, où $a \in B_\zeta$ et $\Delta(a) = \sum_i a'_i \otimes a''_i$. Lorsque $\rho \otimes \mu$ est cyclique, $V_\rho \otimes V_\mu$ se décompose en la somme directe de N copies d'un même B_ζ -module simple, qu'on notera $V_{\rho\mu}$. Soit maintenant $M_{\rho,\mu\otimes\nu} = \text{End}_{B_\zeta}(V_\rho, V_\mu \otimes V_\nu)$ l'espace vectoriel des morphismes B_ζ -équivariants. On a

$$\text{End}_{B_\zeta}(V_{\rho\mu\nu}, V_\rho \otimes (V_\mu \otimes V_\nu)) \cong M_{\rho\mu\nu, \rho\otimes\mu\nu} \otimes M_{\mu\nu, \mu\otimes\nu}$$

$$\text{End}_{B_\zeta}(V_{\rho\mu\nu}, (V_\rho \otimes V_\mu) \otimes V_\nu) \cong M_{\rho\mu, \rho\otimes\mu} \otimes M_{\rho\mu\nu, \rho\mu\otimes\nu}.$$

Donc l'isomorphisme de B_ζ -modules $\alpha_{\rho,\mu,\nu} : V_\rho \otimes (V_\mu \otimes V_\nu) \longrightarrow (V_\rho \otimes V_\mu) \otimes V_\nu$, l'associateur, induit un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$(18) \quad R(\rho, \mu, \nu) : M_{\rho\mu\nu, \rho\otimes\mu\nu} \otimes M_{\mu\nu, \mu\otimes\nu} \longrightarrow M_{\rho\mu, \rho\otimes\mu} \otimes M_{\rho\mu\nu, \rho\mu\otimes\nu}.$$

Les $6j$ -symboles des représentations cycliques de B_ζ sont les composantes de $R(\rho, \mu, \nu)$ dans une base⁷. L'associativité du produit tensoriel implique l'identité du pentagone ($R_{12} = R \otimes \text{Id}$ etc.) :

$$(19) \quad R_{12}(\rho, \mu, \nu) R_{13}(\rho, \mu\nu, v) R_{23}(\mu, \nu, v) = R_{23}(\rho\mu, \nu, v) R_{12}(\rho, \mu, \nu v).$$

De quels paramètres explicites dépendent les tenseurs $R(\rho, \mu, \nu)$? La théorie des représentations cycliques des groupes quantiques est très riche ([32], [33], [27, Ch. 11.1]). Dans la suite on supposera que N est impair. Alors l'algèbre B_ζ est un module libre de rang N^2 sur son centre Z_ζ , qui est engendré par $U^{\pm N}$ and V^N . De plus, en notant $\text{Spec}(Z_\zeta)^0$ l'ensemble des homomorphismes $\chi : Z_\zeta \rightarrow \mathbb{C}$ tels que $\chi(V) \neq 0$, on a une correspondance bijective

$$(20) \quad \Theta : \left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d'isomorphisme de} \\ B_\zeta - \text{rep. cycliques irréductibles} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \text{Spec}(Z_\zeta)^0.$$

Soit I_ζ^χ , $\chi \in \text{Spec}(Z_\zeta)^0$, l'idéal de B_ζ engendré par $\{z \in Z_\zeta | z - \chi(z).1 = 0\}$. D'après ce qui précède on a un isomorphisme entre $B_\zeta^\chi = B_\zeta / I_\zeta^\chi$ et $M_N(\mathbb{C})$, qui dépend du choix de racines N -ièmes pour $\chi(U^N)$ et $\chi(V^N)$. Considérons en particulier les représentations *standard* de B_ζ , définies par

$$(21) \quad \rho(U) = t_\rho^2 Z, \quad \rho(V) = t_\rho x_\rho X$$

où $t_\rho, x_\rho \in \mathbb{C}^*$, et $X_{ij} = \delta_{i,j+1}$ et $Z_{ij} = \zeta^i \delta_{i,j}$ dans la base canonique de \mathbb{C}^N ($\delta_{i,j}$ est le symbole de Kronecker). Toute représentation cyclique irréductible de B_ζ est isomorphe à une représentation standard, et deux représentations standard ρ et μ sont isomorphes si et seulement si $t_\rho^{2N} = t_\mu^{2N}$ et $t_\rho^N x_\rho^N = t_\mu^N x_\mu^N$. À l'aide de ce paramétrage R. Kashaev obtient les formules suivantes [55] (voir [4, Chapitre 3] pour une preuve) :

$$(22) \quad R(\rho, \mu, \nu)_{\alpha,\beta}^{\gamma,\delta} = \frac{g_N\left(\frac{x_{\rho\mu\nu} x_\mu}{x_{\rho\mu} x_{\mu\nu}}\right)}{g_N(1)} \zeta^{\alpha\delta + \alpha^2 \frac{(N+1)}{2}} \omega_N(x_{\rho\mu\nu} x_\mu, x_\rho x_\nu, x_{\rho\mu} x_{\mu\nu} | \gamma - \alpha) \delta(\gamma + \delta - \beta).$$

Cette formule peut être clarifiée en utilisant une autre définition des tenseurs $R(\rho, \mu, \nu)$, basée sur le *double de Heisenberg*⁸ $\mathcal{H}(B_\zeta)$ de B_ζ [57] (voir [7, Appendice] pour une discussion détaillée). $\mathcal{H}(B_\zeta)$ est l'algèbre des séries formelles sur \mathbb{C} engendrées par des éléments $U^{\pm 1}$, $\bar{U}^{\pm 1}$, V et \bar{V} tels que

$$\begin{aligned} VU &= \zeta^{-1}UV & , & & \bar{V}\bar{U} &= \zeta^{-1}\bar{U}\bar{V} \\ U\bar{U} &= \zeta^{-1}\bar{U}U & , & & V\bar{U} &= \bar{U}V \\ U\bar{V} &= \zeta^{-1}\bar{V}U & , & & V\bar{V} - \bar{V}V &= (1 - \zeta^{-1})U. \end{aligned}$$

⁷Ces $6j$ -symboles sont très différents de ceux associés à la théorie des représentations de $U_\zeta^{res}(sl(2, \mathbb{C}))$, la forme *restreinte* du groupe quantique $U_\zeta(sl(2, \mathbb{C}))$, qui définit la théorie quantique des champs topologique de Witten-Reshetikhin-Turaev ([27, Ch. 11.2 & 15], [63, Ch. 6]). Par exemple, le générateur d'une sous-algèbre de Borel de $U_\zeta^{res}(sl(2, \mathbb{C}))$ qui correspond au générateur V de B_ζ est nilpotent.

⁸Il s'agit de la quantification du *double symplectique* de Semenov-Tian-Shansky pour le groupe de Borel $B(2, \mathbb{C})$ (voir [90], [70, Section 6]). Ce double est isomorphe au double de Drinfeld $GL(2, \mathbb{C})$ en tant que groupe de Lie, mais sa structure de Poisson est différente.

Les sous-algèbres de $\mathcal{H}(B_\zeta)$ engendrées par les éléments $U^{\pm 1}$ et V , et les éléments $\bar{U}^{\pm 1}$ et \bar{V} , sont respectivement isomorphes à B_ζ , et à l'algèbre duale B_ζ^* . Soit R_ζ l'élément canonique de $\mathcal{H}(B_\zeta)$, c'est-à-dire l'image de l'identité via l'isomorphisme $\text{End}_{\mathbb{C}}(B_\zeta) \cong B_\zeta^* \otimes B_\zeta \subset \mathcal{H}(B_\zeta) \otimes \mathcal{H}(B_\zeta)$. On a l'identité du pentagone ($R_{12} := R_\zeta \otimes \text{Id}$, $R_{23} := \text{Id} \otimes R_\zeta$, etc.)

$$(23) \quad R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{12} \in \mathcal{H}(B_\zeta)^{\otimes 3}.$$

Cette identité détermine complètement la structure d'algèbre de $\mathcal{H}(B_\zeta)$. On peut montrer que

$$(24) \quad R_\zeta = S_\zeta d_N^{-1}(V \otimes \bar{V}),$$

où d_N est défini dans le théorème 4.2, $S_\zeta := N^{-1} \sum_{i,j=0}^{N-1} \zeta^{ij} (U')^i \otimes (\bar{U}')^j$, $U' := U/c_U$, $\bar{U}' := \bar{U}/c_{\bar{U}}$, et les éléments c_U et $c_{\bar{U}}$ sont des racines Nièmes de U et \bar{U} (on étend le centre de $\mathcal{H}(B_\zeta)$ à son corps des fractions).

Proposition 4.3. ([7, Théorème 8.4]) *Pour toutes représentations cycliques irréductibles ρ, μ, ν de B_ζ il existe une représentation cyclique irréductible Θ de $\mathcal{H}(B_\zeta)$ telle que $R(\rho, \mu, \nu) = (\Theta \otimes \Theta)(R_\zeta)$. En particulier, l'équation du pentagone (19) est une représentation linéaire de (23).*

En d'autres termes, avec (15) et (24) on peut interpréter les tenseurs $R(\rho, \mu, \nu)$ comme des "dilogarithmes matriciels" tordus par S_ζ . Ce dernier est l'élément canonique du double de Heisenberg de $\mathbb{C}[\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}]$. Ils sont de déterminant 1 et vérifient des propriétés de symétrie hermitienne [7, Proposition 8.6].

4.3. Invariants de Cheeger-Chern-Simons et combinatoire des triangulations. Soit (M, g) une 3-variété fermée orientée munie d'une métrique riemannienne g . Le fibré des repères orthonormés de M , $F(M)$, est trivial : $F(M) \cong M \times SO(3)$. Notons

$$\wedge : (\Omega^k(F(M); so(3)^{\otimes l}) \otimes (\Omega^m(F(M); so(3)^{\otimes n})) \longrightarrow \Omega^{k+m}(F(M); so(3)^{\otimes(l+n)})$$

le produit extérieur des formes sur $F(M)$ à valeurs dans $so(3)^{\otimes *}$, défini par

$$(A \wedge B)(X_1, \dots, X_{k+m}) := \sum_{\sigma \in S_{k+m}} \epsilon(\sigma) A(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \otimes B(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+m)}).$$

La différentielle induit $d : \Omega^k(F(M); so(3)^{\otimes l}) \rightarrow \Omega^{k+1}(F(M); so(3)^{\otimes l})$. Soit $A \in \Omega^1(F(M); so(3))$ la 1-forme connection sur $F(M)$ induite par la connection métrique (de Levi-Civita). L'invariant de Chern-Simons est défini par [24]

$$(25) \quad cs(M, g) := \frac{1}{8\pi^2} \int_{s(M)} cs(A) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},$$

où $s(M)$ une section quelconque de $F(M)$, et

$$cs(A) = \frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A) \in \Omega^3(F(M)).$$

Ici on note Tr la trace sur $so(3)$, étendue à $\Omega^k(F(M); so(3)^l)$ par linéarité et en posant

$$\text{Tr}(c \otimes (g_1 \otimes \dots \otimes g_l)) := c \text{Tr}(g_1 \dots g_l).$$

L'invariant de Chern-Simons est un invariant de la classe conforme de la métrique g . Il a été étendu par R. Meyerhoff [71] aux variétés hyperboliques à pointes en utilisant des champs de repères s qui sont linéaires près des pointes; dans ce cas cs est seulement défini modulo $1/2$. Dans ce travail on utilisera la normalisation $\text{CS}(M) := 2\pi^2 cs(M, g) \in \mathbb{R}/\pi^2\mathbb{Z}$.

Pour toute 3-variété orientée fermée M , l'expression (25) s'étend immédiatement aux connections plates $A \in \Omega^1(E; sl(2, \mathbb{C}))$ sur le $PSL(2, \mathbb{C})$ -fibré trivial $\pi : E \rightarrow M$, et définit un invariant complexe $\text{CS}(A) \in \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$ de la classe d'isomorphisme de A . En fait, l'invariant de Chern-Simons peut être obtenu via la théorie de Chern-Weil classique [36], de sorte qu'il existe une classe caractéristique universelle [25]

$$\begin{aligned} \hat{C}_2 \in H^3(BPSL(2, \mathbb{C})^\delta; \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}) &\cong H^3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}) \\ &\cong \text{Hom}(H_3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z}); \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}), \end{aligned}$$

la classe de Cheeger-Chern-Simons, telle que si $f : M \rightarrow BPSL(2, \mathbb{C})^\delta$ est une application classifiante du fibré plat (E, A) , alors $f^*\hat{C}_2 = 2\pi^2[s^*cs(A)] \in H^3(M; \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z})$ pour une section s de E . Par conséquent

$$CS(A) = \hat{C}_2(f_*[M]).$$

(Voir aussi [37, 38] et [74]; ci-dessus on note $^\delta$ la topologie discrète, et l'homologie est celle du groupe discret.)

Voici une définition alternative de $CS(A)$ qui peut clarifier son contenu géométrique. Soit $\{U_i\}$ un recouvrement de M par des ouverts simplement connexes, tel que $\{\varphi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times PSL(2, \mathbb{C})\}$ est un atlas de cartes pour le fibré (E, A) . Notons $p : U_i \times PSL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ la projection sur le second facteur. Soit $w \in H^3(\Omega^*(PSL(2, \mathbb{C})); \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ un générateur, qu'on représente par une 3-forme invariante normalisée par $w([SO(3)]) = 2\pi^2$, le *volume complexe*, et w_A la 3-forme de E définie sur $\pi^{-1}(U_i)$ par $(p \circ \varphi_i)^*w$. Alors

$$CS(A) = \int_{s(M)} w_A.$$

On a (voir T. Yoshida [106], et J. Dupont [37])

$$CS(A) = \sqrt{-1}(\text{Vol}(A) + \sqrt{-1}CS(\text{Im}A)) \in \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z},$$

où $\text{Vol}(A)$ est le *volume* de A , obtenu en remplaçant (E, A) par le \mathbb{H}^3 -fibré plat associé et w par la forme volume hyperbolique, et $\text{Im}A \in \Omega^1(F(M); so(3))$ est la partie imaginaire de A , vue comme connection sur le $SO(3)$ -fibré trivial sur M . (Noter que $PSL(2, \mathbb{C}) \cong F(\mathbb{H}^3)$, le fibré des repères de \mathbb{H}^3).

Le problème de l'existence de formules simpliciales permettant de calculer l'invariant de Chern-Simons est ancien. Il a été complètement résolu récemment par W. Neumann [84], qui s'est aussi appuyé sur des travaux de J. Dupont et C.H. Sah [39] et J. Dupont [37, 38]. Des détails suivront le théorème 6.2. On va rappeler ci-dessous des résultats fondamentaux de W. Neumann [81, 83], que nous avons utilisés dans notre travail. La plupart des notions seront rappelées et généralisées dans la section 5.

Soit M une variété hyperbolique à pointes orientée, munie d'une triangulation idéale géodésique T qui est "positive", c'est-à-dire sans 3-simplexes plats. Supposons que T subdivise M en n tétraèdres hyperboliques idéaux $\Delta_1, \dots, \Delta_n$. Choisissons une arête de Δ_j , et notons $z_j^0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $\text{Im}(z_j^0) > 0$, le module de cette arête, qui décrit la classe d'isométrie directe de Δ_j [15]. Posons

$$\mathcal{Z}^0 = (\log z_1^0, \dots, \log z_n^0, \log(1 - z_1^0), \dots, \log(1 - z_n^0))^t \in \mathbb{C}^{2n}.$$

Si M a h pointes, l'espace des déformations de la structure hyperbolique complète de M , telles que T est une triangulation géodésique, est de dimension complexe h [85]. Précisément, les paramètres complexes z_j^0 sont complètement déterminés par des relations de compatibilité autour de chaque arête E , de la forme

$$(26) \quad \sum_{j=1}^n r'_j(E) \log(z_j) + r''_j(E) \log(1 - z_j) = d(E)\pi\sqrt{-1},$$

où $d(E)$, $r'(E)$ et $r''(E)$ sont des entiers, et des équations de complétude pour l'holonomie aux pointes de la structure hyperbolique définie par (26), de la forme

$$(27) \quad \sum_{j=1}^n r'_j(C) \log(z_j) + r''_j(C) \log(1 - z_j) = d(C)\pi\sqrt{-1},$$

où $d(E)$, $r'(E)$, $r''(E) \in \mathbb{Z}$, et C est une multicourbe sur des sections des bouts toriques. Les équations (27) ne dépendent que de la classe d'homologie de C , de sorte qu'on peut prendre une base (λ_j, μ_j) , $j = 1, \dots, h$ pour chaque pointe. On peut donc écrire (26) et (27) comme un système linéaire

$$U\mathcal{Z}^0 = \pi\sqrt{-1}\mathbf{d},$$

où U est une matrice de taille $(n + 2h) \times 2n$ à coefficients entiers déterminée par la triangulation T , et $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{n+2h})^t$ est un vecteur entier. L'équation

$$(28) \quad U\mathbf{c} = \mathbf{d}$$

a une solution $\mathbf{c} = \mathcal{Z}^0/\pi\sqrt{-1}$. Puisque U est intégrale, (28) a également une solution $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}^{2n}$. W. Neumann a montré qu'il en existe aussi dans \mathbb{Z}^{2n} , et même dans un sous-réseau explicite de \mathbb{Z}^{2n} , pour toute 3-variété à bord torique :

Théorème 4.4. ([81, Théorème 2 et Proposition 2.3]) *Soit M une 3-variété à bord torique, et T une triangulation idéale topologique de M . Il existe des solutions entières $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{2n}$ de l'équation (28). Ces solutions sont caractérisées par les propriétés C1 et C2 ci-dessous. Posons $\mathbf{c} = (c'_1, \dots, c'_n, c''_1, \dots, c''_n)^t$, et associons aux arêtes de chaque tétraèdre Δ_j les nombres (les indices mod(3) correspondent à des arêtes opposées) :*

$$\eta_1(\Delta_j) = \eta_4(\Delta_j) = c'_j \quad , \quad \eta_2(\Delta_j) = \eta_5(\Delta_j) = -c''_j \quad , \quad \eta_3(\Delta_j) = \eta_6(\Delta_j) = -c'_j + c''_j + 1.$$

C1. *La somme des η autour de chaque arête de la triangulation T est égale à 2.*

C2. *Pour tout lacet C de ∂M qui est transverse à sa triangulation induite par T , la somme signée des η attachés aux sommets adjacents à C est nulle (le signe est + ou - selon l'orientation).*

En fait, W. Neumann a montré l'existence de telles solutions satisfaisant de plus une condition homologique de parité :

C3. *Pour tout lacet C dans M , transverse à T , et qui intersecte les 3-simplexes en des arcs n'ayant aucun "aller-retour" par une même face, la somme modulo 2 des η sélectionnés par chaque arc est égale à 0.*

La structure de réseau des solutions de (28) vérifiant C3 est donnée par le résultat suivant :

Théorème 4.5. ([81, Theorem 2.4]) *Deux solutions quelconques dans \mathbb{Z}^{2n} de (28) et C3 diffèrent par une combinaison linéaire des vecteurs*

$$J_{2n}\mathbf{r}(E) = (r''_1(E), \dots, r''_n(E), -r'_1(E), \dots, -r'_n(E))^t,$$

où $\mathbf{r}(E)$ est le vecteur des coefficients des équations de consistance (26), et

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

L'outil fondamental pour démontrer ces résultats est un complexe de chaînes \mathcal{J} bati à l'aide de la combinatoire de T [81, Section 4-6]. Dans [83] W. Neumann a montré comment l'utiliser pour définir un objet analogue aux vecteurs \mathbf{c} , les *redressements* ("combinatorial flattening"), pour les 3-cycles de $PSL(2, \mathbb{C})$ (voir après le théorème 5.10). Ces notions ont servi de base pour définir les charges et les redressements de la section 5. Par exemple, les vecteurs η du théorème 4.4 correspondent exactement aux charges de poids nul dans le théorème 5.7.

Terminons pour illustrer ces notions avec le théorème principal de [81]. Soit M soit une variété hyperbolique à pointes munie d'une triangulation idéale géodésique positive T , et M' une variété hyperbolique compacte obtenue par remplissage de Dehn hyperbolique de M , en déformant les paramètres $\{z_j^0\}$ en de nouveaux paramètres $\{z_j\}$ ([93, 15, 87]). Alors M' diffère topologiquement de M par l'addition d'une géodésique fermée γ_j à chaque pointe. Notons λ_j la longueur complexe de γ_j . Alors :

Théorème 4.6. ([81, Théorème 1]) *Pour toute solution $\mathbf{c} \in \mathbb{Z}^{2n}$ de (28) et C3, il existe une constante α bien définie modulo $\sqrt{-1}\pi/2$ telle que*

$$\text{Vol}(M') + \sqrt{-1}\text{ICS}(M') = \alpha - \frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^h \lambda_j - \sqrt{-1} \sum_{k=1}^n \left(L(z_k) - \sqrt{-1} \frac{\pi}{2} (c'_k \log(1 - z_k) - c''_k \log(z_k)) \right),$$

où L est le dilogarithme de Rogers défini par (17).

5. CLASSES DE DÉCOUPAGE

5.1. \mathcal{I} -tétraèdres, redressements et charges. Un \mathcal{I} -tétraèdre est un tétraèdre géodésique orienté Δ de \mathbb{H}^3 , l'espace hyperbolique de dimension trois, dont les sommets v_0, v_1, v_2 and v_3 sont distincts, ordonnés, et situés sur la sphère à l'infini $\partial\mathbb{H}^3 = \mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (on identifie \mathbb{H}^3 avec le modèle du demi-espace de Poincaré). L'ordre sur les sommets équivaut à la donnée d'une orientation pour chaque

arête, qu'on appelle branchement et qu'on note b . Il induit aussi une orientation de Δ , déterminée par la classe du trièdre $([v_0, v_1], [v_0, v_2], [v_0, v_3])$. On indique cette orientation par un signe : $*_b = 1$ si elle coïncide avec celle de Δ , et $*_b = -1$ sinon.

La classe d'isométrie directe de Δ est déterminée par le birapport entre ses sommets :

$$(29) \quad [v_0 : v_1 : v_2 : v_3] = \frac{(v_2 - v_1)(v_3 - v_0)}{(v_2 - v_0)(v_3 - v_1)} \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

En effet, l'action de $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ sur \mathbb{CP}^1 par transformations de Moebius est conforme et agit transitivement sur les triplets de points. Le birapport $[v_0 : v_1 : v_2 : v_3]$ est aussi le coefficient de dilatation de la transformation loxodromique qui fixe v_0 et v_1 et envoie v_2 sur v_3 . Il est donc associé à l'arête $[v_0, v_1]$. En général, chaque arête de Δ se voit assignée un birapport, obtenu à partir de (29) en permutant les sommets. Deux arêtes opposées ont le même birapport, et si on pose $e_0 = [v_0, v_1]$, $e_1 = [v_1, v_2]$ et $e_2 = [v_0, v_2]$, les birapports $w_j := w(e_j) \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ de ces arêtes vérifient $w_{j+1} = 1/(1 - w_j)$ (indices mod $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$), avec $w_0 = [v_0 : v_1 : v_2 : v_3]$.

Un *redressement* et une *charge* sur un \mathcal{I} -tétraèdre sont des fonctions f et c définies sur l'ensemble des arêtes et à valeurs entières, prenant la même valeur sur deux arêtes opposées, et telles que, en notant $f_j = f(e_j)$ et $c_j = c(e_j)$, les conditions suivantes sont vérifiées (log désigne la détermination naturelle du logarithme) :

F. *Condition de redressement* : $l_0 + l_1 + l_2 = 0$, où

$$(30) \quad l_j = l_j(b, w, f) = \log(w_j) + \sqrt{-1}\pi f_j,$$

C. *Condition de charge* : $c_0 + c_1 + c_2 = 1$.

On appelle l_j un *log-paramètre*. Pour tout entier impair $N > 1$ on définit le *log-paramètre quantique* par

$$(31) \quad l_{j,N} = \frac{1}{N}(\log(w_j) + \sqrt{-1}\pi(N+1)(f_j - *_b c_j)).$$

L'application bijective

$$(32) \quad (l_0, l_1) \mapsto \left(w_0; \frac{l_0 - \log(w_0)}{\sqrt{-1}\pi}, \frac{l_1 - \log(w_1)}{\sqrt{-1}\pi} \right)$$

permet d'identifier l'ensemble des log-paramètres sur (Δ, b) avec la surface de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ des applications

$$(33) \quad \varphi_{\varepsilon, \varepsilon'} : w_0 \mapsto (\log(w_0) + \varepsilon\pi\sqrt{-1}, \log((1 - w_0)^{-1}) + \varepsilon'\pi\sqrt{-1}), \quad \varepsilon, \varepsilon' \in \{0, 1\}.$$

C'est un revêtement abélien de $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ avec quatre composantes connexes. Explicitement, on a $\widehat{\mathbb{C}} = (\mathfrak{D} \times \mathbb{Z}^2) / \sim$, où $\mathfrak{D} := \mathbb{C} \setminus ((-\infty; 0) \cup (1; +\infty))$ et

$$\begin{aligned} (x + i0; p, q) &\sim (x - i0; p + 2, q) && \text{si } x \in (-\infty; 0) \\ (x + i0; p, q) &\sim (x - i0; p, q + 2) && \text{si } x \in (1; +\infty). \end{aligned}$$

De même, l'ensemble des triplets (w'_0, w'_1, w'_2) , où

$$(34) \quad w'_j = \exp(l_{j,N})$$

et $l_{j,N}$ est défini dans (31), peut être identifié avec le quotient $\widehat{\mathbb{C}}_N = \widehat{\mathbb{C}} / (N\mathbb{Z} \times N\mathbb{Z})$ (noter que $w'_0 w'_1 w'_2 = \exp(-*_b \sqrt{-1}\pi/N)$).

En conclusion, si on note $w = (w_0, w_1, w_2)$, $f = (f_0, f_1, f_2)$, et $c = (c_0, c_1, c_2)$, l'ensemble $\{\Delta(b, w, f, c)\}$ des \mathcal{I} -tétraèdres redressés et chargés correspond à la donnée d'un tétraèdre orienté abstrait Δ avec ses différents marquages (définis par les branchements b), et muni pour chaque marquage des espaces de paramètres $\widehat{\mathbb{C}}$ ou $\widehat{\mathbb{C}}_N$ via les coordonnées (l_0, l_1) et (w'_0, w'_1) . Géométriquement, l'espace $\widehat{\mathbb{C}}$ est aussi isomorphe à l'espace des classes de similitude des triangles orientés dans le plan complexe, munis de relevés dans \mathbb{R} des angles dièdres intérieurs ou extérieurs.

5.2. \mathcal{I} -triangulations, redressements et charges globales. Dans la suite on appellera pseudo-variété (de dimension trois) tout polyèdre compact orienté ayant au plus un ensemble fini de points singuliers (ie sans voisinage homéomorphe à une boule). On utilisera la notion de triangulation dans un sens large : les 3-simplexes peuvent avoir des auto-adjacences et des adjacences multiples. De telles triangulations sont très flexibles, et peuvent être très “singulières” au regard de la notion usuelle de triangulation en topologie PL. Les points singuliers d’une pseudo-variété triangulée forment un sous-ensemble des sommets.

Soit Z une pseudo-variété et Z^0 le complément de l’ensemble de ses points singuliers. Les classes de conjugaisons de représentations $\rho : \pi_1(Z^0) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ sont en bijection avec les fibrés plats $\widetilde{Z}^0 \times_{\rho} \mathbb{H}^3$ (définis par l’action diagonale de $\pi_1(Z^0)$ sur le produit du revêtement universel par \mathbb{H}^3), de base Z^0 et de fibre \mathbb{H}^3 . Par prolongement analytique des fonctions de transitions d’un atlas de cartes de $\widetilde{Z}^0 \times_{\rho} \mathbb{H}^3$, on peut construire une *application pseudo-développante* $d : \widetilde{Z}^0 \rightarrow \mathbb{H}^3$, qui est une immersion localement injective telle que $d(\gamma(y)) = \rho(\gamma)(d(y))$ pour tout $\gamma \in \pi_1(Z^0)$, $y \in \widetilde{Z}^0$. La différentielle de la pseudo-développante d induit une application entre fibrés des repères $Fd : F\widetilde{Z}^0 \rightarrow F\mathbb{H}^3$, où l’on note que $F\mathbb{H}^3 \cong PSL(2, \mathbb{C})$. Comme ρ est déterminée à conjugaison près, d est unique à post-composition près par un élément de $PSL(2, \mathbb{C})$. Dans le cadre PL, ces notions peuvent être formalisées de la façon suivante :

Definition 5.1. (*Structures globales, I*) Soit T une triangulation d’une pseudo-variété Z . On dit que $\mathcal{T} = (T, b, w)$ est une *\mathcal{I} -triangulation* si T supporte un branchement *global* b , et ses 3-simplexes supportent des structures de \mathcal{I} -tétraèdres (Δ^i, b^i, w^i) , où $w = \{w^i\}$, telles que le produit des birapports $(w_j^i)^{*b^i}$ autour de chaque arête intérieure de T est égal à 1. Pour toute arête e de T , intérieure ou non, on appelle ce produit $W_{\mathcal{T}}(e)$ le *module total* en e . De manière analogue, on dit que $\mathcal{T} = (T, b, w, f)$ est une *\mathcal{I} -triangulation redressée* (et f un *redressement global*) si $f = \{f^i\}$ est une collection de redressements sur les \mathcal{I} -tétraèdres telle que la somme $L_{\mathcal{T}}(e)$ des log-paramètres (signés) $*_{b^i} l_j^i$ autour de chaque arête intérieure e de T est égal à 0.

On vérifie facilement qu’une \mathcal{I} -triangulation permet de construire des paires (d, ρ) qui sont toutes équivalentes, où d est une application pseudo-développante PL. Pour cela il suffit de recoller les tétraèdres hyperboliques idéaux qui correspondent aux \mathcal{I} -tétraèdres, en respectant la combinatoire de la triangulation induite sur \widetilde{Z}^0 . En fait, cette construction permet de voir qu’une \mathcal{I} -triangulation définit également une augmentation du caractère ρ , comme défini dans la Section 3.

On peut interpréter les contraintes globales sur les birapports, etc., d’une \mathcal{I} -triangulation redressée et chargée de la manière suivante. Comme les birapports peuvent avoir une partie imaginaire négative, nulle ou positive, les tétraèdres hyperboliques de $d(\widetilde{Z}^0)$ peuvent se chevaucher, c’est-à-dire que leurs intérieurs peuvent s’intersecter. La condition $W_{\mathcal{T}}(e) = 1$ autour d’une arête intérieure e garantit cependant que l’holonomie de ses méridiens est triviale. De plus, le bord d’un petit voisinage régulier de chaque bout v de e hérite d’une triangulation τ_v , et les log-paramètres définissent une classe de similitude pour chaque 2-simplexe de τ_v . Leur image par d sont des triangles, développés sur une horosphère en s’appuyant sur un point, l’intersection de l’horosphère avec $d(e)$. La condition $L_{\mathcal{T}}(e) = 0$ équivaut à ce que l’holonomie (une similitude) d’un petit lacet autour de ce point est triviale, et pas seulement un multiple de $2\sqrt{-1}\pi$ comme l’implique $W_{\mathcal{T}}(e) = 1$. En fait un redressement (ou une charge) global définit un “nombre d’enroulements” pour les courbes sur le bord ∂T ou sur les lices des sommets qui sont homéomorphes à un tore (voir la Définition 5.5, le théorème 5.8 et la fin de la Section 5.4).

Remarque 5.2. (*Sur les branchements*) Clairement les birapports, les redressements, les charges et leurs contraintes globales dans une \mathcal{I} -triangulation redressée et chargée peuvent être définis sans branchement. Mais ils sont nécessaires pour définir les invariants de Cheeger-Chern-Simons et les TQCH : leur rôle est le même que celui de la notion de 3-simplexe pour définir une classe fondamentale à partir des chaînes simpliciales. Supposer l’existence de branchements n’est pas une hypothèse forte; on peut en définir quitte à retriangler, même sans ajouter de sommets intérieurs. (Une référence générale sur les branchements est [15]).

Il serait naturel d'imposer que la somme des charges autour d'une arête intérieure de T soit égale à 2 (voir le théorème 4.4 et (36) ci-dessous). Mais une contrainte de type "Gauss-Bonnet" implique que ce n'est possible que si la lice de chaque sommet intérieur v est homéomorphe à un tore. En effet, notons $C_{\mathcal{T}}(e)$ la somme des charges autour d'une arête e , et n_0 et n_2 le nombre de 0- et 2-simplexes de τ_v . Si $C_{\mathcal{T}}(e) = 2$ pour toute arête intérieure e , alors

$$\sum_{e \ni v} C_{\mathcal{T}}(e) = 2n_0.$$

Or par définition des charges on a $\sum_{\Delta^i \ni v} c_j^i = n_2$. Donc ces deux quantités ne peuvent être égales que si $\chi(\tau_v) = 0$. On peut éliminer ce problème en distinguant pour chaque sommet intérieur v deux arêtes adjacentes sur lesquelles $C_{\mathcal{T}} = 0$. On aboutit alors aux notions suivantes :

Definition 5.3. (*Structures globales, II*) Soit L un enchevêtrement (non-vide) proprement plongé de Z . On dit qu'une triangulation (T, H) de la paire (Z, L) est *distinguée* si H contient tous les sommets non-singuliers de T et aucun sommet singulier. Une collection $c = \{c^i\}$ de charges sur les 3-simplexes de (T, H) est une *charge globale* (et (T, H) est *chargée*) si

$$(35) \quad C_{\mathcal{T}}(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \subset H \\ 2 & \text{si } e \subset T \setminus (H \cup \partial T). \end{cases}$$

où $C_{\mathcal{T}}(e)$ est la somme des charges autour de e .

On va maintenant définir une notion d'isomorphisme entre \mathcal{I} -triangulations distinguées, redressées et chargées.

Deux triangulations "nues" T et T' de Z qui ont un même bord pseudo-triangulé peuvent être obtenues l'une à partir de l'autre par une suite *finie* de mouvements *locaux* qui préservent le bord (mouvements bistellaires de Pachner, ou dualement de Matveev-Piergallini, voir [97, Theorem 3.2.A et Appendix 2] et ses références). Ces mouvements sont représentés dans la figure 1 : celui du haut est appelé *mouvement 2 ↔ 3*, et celui du bas est le *mouvement bulle* (il consiste à remplacer un 2-simplexe par le cone sur une 2-sphère triangulée par deux 2-simplexes). On appelle "positifs" les mouvements qui vont de gauche à droite. On peut identifier T et T' avec des subdivisions d'un même complexe. On notera $T \cap T'$ l'union de leurs 3-simplexes communs.

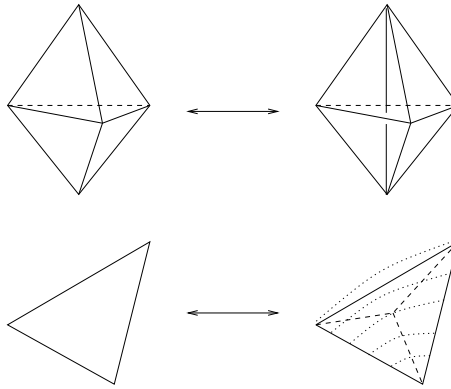


FIGURE 1. Les mouvements sur les triangulations nues.

On adapte les mouvements 2 ↔ 3 et bulle aux triangulations distinguées (T, H) de paires (Z, L) de la façon suivante. Tout mouvement 2 → 3 (positif) $T \rightarrow T'$ induit naturellement un mouvement $(T, H) \rightarrow (T', H')$, avec $H' = H$. Pour les mouvements bulle positifs, on suppose qu'une arête e_0 de H est dans le bord du 2-simplexe f qui supporte le mouvement. Alors e_0 est dans le bord d'un unique 2-simplexe f' de T' qui contient le nouveau sommet de T' . On définit H' en remplaçant e_0 par les deux autres arêtes de f' . Les mouvements négatifs sont définis de la même façon. En particulier, pour les mouvements 3 → 2 (négatifs) l'arête qui disparaît doit être dans $T' \setminus H'$.

Definition 5.4. (*Transits*) Soit $\mathcal{T} = (T, H, b, w, f, c)$ une \mathcal{I} -triangulation distinguée, redressée et chargée de (Z, L) . On dit que $\mathcal{T}' = (T', H', b', w', f', c')$ est obtenue à partir de \mathcal{T} par transit au dessus d'un mouvement $(T, H) \leftrightarrow (T', H')$ si \mathcal{T} et \mathcal{T}' coïncident sur $T \cap T'$. Un *isomorphisme* entre deux paires (Z, \mathcal{T}) et (Z', \mathcal{T}') est la composition d'un nombre fini de transits et d'homéomorphismes simpliciaux qui préservent l'orientation et la structure complète des 3-simplexes (branchement, birapports, redressements et charges).

Les transits peuvent être caractérisés à l'aide d'équations explicites. En fait, la condition de localité $\mathcal{I}_{|T \cap T'} = \mathcal{I}'_{|T \cap T'}$ est très contraignante. Ainsi, lors d'un transit $2 \rightarrow 3$ le module total, le log-paramètre total et la charge totale en chaque arête de $T \cap T'$ doivent rester inchangés. Une conséquence est qu'il y a un degré de liberté pour choisir les redressements et les charges, mais que les birapports sont forcés. De plus, les transits de ces derniers ne sont définis que *génériquement* au-dessus d'un mouvement $2 \rightarrow 3$: on voit dans la figure 2 que le transit n'est possible que si $x \neq y$, où $x, y, \text{etc.}$ sont les birapports $w_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ des tétraèdres correspondants.

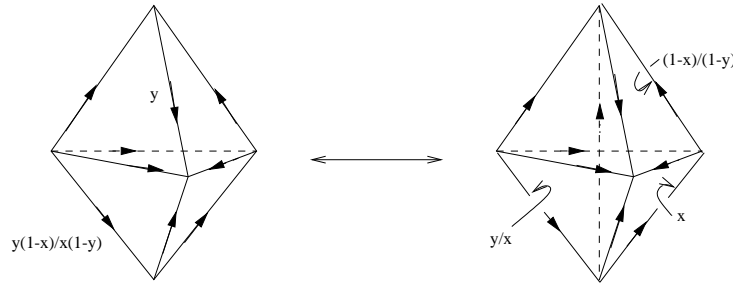


FIGURE 2. Un exemple de transit de branchement et de birapports.

Dans cette figure, tous les signes $*_b$ sont égaux à 1. Lorsque les birapports ont une partie imaginaire non nulle et positive, le développement dans \mathbb{H}^3 des \mathcal{I} -tétraèdres produit deux triangulations d'un même polyèdre idéal convexe et orienté, où chaque tétraèdre est positivement plongé et non dégénéré. Le transit correspond à une relation de congruence par découpage entre polyèdres. La condition de transit générale, avec les exposants $*_b$ dans les birapports $W_{\mathcal{T}}$, est l'extention naturelle aux situations sans convexité, où les tétraèdres peuvent être négativement orientés et peuvent se chevaucher.

La condition de localité montre que les contraintes globales dans les définitions 5.1 et 5.3 sont nécessaires pour garantir la stabilité par transit des classes de triangulations redressées et chargées. En effet, si on note E_0 la nouvelle arête de T' après un mouvement $2 \rightarrow 3$, on a

$$(36) \quad W_{\mathcal{T}'}(E_0) = 1, \quad L_{\mathcal{T}'}(E_0) = 0, \quad C_{\mathcal{T}'}(E_0) = 2.$$

Par contre, pour un transit bulle, en notant E_1 et E_2 les arêtes de f' distinctes de e_0 , et E_3 la dernière nouvelle arête de T' , on a

$$(37) \quad \begin{aligned} W_{\mathcal{T}'}(E_j) &= 1, & L_{\mathcal{T}'}(E_j) &= 0, & j &= 1, 2, 3 \\ C_{\mathcal{T}'}(E_1) &= C_{\mathcal{T}'}(E_2) = 0, & C_{\mathcal{T}'}(E_3) &= 2. \end{aligned}$$

5.3. Poids, existence et classes d'isomorphisme. Soit $\mathcal{T} = (T, b, w)$ une \mathcal{I} -triangulation, et ∂T_0 le bord d'un voisinage régulier des 0-simplexes intérieurs. C'est une union disjointe de surfaces fermées orientées et triangulées. Pour tout redressement f On peut définir une classe $\gamma(f) \in H^1(\partial T_0; \mathbb{C})$ de la façon suivante. On représente chaque classe $a \in H_1(\partial T_0; \mathbb{Z})$ par des "lacets normaux", c'est-à-dire une union disjointe de lacets simples et orientés, qui sont transverses à la triangulation ∂T_0 et intersectent les 2-simplexes en des arcs appuyés sur des faces distinctes. Chacun de ces arcs détermine un sommet de ∂T_0 , donc une arête de T dont c'est le bout. On définit $\gamma(f)(a)$ comme la somme signée des log-paramètres de ces arêtes, où le signe est $*_b$ si l'arc vu du sommet suit l'orientation de ∂T_0 , et $-*_b$ sinon.

En utilisant la condition de redressement F (Section 5.1) et la relation $L_{\mathcal{T}}(e) = 0$ en chaque arête intérieure e (Definition 5.1), on vérifie facilement que $\gamma(f)(a)$ ne dépend pas du choix des lacets

normaux qui représentent a , et envoie sur 0 les lacets homotopes au lacet constant. Donc $\gamma(f)$ associe un “nombre d’enroulement” complexe à chaque 1-classe d’homologie entière sur ∂T_0 , et définit un élément de $H^1(\partial T_0; \mathbb{C})$. De la même façon on peut définir $\gamma_2(f) \in H^1(T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ en utilisant des lacets normaux dans T_0 et en prenant la somme modulo 2 des redressements des arêtes sélectionnées par les lacets.

Supposons maintenant que (T, H) est une triangulation distinguée, et que la lice des sommets *singuliers*, qu’on note ∂T_0 , est une union de *tores* ou *d’anneaux*. Soit c une charge sur (T, H) . En remplaçant les log-paramètres par les charges et en posant $*_b = 1$, la même procédure que celle décrite ci-dessus définit une application $\gamma(c)$ à valeurs entières sur l’ensemble des lacets normaux *essentiels* de ∂T_0 . On peut étendre $\gamma(c)$ aux lacets normaux homotopes au lacet constant en leur associant la valeur 0 (en dépit du fait que la procédure pour les lacets essentiels donnerait la valeur ± 2 à un petit lacet autour d’un sommet de ∂T_0). La condition de charge C (Section 5.1) et la relation (35) impliquent qu’on obtient une classe $\gamma(c) \in H^1(\partial T_0; \mathbb{Z})$. En remplaçant les redressements par les charges on peut également définir $\gamma_2(c) \in H^1(T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

Définition 5.5. (*Poids*) Soit $\mathcal{T} = (T, H, b, w)$ une \mathcal{I} -triangulation distinguée de (Z, L) . Les *poids* de \mathcal{T} sont les paires $(\gamma(f), \gamma_2(f)) \in H^1(\partial T_0; \mathbb{C}) \times H^1(T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ and $(\gamma(c), \gamma_2(c)) \in H^1(\partial T_0; \mathbb{Z}) \times H^1(T; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où f et c décrivent les redressements et les charges de \mathcal{T} .

Soit $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$ un bordisme et $U(L)$ un voisinage tubulaire de $L_{\mathcal{F}}$, comme dans la Section 3. Notons λ et λ' deux copies de $L_{\mathcal{F}}$ sur $\partial U(L)$ telles que l’enlacement de λ' sur λ détermine la parallélisation \mathcal{F} de $L_{\mathcal{F}}$. On définit une pseudo-variété $Z(Y, L)$ en écrasant l’âme de chaque composante de $U(L)$ sur un point; elle contient l’enchevêtrement $\lambda \cup \lambda'$. Si (T, b, w) est une \mathcal{I} -triangulation de $Z(Y, L)$ dont la représentation d’holonomie coïncide avec ρ , on peut montrer que $\gamma(f)(a) = \gamma'(a) \pmod{\sqrt{-1}\pi\mathbb{Z}}$ et $(\gamma(f)(a) - \gamma'(a))/\sqrt{-1}\pi = i^*(\gamma_2(f))(a)$, où γ' est défini avant (5).

Le résultat fondamental concernant l’existence des triangulations munies de structures globales (Définitions 5.1 et 5.3) et leurs classes d’isomorphismes par transits (Définition 5.4) est le suivant. Il est obtenu par étapes dans [6, 7, 8].

Théorème 5.6. Soit $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$ un bordisme des *TQCH*, $(h_c, k_c) \in H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\partial U(L); \mathbb{Z})$ et $(h_f, k_f) \in H^1(Y; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\partial U(L); \mathbb{C})$ tel que

$$(38) \quad \begin{cases} (k_f - \gamma')/\sqrt{-1}\pi \in H^1(\partial U(L); \mathbb{Z}) \\ r((k_f - \gamma')/\sqrt{-1}\pi) = i^*(h_f). \end{cases}$$

1. Il existe des \mathcal{I} -triangulations distinguées (T, H, b, w) de $(Z(Y, L), \lambda \cup \lambda')$ d’holonomie ρ . Lorsque ρ est non triviale (resp. triviale) sur les méridiens d’une composante de $L_{\mathcal{F}}$, on peut remplacer les deux copies de cette composante dans $\lambda \cup \lambda'$ par celle dans λ' (resp. λ) seulement.

2. Toute \mathcal{I} -triangulation distinguée (T, H, b, w) de $(Z(Y, L), \lambda \cup \lambda')$ peut être munie de redressements f et de charges c de poids $(\gamma_2(c), \gamma(c)) = (h_c, k_c)$ et $(\gamma_2(f), \gamma(f)) = (h_f, k_f)$. Ces redressements/charges forment un espace affine sur un même réseau entier, dont les générateurs sont explicites et associés chacun à un site d’arête.

3. Il existe des \mathcal{I} -triangulation distinguées, redressées et chargées (T, H, b, w, f, c) de $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho)$ de poids $((h_c, k_c); (h_f, k_f))$ et qui sont compatibles avec α_{\pm} , dans le sens suivant : pour chaque composante $[*S, (\tau, \mathcal{L}, \mathcal{C}), \phi] \in \alpha_{\pm}$ on a $\phi(\tau) = (T, H, b)|_{\phi(S)}$, et ϕ identifie \mathcal{L} et \mathcal{C} avec les log-paramètres totaux $\{L_{\mathcal{T}}(e)\}_{e \in \phi(\tau)}$ et les charges totales $\{C_{\mathcal{T}}(e)\}_{e \in \phi(\tau)}$.

4. Toutes les \mathcal{I} -triangulations distinguées, redressées et chargées associées à un bordisme $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm})$ et de poids fixé $((h_c, k_c); (h_f, k_f))$ sont isomorphes.

La structure en strates de l’énoncé reflète la structure de la preuve. Un outil fondamental pour 1. est la *procédure d’idéatisation*, décrite dans la Section 5.5 ci-dessous. Les variations sur les composantes de $\lambda \cup \lambda'$ correspondent respectivement à réaliser l’entrelacs parallélisé $L_{\mathcal{F}}$ dans $Z(Y, L)$, ou bien seulement sa longueur déterminée par la parallélisation \mathcal{F} , elle-même n’étant pas parallélisée, ou enfin oublier la parallélisation. Les points 2.-4. s’appliquent également à ces variations. Étant donné (T, H, b, w, f, c) et (T', H', b', w', f', c') , la preuve de 4. consiste à compléter par des transits l’isomorphisme entre (T, H) et (T', H') représenté par une suite de mouvements, quitte à le modifier lorsque ce n’est pas

possible (pour les birapports). On utilise notamment la structure des redressements/charges, qu'on obtient à l'aide d'une généralisation du théorème 4.5. Remarquons ici que les transits préservent ρ et \mathfrak{h} .

5.4. Un exemple singulier : les variétés hyperboliques à pointes. On dit qu'une variété orientée M a des *pointes* lorsqu'elle est non compacte et admet une structure hyperbolique complète de volume fini; M est alors l'intérieur d'une variété à bord torique \bar{M} . On peut considérer les bordismes $(\chi(\bar{M}, l), L_{\mathcal{F}}, \rho, \emptyset, \mathfrak{h})$, où $\chi(\bar{M}, l)$ est fermée et obtenue par remplissage de Dehn le long d'une multicourbe $l \subset \partial\bar{M}$, et $L_{\mathcal{F}}$ est l'âme (parallélisée) du remplissage. Le théorème 5.6 fournit alors des triangulations "semi-idéales" de M , dont certains sommets sont "intérieurs" (donc réguliers) et contenus dans des copies parallèles de $L_{\mathcal{F}}$, et d'autres "à l'infini" qui correspondent aux pointes de M . Le "bord" $\partial\bar{M} \subset Z(\chi(\bar{M}, l), L_{\mathcal{F}})$ est parallélisé par l et \mathcal{F} .

D'un autre côté, M admet des triangulations *idéales géodésiques*, c'est-à-dire formées de tétraèdres hyperboliques idéaux plongés, quelques uns pouvant être plats, qu'on peut construire par exemple en subdivisant la cellulation canonique de Epstein-Penner [42]. Ces triangulations permettent de définir des \mathcal{I} -triangulations idéales (T, b, w_{comp}) de la pseudo-variété Z obtenue en compactifiant chaque bout de M par un point. L'holonomie de (T, b, w_{comp}) coïncide avec celle de la structure hyperbolique complète de M . On a une notion de poids \mathfrak{h} sur M , telle que $(h_c, k_c) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\partial M; \mathbb{Z})$, $(h_f, k_f) \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times H^1(\partial M; \mathbb{C})$, et (38) est vérifié en remplaçant $\partial U(L)$ par ∂M . On a l'analogue du théorème 5.6, 2. – 4. :

Théorème 5.7. ([7, Théorème 6.8]) *Toute \mathcal{I} -triangulation idéale de (M, \mathfrak{h}) peut être munie de redressements f et de charges c de poids \mathfrak{h} , formant des espaces affines sur un même réseau entier, avec un générateur par site d'arête. De plus, toutes les \mathcal{I} -triangulation idéales redressées et chargées de (M, \mathfrak{h}) sont isomorphes.*

Comme les triangulations idéales n'ont que des sommets singuliers, les déformations (T, b, w) des \mathcal{I} -triangulations idéales (T, b, w_{comp}) représentent des objets intrinsèques qu'on peut décrire de la manière suivante. (Une analyse similaire est possible pour $(\chi(\bar{M}, l), L_{\mathcal{F}})$; ci-dessous on oublie les charges, qu'on considérera dans la Section 6.2.)

Dans la suite de cette section on suppose que M a une unique pointe.

Soit (T, b) une triangulation comme ci-dessus, et n le nombre de ses 3-simplexes. On peut identifier toute \mathcal{I} -triangulation (T, b, w) supportée par T avec le n -uplet de birapports (w_0^1, \dots, w_0^n) . Notons

$$V' = \{(w_0^1, \dots, w_0^n) \mid W_T(e) = 1, \forall e \in T^{(1)}\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})^n \subset (\mathbb{C}^*)^n$$

l'ensemble de ces n -uplets, et $V \subset V'$ la composante irréductible qui contient la \mathcal{I} -triangulation (T, b, w_{comp}) associée à la structure hyperbolique complète. Soit $X(M)$ la variété des caractères dans $PSL(2, \mathbb{C})$ du groupe fondamental de M . L'application $V' \rightarrow X(M)$ définie par $w \mapsto \rho_w$, où $\rho_w : \pi_1(M) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$ est la représentation d'holonomie associée à (T, b, w) , est algébrique, génériquement 2 : 1 (car ρ_w est augmentée), et V est de dimension complexe 1 [93]. De plus $V \cap (\mathbb{H}^2)^n$ est lisse [26].

Notons X' la "composante géométrique" de $X(M)$, c'est-à-dire la composante irréductible qui contient l'holonomie de la structure hyperbolique complète. D'après un résultat de N. Dunfield [35], l'application $X(M) \rightarrow X(\partial M)$ induite par l'inclusion $\partial M \rightarrow M$ est un isomorphisme birationnel de X' sur son image. Par conséquent $X' \cong X/\sigma$, où $X \subset (\mathbb{C}^*)^2$ est une composante du lieu des zéros du A-polynôme pour $PSL(2, \mathbb{C})$, et σ est l'involution qui envoie chaque coordonnée sur son inverse. (Voir [23] et l'appendice de [19] pour cette version du A-polynôme, défini initialement dans [29]; on fixe une base de l'homologie de la pointe pour définir la courbe plane X). On a alors l'observation fondamentale suivante [23] : V est birationnel à X via l'application d'holonomie périphérique

$$\begin{aligned} \text{Hol} : V &\xrightarrow{\cong} X \subset (\mathbb{C}^*)^2 \\ w &\longmapsto (\lambda_w, \mu_w) \end{aligned}$$

où λ_w et μ_w sont les facteurs de dilatation de $\rho_w(\lambda)$ et $\rho_w(\mu)$, et (λ, μ) est une base fixée de l'homologie de la pointe. Notons que le point fixe de $\pi_1(\partial M)$ permet de choisir entre les facteurs de dilatation de λ ou λ^{-1} , et μ ou μ^{-1} .

Notons \hat{X} la surface de Riemann du logarithme naturel sur X :

$$\begin{aligned} \log : \quad X &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ (\lambda_w, \mu_w) &\longmapsto (\log(\lambda_w), \log(\mu_w)), \end{aligned}$$

et \hat{V} l'ensemble des redressements sur V (ie. sur la \mathcal{I} -triangulation correspondante) de poids intérieur nul, c'est-à-dire

$$\hat{V} = \{(w; f) \mid w \in V, L_{\mathcal{T}}(e) = 0, \forall e \in T^{(1)}, h_f = 0 \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\} \subset \hat{\mathbb{C}}^n$$

où l'on pose $(w; f) := ((w_0^1; f_0^1, f_1^1), \dots, (w_0^n; f_0^n, f_1^n))$. L'ensemble \hat{V} est naturellement muni d'une structure de revêtement sur V . Notons

$$\widehat{\text{Hol}}(w; f) := (k_{(w; f)}(\lambda), k_{(w; f)}(\mu)),$$

où $k_{(w; f)} \in H^1(\partial M; \mathbb{C})$ désigne ici le poids $\gamma(f)$ de la définition 5.5 (avec ∂M pour ∂T_0). On a $\exp(k_{(w; f)}(a)) = a_w, \forall a \in H_1(\partial M; \mathbb{Z})$. Avec le théorème 5.7 et en comparant avec (38) on peut montrer :

Théorème 5.8. (Espace des phases classique) *L'application d'holonomie périphérique Hol se relève en une application analytique $\widehat{\text{Hol}} : \hat{V} \longrightarrow \hat{X}$ qui est surjective sur le revêtement de l'image (dense) de Hol . La fibre d'un point générique de \hat{X} , c'est-à-dire l'ensemble des redressements de même poids, est un espace affine sur un réseau entier, avec un générateur pour chaque site d'arête.*

Par exemple, les calculs de [8, Section 7] montrent que pour le complément du noeud de huit on a :

$$\hat{V} = \{((w; p, q), (z; r, s)) \in \hat{\mathbb{C}} \times \hat{\mathbb{C}} \mid w^{-2}(1-w)z^{-2}(1-z) = 1, (S)\}$$

où (S) est le système linéaire

$$(S) = \begin{cases} s + 2r + 2p + q = -(\arg(1-w) + \arg(1-z) - 2(\arg(w) + \arg(z)))/\pi\sqrt{-1} \\ p + q + r + s \in 2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

De plus, pour le méridien μ et la longitude canonique λ , en posant $\bar{w} = (w; p, q)$ et $\bar{z} = (z; r, s)$, on a

$$\widehat{\text{Hol}}(\bar{w}, \bar{z}) = (k_{\bar{w}, \bar{z}}(\lambda), k_{\bar{w}, \bar{z}}(\mu)) =$$

$$(\log(1-w^{-1}) + \log(1-z^{-1}) + \pi\sqrt{-1}(p+q-r-s), 2\log(w) - 2\log(1-w^{-1}) + 2\pi\sqrt{-1}(q-1)).$$

La triangulation canonique du complément du noeud de huit a deux arêtes, mais leurs sites sont combinatoirement équivalents. Donc on a un unique degré de liberté pour choisir les redressements de poids donné.

On peut en particulier appliquer le théorème 5.7 lorsque M est fibrée sur le cercle, en utilisant des \mathcal{I} -triangulations redressées $\mathcal{T} = (T, b, w, f)$ telles qu'une fibre de M soit réalisée comme sous-complexe τ de T . Cette fibre est une surface époincée Σ . Lorsqu'on découpe M le long de τ on obtient le cylindre d'un difféomorphisme de Σ , muni d'une triangulation $\mathcal{T}_\tau = (\overline{T} \setminus \tau, b, w, f)$ dont le bord est formé de deux copies τ_+ et τ_- de τ . Pour chaque arête e de τ_\pm on peut interpréter $W_{\mathcal{T}_\tau}(e)$ (cf. Définition 5.1) comme le birapport des images sur $\partial\overline{\mathbb{H}}^3$ des quatres sommets dans le site de e sur τ_\pm , calculé en développant les \mathcal{I} -tétraèdres de \mathcal{T}_τ contenant e .

La collection $\{W_{\mathcal{T}_\tau}(e)\}_{e \in \tau_\pm}$ associe donc un nombre complexe non-nul à chaque arête de τ_\pm . On peut interpréter ces nombres comme les coordonnées de Bonahon-Thurston d'une structure hyperbolique sur Σ pliée le long de la triangulation idéale τ_\pm [22, 17]. En considérant les log-paramètres $L_{\mathcal{T}_\tau}(e)$ on peut également associer un vecteur tangent à cette structure, et pour toute charge sur \mathcal{T} produire un objet $(\Sigma, \tau_\pm, \{L_{\mathcal{T}_\tau}(e)\}_{e \in \tau_\pm}, \{C_{\mathcal{T}_\tau}(e)\}_{e \in \tau_\pm})$ de la catégorie des bordismes TQCH. De manière analogue à la notion de poids, pour toute courbe orientée γ sur Σ la somme (signée) des log-paramètres $L_{\mathcal{T}_\tau}(e)$, où e parcourt les arêtes traversées par γ , définit un nombre d'enroulement complexe pour γ .

5.5. Idéalisation et homologie discrète de $PSL(2, \mathbb{C})$. Les 1-cocycles simpliciaux sont une version combinatoire des fonctions de transition pour les atlas de cartes des fibrés principaux plats. On dit qu'un 1-cocycle simplicial z défini sur une triangulation T et à valeurs dans $PSL(2, \mathbb{C})$ est *idéalisable* si pour tout 3-simplexe de sommets x_0, x_1, x_2 et x_3 les points

$$(39) \quad u_0 = 0, \quad u_1 = z([x_0, x_1])(0), \quad u_2 = z([x_0, x_2])(0), \quad u_3 = z([x_0, x_3])(0)$$

sont distincts dans $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \partial\overline{\mathbb{H}^3}$. L'idéalisabilité est une propriété générique de $Z^1(T; PSL(2, \mathbb{C}))$ si T a suffisamment de sommets non singuliers. L'enveloppe convexe des points u_0, \dots, u_3 est un tétraèdre hyperbolique idéal dont les sommets sont ordonnés, c'est-à-dire un \mathcal{I} -tétraèdre (Δ, b, w) , qui est indépendant du branchement lorsque la relation de cocycle est induite par l'action à droite de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur lui-même (comme l'est l'action de $PSL(2, \mathbb{C})$ sur l'espace total du fibré plat défini par z). On appelle (Δ, b, w) l'*idéalisation* de z . L'idéalisation dépend du point base (ici, $u_0 = 0$), mais deux choix différents sont reliés par l'action de $C^0(T; PSL(2, \mathbb{C}))$ par cobords.

L'idéalisation produit une \mathcal{I} -triangulation, et avec (32) on peut construire simultanément un redressement global canonique f en posant pour chaque 3-simplexe [8, Lemme 2.13]

$$(40) \quad \begin{aligned} l_0 &:= \log(u_2 - u_1) + \log(u_3) - \log(u_2) - \log(u_3 - u_1) \\ l_1 &:= \log(u_2) + \log(u_3 - u_1) - \log(u_1) - \log(u_3 - u_2) \\ l_2 &:= \log(u_3 - u_2) + \log(u_1) - \log(u_3) - \log(u_2 - u_1). \end{aligned}$$

Nous allons voir comment l'idéalisation permet de décrire l'homologie (discrète) de $PSL(2, \mathbb{C})$ comme un groupe de découpage, une notion issue du 3ème problème de Hilbert (voir le beau survol [82]).

Commençons par un résultat général. Fixons un tétraèdre orienté abstrait Δ , et considérons le \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}[\mathcal{I}_{fc}]$ librement engendré par l'ensemble $\{*_b(\Delta, b, w, f, c)\}$ des \mathcal{I} -tétraèdres redressés et chargés supportés par Δ . On stipule la compatibilité du signe $*_b$ avec la somme algébrique dans $\mathbb{Z}[\mathcal{I}_{fc}]$, c'est-à-dire que $-(-(\Delta, b, w, f, c)) = (\Delta, b, w, f, c)$. Tout transit (Définition 5.4) induit une relation linéaire entre éléments de $\mathbb{Z}[\mathcal{I}_{fc}]$. Soit $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{fc})$ le quotient de $\mathbb{Z}[\mathcal{I}_{fc}]$ par l'idéal des relations à cinq termes engendrées par les transits $2 \leftrightarrow 3$. Le résultat suivant est une conséquence du théorème 5.6 (voir [7, Section 7] pour le cas des variétés fermées ou hyperboliques à pointes) :

Théorème 5.9. *Pour tout bordisme pondéré $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ et toute \mathcal{I} -triangulation distinguée, redressée et chargée \mathcal{T} de $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$, la classe $[T] \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_{fc})$ définie par la somme formelle des 3-simplexes de \mathcal{T} ne dépend pas du choix de \mathcal{T} . Donc $\mathfrak{c}_{fc}(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h}) =: [T]$ est un invariant de $(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$, appelé sa \mathcal{I}_{fc} -classe de découpage.*

En oubliant les charges, ou les charges et les redressements, on obtient des groupes $\mathcal{P}(\mathcal{I}_f)$ et $\mathcal{P}(\mathcal{I})$, et des classes $\mathfrak{c}_f(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h}) \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_f)$ et $\mathfrak{c}(Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h}) \in \mathcal{P}(\mathcal{I})$, respectivement. Le groupe $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ est une extension sensible à l'orientation du groupe $\mathcal{P}(\mathbb{H}^3)$ des polyèdres hyperboliques (finis ou infinis) modulo les découpages géodésiques [39, Théorème 4.7] (voir aussi [82, Théorème 3.4]). En effet, $\mathcal{P}(\mathbb{H}^3)$ est isomorphe à $\mathcal{P}(\mathbb{C})/([z] + [\bar{z}])$, où $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ est le quotient de $\mathbb{Z}[\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}]$ par l'identité à cinq termes (voir Figure 2)

$$(41) \quad [x] - [y] + \left[\frac{y}{x}\right] - \left[\frac{1-x^{-1}}{1-y^{-1}}\right] + \left[\frac{1-x}{1-y}\right] = 0,$$

et on peut identifier $\mathcal{P}(\mathcal{I})$ et $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ via l'application $(\Delta, b, w) \mapsto [w_0]$ (en fait l'identité (41) implique des relations de symétrie permettant d'oublier le branchement, voir [39, Lemme 5.11]). De plus le groupe $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ est relié à l'homologie discrète de $PSL(2, \mathbb{C})$ de la façon suivante. Considérons l'*invariant de Dehn complexe* [39]

$$(42) \quad \delta_{\mathbb{C}} : \mathcal{P}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^* \wedge \mathbb{C}^* \quad , \quad [z] \mapsto z \wedge (1 - z).$$

Ici la puissance extérieure du groupe \mathbb{C}^* est définie sur \mathbb{Z} et notée additivement, c'est-à-dire le groupe des sommes formelles de symboles $a \wedge b$ avec $a, b \in \mathbb{C}^*$, où $a \wedge b$ est bimultiplicatif et $a \wedge a = 0$. L'invariant de Dehn classique $\delta : \mathcal{P}(\mathbb{H}^3) \rightarrow \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}$ est égal à deux fois la "partie imaginaire" de $\delta_{\mathbb{C}}$, c'est-à-dire sa troisième composante dans le scindement $\mathbb{C}^* \wedge \mathbb{C}^* = (\mathbb{R} \wedge \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R}/\pi\mathbb{Q} \wedge \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}/\pi\mathbb{Q})$ [82, Section 3]. Le *groupe de Bloch*

$$\mathcal{B}(\mathbb{C}) := \text{Ker}(2\delta_{\mathbb{C}})$$

vérifie la suite exacte de Bloch-Wigner [39, Appendice]

$$(43) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \longrightarrow H_3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{B}(\mathbb{C}) \longrightarrow 0.$$

La première application est induite par l'inclusion diagonale de \mathbb{Q}/\mathbb{Z} dans $PSL(2, \mathbb{C})$. La seconde est induite par l'application $[g_1|g_2|g_3] \mapsto [0 : g_1(0) : g_2(0) : g_3(0)]$, où $[g_1|g_2|g_3] \in \bar{B}_3$, et \bar{B}_* est le complexe des chaînes non homogènes pour le calcul de l'homologie du groupe discret $PSL(2, \mathbb{C})$ (voir eg. [38, Section 4]). Cette application coïncide avec l'idéalisation, qui associe (Δ, b, w) à l'élément

$$[g_1|g_2|g_3] := [z([x_0, x_1]) \mid z([x_0, x_2]) \mid z([x_0, x_3])].$$

W. Neumann a montré dans [84] comment $\mathcal{P}(\mathcal{I}_f)$ permet de récupérer l'intégralité de $H_3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$. Considérons le "relevé" de $\delta_{\mathbb{C}}$:

$$\hat{\delta}_{\mathbb{C}} : \mathcal{P}(\mathcal{I}_f) \rightarrow \mathbb{C} \wedge_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \quad , \quad [(\Delta, b, w, f)] \mapsto l_0 \wedge l_1,$$

où les log-paramètres l_j sont définis dans (30). L'application $\hat{\delta}_{\mathbb{C}}$ est bien définie, c'est-à-dire qu'elle envoie les transits $2 \leftrightarrow 3$ sur 0 [84, Lemme 2.3]. Il existe un élément $\kappa \in \mathcal{P}(\mathcal{I}_f)$ d'ordre 2 tel que $\hat{B}(\mathbb{C}) := \text{Ker}(\hat{\delta}_{\mathbb{C}})/\kappa$, le *groupe de Bloch étendu*, vérifie :

Théorème 5.10. *L'application d'idéalisation $[g_1|g_2|g_3] \mapsto (\Delta, b, w, f)$, où $w_0 := [0 : g_1(0) : g_2(0) : g_3(0)]$ et f est déterminé par (40), induit un isomorphisme*

$$H_3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z}) \xrightarrow{\hat{\sigma}} \hat{B}(\mathbb{C}).$$

Ce résultat est dû à W. Neumann (sous une autre forme, [84, Théorèmes 4.6 et 12.1]). Une généralisation au groupe $H_3(SL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$ a été obtenue par J. Dupont et C. Zickert [40] en utilisant des arguments purement algébriques. En particulier, si W est une 3-variété fermée munie d'un caractère ρ dans $PSL(2, \mathbb{C})$, la classe $\mathbf{c}_f(W, \emptyset, \rho, \emptyset, 0)$ définie par le théorème 5.9 vérifie $\mathbf{c}_f(W, \emptyset, \rho, \emptyset, 0) = \hat{\sigma}^{-1}(\alpha_\rho)$, où $\alpha_\rho = f_*([W])$ pour une application classifiante $f : W \rightarrow BPSL(2, \mathbb{C})$ associée à ρ . Le groupe $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{f_c})$ et les classes $\mathbf{c}_{\mathcal{I}_{f_c}}$ sont mystérieux.

6. INVARIANTS DES 3-VARIÉTÉS

6.1. Dilogarithmes matriciels et tenseurs $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$. Les dilogarithmes matriciels sont des applications à valeurs tensorielles

$$\mathcal{R}_N : \{\Delta(b, w, f, c)\} \longrightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^N \otimes \mathbb{C}^N)$$

définies pour chaque entier positif impair N . En fait, \mathcal{R}_1 est une fonction à valeur complexe obtenue à partir des dilogarithmes classiques. On la considère comme une matrice de taille 1. Pour chaque tétraèdre branché (Δ, b) les tenseurs $\mathcal{R}_N(\Delta(b, w, f, c))$ et $\mathcal{R}_1(\Delta(b, w, f, c))$ définissent des fonctions $\mathcal{R}_N(\Delta(b))$ et $\mathcal{R}_1(\Delta(b))$ sur les espaces $\hat{\mathbb{C}}_N$ et $\hat{\mathbb{C}}$ de la section 5.1, respectivement, qui sont analytiques modulo la multiplication par une racine N -ième de l'unité.

1. Le dilogarithme "classique" (indépendant des charges) :

$$\mathcal{R}_1(\Delta, b, w, f) = \exp((*_b/\pi\sqrt{-1})\mathcal{R}(w_0; f_0, f_1)),$$

où la fonction $\mathcal{R} : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$ est analytique et définie par (W. Neumann [82])

$$(44) \quad \mathcal{R}(z; p, q) = -\frac{1}{2} \int_0^z \left(\frac{\log(1-t)}{t} + \frac{\log(t)}{1-t} \right) dt + \frac{\pi i}{2} (p \log(1-z) + q \log(z)) - \frac{\pi^2}{6}.$$

Avec $p = q = 0$ on retrouve le dilogarithme de Rogers (17).

2. Les dilogarithmes "quantiques" ($N > 1$) ([7]):

$$(45) \quad \mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c) = ((w'_0)^{-c_1} (w'_1)^{c_0})^{\frac{N-1}{2}} (\mathcal{L}_N)^{*b} (w'_0, (w'_1)^{-1})$$

où les composantes de $(\mathcal{L}_N)^{*b}(w'_0, (w'_1)^{-1})$ s'écrivent dans le produit tensoriel des bases canoniques de \mathbb{C}^N comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(w'_0, (w'_1)^{-1})_{k,l}^{i,j} &= \frac{g_N(w'_0)}{g_N(1)} \zeta^{kj+(m+1)k^2} \omega_N(w'_0, (w'_1)^{-1}|i-k) \delta(i+j-l) \\ (\mathcal{L}_N(w'_0, (w'_1)^{-1})^{-1})_{k,l}^{i,j} &= N^{-1} \frac{g_N(1)(1-w_0)}{g_N(w'_0)(1-w'_0)} \zeta^{-il-(m+1)i^2} \frac{\delta(k+l-j)}{\omega_N(w'_0/\zeta, (w'_1)^{-1}|k-i)}. \end{aligned}$$

Les fonctions ω_N et g_N sont définies dans la section 4.1. On note $\zeta = \exp(2i\pi/N)$, $m = (N-1)/2$, et δ le symbole de Kronecker de période N , c'est-à-dire tel que $\delta(n) = 1$ si $n \equiv 0 \pmod{N}$ et $\delta(n) = 0$ sinon. Notons $q = -\zeta^{m+1} = \exp(\sqrt{-1}\pi/N)$. On a les identités

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_N(w'_0, (w'_1)^{-1})_{k,l}^{i,j} &= \frac{g_N(w'_0 \zeta^{i-k})}{g_N(1)} \zeta^{kj+(m+1)(k^2+(k-i)(f_1-c_1))} \delta(i+j-l) \\ &= \frac{g_N(w'_0)}{g_N(1)} (-q)^{2kl-i^2} \prod_{n=1}^{k-i} ((w'_2)^{-1} - w'_1 q^{2n-1}) \delta(i+j-l), \end{aligned}$$

qui montrent le rôle de g_N et le fait que les coefficients de $\mathcal{L}_N(w'_0, (w'_1)^{-1})$ sont des polynômes multipliés par $g_N(w'_0)/g_N(1)$. La figure 3 montre comment le branchement b fait correspondre les faces de Δ aux copies de \mathbb{C}^N à la source et au but de $\mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c)$ (représenté par le croisement).

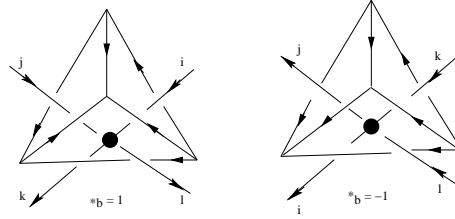


FIGURE 3. dilogarithmes matriciels

Pour tout $N \geq 1$ impair et toute \mathcal{I} -triangulation distinguée, redressée et chargée \mathcal{T} on définit le tenseur $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$ de la manière suivante. Comme ci-dessus on associe un dilogarithme matriciel à chaque 3-simplexe (Δ, b, w, f, c) de \mathcal{T} . On appelle N -état de \mathcal{T} une application $s : T^{(2)} \rightarrow \{0, \dots, N-1\}$; sa valeur sur un 2-simplexe, ou état, détermine un vecteur de la base canonique de la copie de \mathbb{C}^N correspondante (voir la figure 3). En particulier elle détermine une composante, qu'on notera $\mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c)_s$, de chaque tenseur $\mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c)$. Comme deux 3-simplexes induisent des orientations opposées sur une face commune f , son état $s(f)$ est au but du dilogarithme matriciel de l'un et à la source de l'autre. On note

$$\mathbb{T}r_{\mathcal{T}} \mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c) := \sum_s \prod_{\Delta \subset T} \mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c)_s$$

la contraction totale des tenseurs $\mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c)$, où s parcourt les N -états de \mathcal{T} . Soit v_I et v_δ les cardinaux des ensembles de sommets non singuliers de $T \setminus \partial T$ et ∂T , respectivement. On pose

$$(46) \quad \mathcal{H}_N(\mathcal{T}) := N^{-(v_\delta/2+v_I)} \mathbb{T}r_{\mathcal{T}} \mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c).$$

Par exemple, pour $N = 1$, en numérotant les 3-simplexes de \mathcal{T} on a

$$(47) \quad \mathcal{H}_1(\mathcal{T}) = \prod_{\Delta^i \subset T} \mathcal{R}_1(\Delta^i, b^i, w^i, f^i, c^i) = \exp\left(\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \sum_{\Delta^i \subset T} *_{b^i} \mathcal{R}(w_0^i; f_0^i, f_1^i)\right).$$

Le résultat fondamental sur la structure locale des tenseurs $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$ est le suivant (pour simplifier l'énoncé on omet un point technique concernant la résolution d'une ambiguïté additionnelle de signe, voir [8, Proposition 2.16]) :

Théorème 6.1. ([7, Théorème 2.1 et Lemme 6.7]) *Les tenseurs $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$ sont invariants par transits.*

Ce résultat est une conséquence de propriétés de symétrie tétraédrales, et d'identités à cinq termes qui correspondent aux transits $2 \leftrightarrow 3$, satisfaites par les dilogarithmes matriciels. En fait la proposition 4.3 s'étend au tenseur $\mathcal{L}_N(w'_0, (w'_1)^{-1})$, qui coïncide *formellement* avec $R(\rho, \mu, \nu)$ (voir (22)) bien qu'il soit défini sur l'espace $\widehat{\mathbb{C}}_N$. Il satisfait une identité à cinq termes supportée par le transit $2 \leftrightarrow 3$ de la figure 2, qui est ainsi formellement équivalente à l'équation du pentagone pour $R(\rho, \mu, \nu)$. Dans [7, Section 5] nous avons montré que l'application \mathcal{R}_N est l'unique solution d'un problème de symétrisation pour $\mathcal{L}_N(x, y)$ équivalent à la réalisation de toutes les identités à cinq termes. En particulier, les formules (30) et (34) sont forcées par ce problème, pour $N = 1$ et $N > 1$ respectivement. Pour $N = 1$, l'identité à cinq termes supportée par le transit $2 \leftrightarrow 3$ de la figure 2 est la relation (16), où l'on remplace L par le dilogarithme de Neumann (44) [84, Proposition 2.5].

6.2. Invariants; le cas des variétés hyperboliques à pointes. Les théorèmes 5.6 et 6.1 impliquent le résultat suivant, qui garantit l'existence des TQCH :

Théorème 6.2. ([8, Théorème 5.4]) *Soit $(\mathcal{B}, \mathfrak{h}) = (Y, L_{\mathcal{F}}, \rho, \alpha_{\pm}, \mathfrak{h})$ un bordisme pondéré et \mathcal{T} une \mathcal{I} -triangulation distinguée, redressée et chargée de $(\mathcal{B}, \mathfrak{h})$. Le morphisme $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$ ne dépend pas du choix de \mathcal{T} , de sorte que $\mathcal{H}_N(\mathcal{B}, \mathfrak{h}) = \mathcal{H}_N(\mathcal{T}) : \mathcal{H}_N(\alpha_-) \rightarrow \mathcal{H}_N(\alpha_+)$ est bien défini. De plus, $\mathcal{H}_N(\mathcal{B}, \mathfrak{h}) = \mathcal{H}_N(\mathcal{B}, \mathfrak{h}')$ si les réductions mod $(N\mathbb{Z})$ des composantes de \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' sont égales.*

Voici une interprétation géométrique de \mathcal{H}_1 . D'après le théorème 5.10 l'idéalisation induit une injection de $H_3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z})$ dans le groupe de découpage $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$ (en fait, $\text{Ker}(\delta_{\mathbb{C}}) \cong \widehat{\mathcal{B}}(\mathbb{C}) \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$). Or le dilogarithme (44) induit un homomorphisme $\mathcal{R} : \mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}}) \rightarrow \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$ (W. Neumann, [83, Proposition 2.5]; voir le théorème 6.1). W. Neumann a montré que sa restriction $\mathcal{R} : H_3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$ coïncide avec la classe de Cheeger-Chern-Simons $\hat{C}'_2 \in H^3(PSL(2, \mathbb{C}); \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z})$ [84, Théorème 12.1] (voir [40] pour le même résultat avec le relevé $\hat{C}'_2 : H_3(SL(2, \mathbb{C}); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}/2\pi^2\mathbb{Z}$). Si M est une variété hyperbolique à pointes on a également $\mathcal{R}(M) = \sqrt{-1}(\text{Vol}(M) + \sqrt{-1}\text{CS}(M)) \text{ mod } (\pi^2\mathbb{Z})$, où CS est l'extension de Meyerhoff de l'invariant de Chern-Simons [71] [84, Corollaire 14.6] (voir la section 4.3). Dans ce contexte \mathcal{H}_1 apparaît comme une extension de $\exp(\hat{C}'_2/i\pi)$ aux classes $c_{\mathcal{T}}$ de $\mathcal{P}(\mathcal{I}_{\mathcal{F}})$ définies comme dans le théorème 5.9, et coïncide avec $\exp(\hat{C}'_2/i\pi)$ pour une famille de redressements dits "pairs".

Nous allons maintenant décrire les invariants $H_N(M, \mathfrak{h})$ des variétés hyperboliques à pointes. Soit \mathcal{T} une \mathcal{I} -triangulation idéale, redressée et chargée de (M, \mathfrak{h}) dont l'holonomie est celle de la structure hyperbolique complète. Comme dans (48) posons

$$(48) \quad H_N(\mathcal{T}) := \text{Tr}_{\mathcal{T}} \mathcal{R}_N(\Delta, b, w, f, c) \in \mathbb{C}.$$

Les théorèmes 5.7, 5.8 et 6.1 impliquent (voir [7, Théorème 6.6] pour la première affirmation) :

Théorème 6.3. *$H_N(\mathcal{T})$ ne dépend pas du choix de \mathcal{T} , de sorte que $H_N(M, \mathfrak{h}) := H_N(\mathcal{T}) \in \mathbb{C}/(\mu_N)$ est bien défini (ie. modulo la multiplication par les racines N èmes de 1). Si les réductions mod $(N\mathbb{Z})$ des composantes de \mathfrak{h} et \mathfrak{h}' sont égales alors $H_N(M, \mathfrak{h}) = H_N(M, \mathfrak{h}')$. De plus, si M a une seule pointe alors $H_N(M, \rho, \mathfrak{h}) := H_N(\mathcal{T}) \in \mathbb{C}/(\mu_N)$ est aussi défini pour les \mathcal{I} -triangulation idéales, redressées et chargées \mathcal{T} de (M, \mathfrak{h}) dont l'holonomie ρ est telle que $\rho|_{\partial M}$ est dans la composante géométrique X du $PSL(2, \mathbb{C})$ -A-polynôme.*

Supposons désormais que M a une seule pointe. Lorsque $N = 1$ la formule (47) montre que $H_1(\mathcal{T})$ est analytique sur la variété \hat{V} du théorème 5.8. Le théorème 6.3 implique

Corollaire 6.4. ([9]) *L'invariant $H_1(M, \rho, \mathfrak{h})$ définit une fonction analytique $H_1(M) : \hat{X} \rightarrow \mathbb{C}$.*

D'après la discussion qui suit le théorème 6.2, $H_1(M)$ coïncide avec $\exp(\hat{C}'_2/\sqrt{-1}\pi)$, où \hat{C}'_2 est l'invariant de Cheeger-Chern-Simons.

Sur la surface de Riemann $\widehat{\mathbb{C}}$ on a la 2-forme réelle

$$\begin{aligned} d \log(z) \wedge d \log(1-z)^{-1} &= (\text{Re}(1/z)\text{Im}(1/(1-z)) - \text{Im}(1/z)\text{Re}(1/(1-z))) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{\text{Im}(z)}{|z|^2|1-z|^2} dz \wedge d\bar{z}, \end{aligned}$$

où $d\log(z) = z^{-1}dz$ et $d\log(1-z)^{-1} = (1-z)^{-1}dz$ sont interprétés comme des covecteurs réels. Rappelons que $\widehat{\text{Hol}}(w; f) = (k_{(w;f)}(\lambda), k_{(w;f)}(\mu))$, où $k_{(w;f)} \in H^1(\partial M; \mathbb{C})$ est le poids défini par la \mathcal{I} -triangulation idéale et redressée \mathcal{T} de M associée à $(w; f) \in \widehat{V}$. La surface de Riemann $\hat{X} \subset \mathbb{C}^2$ est aussi munie d'une structure Kähler, définie par

$$\Omega_{(w;f)} := dk_{(w;f)}(\lambda) \wedge dk_{(w;f)}(\mu) = d\log(\lambda_w) \wedge d\log(\mu_w),$$

et induite par la 2-forme antisymétrique complexe canonique de \mathbb{C}^2 .

Théorème 6.5. ([9]) (Formule simpliciale pour la 1-forme variation) *On a*

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Hol}}^*(k_{(w;f)}(\lambda)dk_{(w;f)}(\mu) - k_{(w;f)}(\mu)dk_{(w;f)}(\lambda)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n *_{b_i} l_0^i dl_1^i - l_1^i dl_0^i \\ \widehat{\text{Hol}}^*(d\log(\lambda_z) \wedge d\log(\mu_z)) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n *_{b_i} d\log(z^i) \wedge d\log(1-z^i)^{-1}. \end{aligned}$$

Ces identités permettent d'obtenir des formules de variation pour la fonction $H_1 : \hat{X} \rightarrow \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$, qui sont compatibles avec celles pour l'invariant de Cheeger-Chern-Simons \hat{C}_2 obtenues par P. Kirk et E. Klassen [69]. Voir aussi [84] pour le calcul de la longueur complexe de l'âme géodésique dans les formules de chirurgie hyperboliques, et [53, Section 5] et [29, Section 4] pour la variation du volume $\text{Im}(\hat{C}_2)$. Une version combinatoire du théorème 6.5 était déjà contenue implicitement dans [81, Théorème 4.2] (voir aussi [26] et [84, Lemme 10.2]).

La variété \hat{V} a un analogue "quantique" \hat{V}_N associé aux \mathcal{I} -triangulations idéales, redressées *et chargées* supportées par T , et défini par

$$\hat{V}_N = \{(((w_0^1)')', (w_1^1)')', \dots, ((w_0^n)')', (w_1^n)')') \mid W'_T(e) = \exp(-2i\pi/N), \forall e \in T^{(1)}, \\ h_f = h_c = 0 \in H^1(M; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\} \subset (\widehat{\mathbb{C}}_N)^n,$$

où $W'_T(e)$ est obtenu à partir de $W_T(e)$ (Définition 5.1) en remplaçant les birapports $(w_j^i)^{*b_i}$ par les racines N èmes $((w_j^i)')^{*b_i}$, qui sont définies dans (31)-(34) par $(w_j^i)' = \exp(l_{j,N}^i)$ et

$$(49) \quad \begin{aligned} l_{0,N}^i &= \frac{1}{N}(\log(z^i) + \sqrt{-1}\pi(N+1)(f_0^i - *_{b_i}c_0^i)) \\ l_{1,N}^i &= \frac{1}{N}(\log(1-z^i)^{-1} + \sqrt{-1}\pi(N+1)(f_1^i - *_{b_i}c_1^i)). \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} \widehat{\text{Hol}}_N : \hat{V}_N &\longrightarrow \mathbb{C}^2 \\ w' &\longmapsto (k_{w'}(\lambda), k_{w'}(\mu)) \end{aligned}$$

où $k_{w'}(a) := \exp((k_{(w;f)}(a) - \sqrt{-1}\pi\gamma(c)(a))/N)$ pour tout $a \in H_1(\partial M; \mathbb{Z})$, et $\gamma(c)$ est le poids de la charge c (Définition 3.2). Soit $\hat{X}_N := \widehat{\text{Hol}}_N(\hat{V}_N)$, l'espace des phases quantique de M . C'est une revêtement fini de X . Notons le rôle des poids $\gamma(c)$, à la différence de \hat{X} . De façon analogue au corollaire 6.4 on obtient :

Corollaire 6.6. ([9]) $H_N(M, \rho, \mathfrak{h})$ définit une fonction rationnelle $H_N(M) : \hat{X}_N \rightarrow \mathbb{C}/(\mu_N)$.

Lorsque M est la suspension d'un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface époincée Σ , on peut aussi définir $H_1(M)$ comme une fonction sur le revêtement universel de l'espace des paramètres de Bonahon-Thurston pour les structures hyperboliques de Σ plissées le long d'une triangulation idéale (voir Section 5.4). Un résultat analogue vaut pour $H_N(M)$, $N > 1$.

7. TRAVAUX ACTUELS ET PERSPECTIVES

Les problèmes centraux autour desquels devraient se développer les TQCH sont :

- P1. la résolution de l'ambiguïté du foncteur \mathcal{H}_N modulo la multiplication par les racines N èmes de l'unité;

- P2. l'étude des représentations linéaires des groupes modulaires, en relation avec celles de Bonahon-Liu [18], issues des espaces de Teichmüller quantiques (fidélité, invariants asymptotiques et comportement par rapport à la classification de Nielsen-Thurston des difféotopies des surfaces);
- P3. le comportement asymptotique des fonctions de partition $\mathcal{H}_N(W, L_{\mathcal{F}}, L^0, \rho, \mathfrak{h})$ et $H_N(M, \mathfrak{h})$ (ou $H_N(M, \rho, \mathfrak{h})$ lorsqu'on a une seule pointe);
- P4. les relations entre les TQCH et les théories quantiques des champs homotopiques de V. Turaev pour $SL(2, \mathbb{C})$ [96].

Notons ici que les TQCH sont reliées aux théories de la gravitation quantique en dimension $(2 + 1)$ ([103],[12]). Mes travaux actuels se concentrent sur les problèmes P3 et P4, dont je donne quelques éléments ci-dessous.

Le problème P3 a une partie locale et une partie globale. La partie locale, c'est l'analyse des propriétés asymptotiques des dilogarithmes matriciels. Je l'ai entamée dans [10]. On peut montrer que pour tous les tenseurs $\mathcal{H}_N(\mathcal{T})$, $\limsup |\mathcal{H}_N(\mathcal{T})|^{1/N}$ existe. Il s'agit maintenant d'étudier cette limite comme fonction sur \hat{X}_∞ , la limite de $\{\hat{X}_N\}$ pour la métrique de Hausdorff sur les compacts de \mathbb{C}^2 . Par définition, \hat{X} est une *amibe* complexe, au sens de [51, 72], et $\{\hat{X}_N\}$ est l'exponentielle d'une famille de déformations de \hat{X} . La partie réelle $\mathbb{R}\hat{X}_\infty$ est une courbe tropicale reliée à la déquantification de Maslov du $PSL(2, \mathbb{C})$ -A-polynôme [99]. Dans [10] on essaie de comprendre $H_N(S^3 \setminus K)$ pour le noeud de huit K (calculé dans [8, Section 7]), ainsi que pour les revêtements cycliques de S^3 ramifiés le long de K .

Lorsque M est la suspension d'un difféomorphisme pseudo-Anosov d'une surface épointée idéalement triangulée, il existe une formule intégrale de $H_1(M)$ en termes de la 1-forme longueur complexe sur l'espace des paramètres de Bonahon-Thurston [9]. En utilisant des formules simpliciales similaires à celles du théorème 6.5, j'essaie de construire $H_N(M)$ par quantification géométrique de $H_1(M)$ (voir aussi [8, Section 2.1.2]).

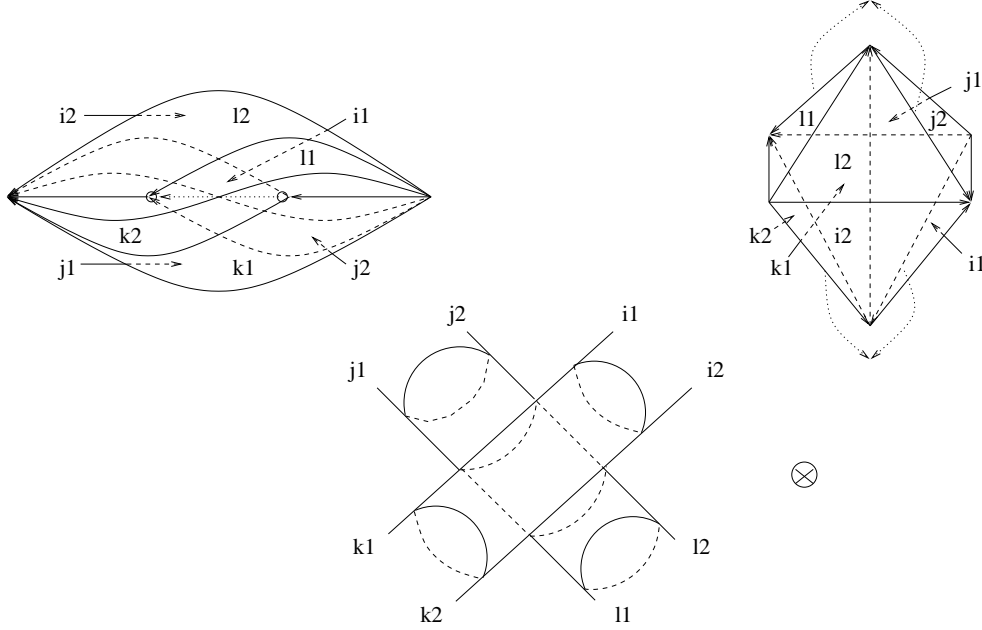
Le problème P4. Les TQCH sont baties sur un formalisme simplicial. On aimerait avoir une définition alternative dans un cadre proche des théories quantiques des champs de Turaev [96] (voir aussi [61]). Le cas classique $N = 1$ doit correspondre (voir [96], Exemples 1.3 et 2.6) à la $PSL(2, \mathbb{C})$ -catégorie batie sur le 3-cocycle défini par

$$\mathfrak{R}([g_1|g_2|g_3]) = \mathcal{R}(w_0; f_0, f_1),$$

où \mathcal{R} est le dilogarithme de Neumann (44), $w_0 := [0 : g_1(0) : g_2(0) : g_3(0)]$ et f est déterminé par (40) (voir Théorème 5.10).

Le cas quantique correspond à la théorie des représentations de $U_{\zeta}(sl(2, \mathbb{C}))$. A coté d'une définition directe on peut tenter d'obtenir la théorie homotopique par reconstruction à partir des TQCH. Une étape préminaire consiste à relier les \mathcal{I} -triangulations redressées et chargées aux diagrammes planaires des enchevêtrements de S^3 , munis d'un $PSL(2, \mathbb{C})$ -caractère sur le complément. La figure 4 (droite) montre une \mathcal{I} -triangulation redressée et chargée \mathcal{O} supportée par un octaèdre branché dont deux paires d'arêtes sont identifiées. Ce complexe est dual d'un croisement (bas de la figure 4), et définit des cobordismes singuliers \mathcal{X} , les *complexes de tressage*, entre des paires de disques bi-épointés, munis de triangulations différentes et dont les piqures sont identifiées (gauche de la figure 4) (il y a plusieurs choix de cobordismes !).

La "transformée de Fourier discrète" du tenseur $\mathcal{H}_N(\mathcal{X}) \in \text{Aut}((\mathbb{C}^N)^{\otimes 4})$ associé à \mathcal{X} par les TQCH (voir (48)) est une R -matrice à paramètre $\mathcal{R}_N(\mathcal{X})$, qui généralise celle de Kashaev [57, 56] et permet de construire des représentations des groupes des tresses de \mathbb{R}^3 de manière analogue à 4., Section 3. Donnons des formules explicites. Soit $(\Delta^i, b^i, w^i, f^i, c^i)$, $i = 1, \dots, 4$, avec $w^i = \{w_j^i\}$ etc., les \mathcal{I} -tétraèdres redressés et chargés de l'octaèdre singulier \mathcal{O} , ordonnés dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de l'axe vertical avec l'orientation donnée par le branchement, et en commençant


 FIGURE 4. L'octaèdre singulier \mathcal{O} et un complexe de tressage \mathcal{X} .

par le premier 3-simplexe. On a :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_N(\mathcal{X})_{k_1, k_2, l_1, l_2}^{i_1, i_2, j_1, j_2} &= N K_{\mathcal{X}} \theta(i_{12} - k_{12}) \theta(l_{12} - j_{12}) \zeta^{(l_1 - j_1)(i_1 - k_1 + l_{12})} \\ &\quad \times \frac{\omega_N(((w_1^2)')^{-1}, (w_0^2)'|j_2 - i_1) \omega_N(((w_1^4)')^{-1}, (w_0^4)'|l_1 - k_2)}{\omega_N(((w_1^1)')^{-1}/\zeta, (w_0^1)'|l_2 - i_2) \omega_N(((w_1^3)')^{-1}/\zeta, (w_0^3)'|j_1 - k_1)} \\ \tilde{\mathcal{R}}_N^{-1}(\mathcal{X})_{i_2, j_2, k_1, l_1}^{l_2, i_1, j_1, k_2} &= N \bar{K}_{\mathcal{X}} \theta(i_{12} - k_{12}) \theta(l_{12} - j_{12}) \zeta^{-(l_1 - j_1)(i_1 - k_1 + l_{12})} \\ &\quad \times \frac{\omega_N(((w_1^1)')^{-1}, (w_0^1)'|l_2 - i_2) \omega_N(((w_1^3)')^{-1}, (w_0^3)'|j_1 - k_1)}{\omega_N(((w_1^2)')^{-1}/\zeta, (w_0^2)'|j_2 - i_1 + 1) \omega_N(((w_1^4)')^{-1}/\zeta, (w_0^4)'|l_1 - k_2 + 1)}, \end{aligned}$$

où

$$(w_1^1)'((w_1^2)')^{-1}(w_1^3)'((w_1^4)')^{-1} = \exp(-2\sqrt{-1}\pi/N) \quad , \quad c_1^1 + c_1^2 + c_1^3 + c_1^4 = 2,$$

et on note

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{O}} &= [((w_1^2)')^{-1}] [((w_1^4)')^{-1}] \frac{g_N(((w_1^2)')^{-1}/\zeta) g_N(((w_1^4)')^{-1}/\zeta)}{g_N(((w_1^1)')^{-1}/\zeta) g_N(((w_1^3)')^{-1}/\zeta)} \\ &\quad ((w_0^1)')^{-c_1^1 + 2} ((w_1^1)')^{c_0^1} ((w_0^3)')^{-c_1^3 + 2} ((w_1^3)')^{c_0^3} ((w_0^2)')^{-c_1^2 - 2} ((w_1^2)')^{c_0^2} ((w_0^4)')^{-c_1^4 - 2} ((w_1^4)')^{c_0^4} \frac{N-1}{2}. \end{aligned}$$

$$\bar{K}_{\mathcal{X}} = K_{\mathcal{X}}^{-1} \prod_{i=1}^4 [((w_1^i)')^{-1}] ((w_0^2)') ((w_0^4)')^{1-N} \quad , \quad [x] := N^{-1} \frac{1 - x^N}{1 - x},$$

et $i_{12} = i_1 - i_2$ etc.

REFERENCES

- [1] M.F. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Publ. Math. IHES 68 (1988) 175–186
- [2] J.E. Andersen, *Asymptotic faithfulness of the quantum $SU(n)$ representations of the mapping class groups*, Ann. Math. (2) 163(1) (2006) 347–368
- [3] J.E. Andersen, S.K. Hansen, *Asymptotics of the quantum invariants for surgeries on the figure eight knot*, J. Knot Theory Ramifications 15 (4) (2006) 479–548
- [4] S. Baseilhac, *Dilogarithme Quantique et Invariants de 3-Variétés*, Thèse de l'Université Paul Sabatier, Toulouse (France) Octobre 2001
- [5] S. Baseilhac, R. Benedetti, *QHI, 3-manifold scissors congruence classes and the volume conjecture*, in “Invariants of Knots and 3-manifolds (Kyoto 2001)” (T. Ohtsuki, et al., éditeur), Geom. Topol. Monogr. 4 (2002) 13–28
- [6] S. Baseilhac, R. Benedetti, *Quantum hyperbolic invariants of 3-manifolds with $PSL(2, \mathbb{C})$ -characters*, Topology 43 (6) (2004) 1373–1423

- [7] S. Baseilhac, R. Benedetti, *Classical and quantum dilogarithmic invariants of flat $PSL(2, \mathbb{C})$ -bundles over 3-manifolds*, *Geom. Topol.* 9 (2005) 493–570
- [8] S. Baseilhac, R. Benedetti, *Quantum hyperbolic geometry*, *Alg. Geom. Topol.* 7 (2007) 845–917
- [9] S. Baseilhac, R. Benedetti, en préparation pour *Teichmüller spaces and cylinders in quantum hyperbolic field theories*, in “Handbook on Teichmüller Theory” (A. Papadopoulos, éditeur), Volume II, EMS Publishing House, Zürich 2008
- [10] S. Baseilhac, R. Benedetti, C. Frohman, M. Stoeckel, *On the asymptotics of quantum hyperbolic invariants*, en préparation
- [11] V.V. Bazhanov, N.Y. Reshetikhin, *Remarks on the quantum dilogarithm*, *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1995) 2217–2226
- [12] R. Benedetti, F. Bonsante, *Canonical Wick Rotations in 3-Dimensional Gravity*, *Memoirs of AMS* (à paraître) ArXiv:math.DG/0508485 (v3) (2006) (201 pages)
- [13] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *3-manifold invariants derived from the Kauffman bracket*, *Topology* 31(4) (1992) 685–699
- [14] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket*, *Topology* 34(4) (1995) 883–927
- [15] R. Benedetti, C. Petronio, *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer Verlag, Universitext (1992)
- [16] R. Benedetti, C. Petronio, *Branched Standard Spines of 3-manifolds*, Springer Lect. Notes Math. 1653 (1997)
- [17] F. Bonahon, *Shearing hyperbolic surfaces, bending pleated surfaces and Thurston’s symplectic form*, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* 5 (1996) 233–297
- [18] F. Bonahon, X. Liu, *Representations of the quantum Teichmüller space and invariants of surface diffeomorphisms*, *Geom. Topol.* 11 (2007) 889–937
- [19] D.W. Boyd, F. Rodriguez-Villegas, *Mahler’s measure and the dilogarithm (II)*, avec un appendice de N.M. Dunfield, arXiv:math.NT/0308041
- [20] D. Bullock, C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, *Understanding the Kauffman bracket skein module*, *J. Knot Th. Ram.* 8 (3) (1999) 265–277
- [21] D. Bullock, C. Frohman, J. Kania-Bartoszyńska, *The Yang-Mills measure in the Kauffman bracket skein module*, *Comment. Math. Helv.* 78 (2003) 1–17
- [22] R.D. Canary, D.B.A. Epstein, P. Green, *Notes on notes of Thurston*, in “Analytic and Geometrical aspects of Hyperbolic space” (D.B.A. Epstein, éditeur), Cambridge Univ. Press, London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 111 (1987) 3–92
- [23] A. Champanerkar, *A-polynomial and Bloch invariants of hyperbolic 3-manifolds*, Columbia Univ. PhD Thesis (2003)
- [24] S.-S. Chern, J. Simons, *Characteristic forms and geometric invariants*, *Ann. Math.* 99 (1974) 48–69
- [25] J. Cheeger, J. Simons, *Differential characters and geometric invariants*, in “Geometry and Topology” (J. Alexander et J. Harer, éditeurs), Springer Verlag, Lect. Notes Math. 1167 (1985) 50–80
- [26] Y.-E. Choi, *Positively oriented ideal triangulations on hyperbolic 3-manifolds*, *Topology* 43 (2004) 1345–1371
- [27] V. Chari, A. Pressley, *A Guide To Quantum Groups*, Cambridge Univ. Press (1994)
- [28] L.O. Chekhov, V.V. Fock, *Quantum Teichmüller spaces*, *Teoret. Mat. Fiz.* 120 (1999) 511–528, traduction anglaise: *Theoret. and Math. Phys.* 120 (1999) 1245–1259
- [29] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D.D. Long, P.B. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, *Invent. Math.* 118 (1994) 47–84
- [30] F. Costantino, *Colored Jones invariants of links in $S^2 \times S^1$ and the Volume Conjecture*, à paraître dans *J. London Math. Soc.* (2006)
- [31] F. Costantino, *\mathfrak{sl}_2 -symbols, hyperbolic structures and the Volume Conjecture*, arXiv:math.GT/0611399 (2006)
- [32] C. De Concini, C. Procesi, *Quantum Groups*, in “ \mathcal{D} -modules, Representation Theory and Quantum Groups (Venice 1992)”, Springer Verlag, Lect. Notes Math. 1565 (1993) 31–140
- [33] C. De Concini, V. Kac, *Representations of quantum groups at roots of 1*, in *Progr. Math.* 92 (1990) 471–506
- [34] J. Dubois, R.M. Kashaev, *On the asymptotic expansion of the colored Jones polynomial for torus knots*, *Math. Ann.* (à paraître) ArXiv:math.GT/0510607
- [35] N. Dunfield, *Cyclic surgery, degree of maps of character curves, and volume rigidity for hyperbolic manifolds*, *Invent. Math.* 136 (1999) 623–657
- [36] J.L. Dupont, *Curvature and characteristic classes*, Springer Verla, Lect. Notes Math. 640 (1978)
- [37] J.L. Dupont, *The dilogarithm as a characteristic class for flat bundles*, *J. Pure Appl. Alg.* 44 (1987) 137–164
- [38] J.L. Dupont, *Scissors Congruences, Group Homology and Characteristic Classes*, World Scientific, Nankai Tracts in Mathematics 1 (2001)
- [39] J.L. Dupont, C.-H. Sah, *Scissors congruences II*, *J. Pure Appl. Alg.* 25 (1982) 159–195
- [40] J.L. Dupont, C. Zickert, *A dilogarithmic formula for the Cheeger-Chern-Simons class*, *Geom. Topol.* 10 (2006) 1347–1372
- [41] D.B.A. Epstein, A. Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan and measured pleated surfaces*, *LMS Lect. Notes Series* 111 (1987) 113–253
- [42] D.B.A. Epstein, R. Penner, *Euclidian decompositions of non-compact hyperbolic manifolds*, *J. Diff. Geom.* 27 (1988) 67–80

- [43] M.H. Freedman, K. Walker, Z. Wang, *Quantum $SU(2)$ faithfully detects mapping class groups modulo center*, *Geom. Topol.* 6 (2002) 523–539
- [44] L. D. Faddeev, R. M. Kashaev, *Quantum dilogarithm*, *Mod. Phys. Lett. A* 9 (5) (1994) 427–434
- [45] C. Frohman, R. Gelca, W. Lofaro, *The A -polynomial from the noncommutative viewpoint*, *Trans. Amer. Math. Soc.* 354 (2002) 735–747
- [46] S. Garoufalidis, *On the characteristic and deformation varieties of a knot*, *Proceedings of the CassonFest*, *Geom. Topol. Monogr.* 7 (2004) 291–309
- [47] S. Garoufalidis, T.T.Q. Lê, *The colored Jones function is q -holonomic*, *Geom. Topol.* 9 (2005) 1253–1293
- [48] S. Garoufalidis, T.T.Q. Lê, *Asymptotics of the colored Jones function of a knot*, *ArXiv:math.GT/0508100*
- [49] S. Garoufalidis, Y. Lan, *Experimental evidence for the Volume Conjecture for the simplest hyperbolic non-2-bridge knot*, *Alg. Geom. Topol.* 5 (2005) 379–403
- [50] G. Gasper, M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series*, *Encycl. math. and its appl.* Vol 96 (2004)
- [51] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, A.V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, *Mathematics: Theory & Applications*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA (1994)
- [52] S. Gukov, *Three-dimensional quantum gravity, Chern-Simons theory, and the A -polynomial*, *Comm. Math. Phys.* 255 (3) (2005) 577–627
- [53] C. Hodgson, *Degeneration and regeneration of hyperbolic structures on three-manifolds*, Princeton Univ. PhD Thesis (1986)
- [54] V. Jones, *Hecke algebra representation of braid groups and link polynomials*, *Annals Math.* 126 (1987) 335–388
- [55] R.M. Kashaev, *Quantum dilogarithm as a $6j$ -symbol*, *Mod. Phys. Lett. A* Vol. 9 (40) (1994) 3757–3768
- [56] R.M. Kashaev, *A link invariant from quantum dilogarithm*, *Mod. Phys. Lett. A* 10 (1995) 1409–1418
- [57] R.M. Kashaev, *The algebraic nature of quantum dilogarithm*, in *Geometry and Integrable Models* (Dubna 1994), World Scientific Publishing (1996) 32–51
- [58] R.M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from the quantum dilogarithm*, *Lett. Math. Phys.* 39 (1997) 269–275
- [59] R.M. Kashaev, *Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm*, *Lett. Math. Phys.* 39 (1997) 105–115
- [60] R.M. Kashaev, V.V. Mangazeev, Y.G. Stroganov, *Star-square and tetrahedron equations in the Baxter-Bazhanov model*, *Int. J. Mod. Phys. A* 8 (8) (1993) 1399–1409
- [61] R.M. Kashaev, N. Reshetikhin, *Invariants of tangles with flat connections in their complements*, *Proc. Symp. Pure Math.* 73 (2005) 151–172
- [62] R.M. Kashaev, O. Tirkkonen, *A proof of the volume conjecture on torus knots*, *Zap. Nauchn. Sem. S.-Petersburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov (POMI)* 269 (2000) 262–268, 370; *Vopr. Kvant. Teor. Polya i Stat. Fiz.* 16
- [63] C. Kassel, *Quantum Groups*, Springer Graduate Texts in Mathematics 155 (1995)
- [64] A.N. Kirillov, N.Yu. Reshetikhin, *Representations of the algebra $U_q(sl(2))$, q -orthogonal polynomials and invariants of links*, in “Infinite-Dimensional Lie Algebras and Groups”, Luminy-Marseille (1988), *Adv. Ser. Math. Phys.* vol. 7, World Sci. Publ. Teaneck, NJ (1989) 285–339
- [65] T. Kohno, *Conformal Field Theory and Topology*, AMS Translations of Mathematical Monographs 210 (2002)
- [66] L.H. Kauffman, S. Lins, *Temperley-Lieb Recoupling Theory and Invariants of 3-Manifolds*, Princeton Univ. Press, *Ann. Math. Studies* 134 (1994)
- [67] T. Kerler, V.V. Lyubashenko, *Non-Semisimple Topological Quantum Field Theories for 3-Manifolds with Corners*, Springer Lect. Notes Math. 1765 (2001)
- [68] R. Kirby, P. Melvin, *On the 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$* , *Invent. Math.* 105 (1990) 473–545
- [69] P.A. Kirk, E.P. Klassen, *Chern-Simons invariants of 3-manifolds decomposed along tori and the circle bundle over the representation space of T^2* , *Comm. Math. Phys.* (1993) 521–557
- [70] L.I. Korogodski, Y.S. Soibelman, *Algebras of functions on quantum groups : Part I*, *AMS Math. Surv. Monogr.* 56 (1998)
- [71] R. Meyerhoff, *Density of the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds*, in *Low-dimensional topology and Kleinian groups* (D.B.A. Epstein ed.), *London Math. Soc. Lect. Notes Ser.* 112 (1986) 217–239
- [72] G. Mikhalkin, *Amoebas of algebraic variety and tropical geometry*, *ArXiv:math/0403015v1*
- [73] J.W. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, *Bull. Amer. Math. Soc.* 6 (1) (1982) 9–23
- [74] S. Morita, *Geometry of characteristic classes*, *AMS Transl. Math. Monogr.*, Iwanami Series in Modern Mathematics 199 (2001)
- [75] H. Murakami, *Asymptotic behaviors of the colored Jones polynomials of a torus knot*, *Internat. J. Math.* 15 (6) (2004) 547–555
- [76] H. Murakami, *A version of the volume conjecture*, *Adv. Math.* 211 (2007) 678–683
- [77] H. Murakami, J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, *Acta Math.* 186 (1) (2001) 85–104
- [78] J. Marché, M. Narimannejad, *Some asymptotics of TQFT via skein theory*, à paraître dans *Duke Math. Journal*
- [79] H. Murakami, Y. Yokota, *The colored Jones polynomials of the figure-eight knot and its Dehn surgery space*, *J. Reine Angew. Math.* (à paraître) *ArXiv:math/0401084*
- [80] H. Murakami, J. Murakami, M. Okamoto, T. Takata, Y. Okota, *Kashaev’s conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links*, *Experiment. Math.* 11 (2002) 427–435

- [81] W. D. Neumann, *Combinatorics of triangulations and the Chern-Simons invariant for hyperbolic 3-manifolds*, in Topology'90 (Columbus, OH, 1990), De Gruyter (1992) 243–271
- [82] W.D. Neumann, *Hilbert's 3rd problem and invariants of 3-manifolds*, in The Epstein Birthday Schrift, Geom. Topol. Monogr. 1 (1998) 383–411
- [83] W.D. Neumann, *Extended Bloch group and the Chern-Simons class*, incomplete working version, arXiv:math.GT/0212147
- [84] W.D. Neumann, *Extended Bloch group and the Cheeger-Chern-Simons class*, Geom. Topol. 8 (2004) 413–474
- [85] W.D. Neumann, D. Zagier, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, Topology 24 (1985) 307–332
- [86] *Problems on Invariants of Knots and 3-Manifolds (Kyoto 2001)* (T. Ohtsuki, et al., éditeurs), Geom. Topol. Monogr. 4 (2002) 377–572
- [87] C. Petronio, J. Porti, *Negatively oriented ideal triangulations and a proof of Thurston's hyperbolic Dehn filling theorem*, ArXiv:math.GT/9901045
- [88] J.H. Przytycki, A.S. Sikora, *On skein algebras and $SL(2, \mathbb{C})$ -character varieties*, Topology 39 (2000) 115–148
- [89] J.P. Ramis, *About the growth of entire functions solutions of linear algebraic q -difference equations*, Ann. Fac. Sciences de Toulouse Série 6 Vol I (1) (1992) 53–94
- [90] M. A. Semenov-Tian-Shansky, *Poisson-Lie groups, quantum duality principle, and the quantum double*, Contemp. Math. 175 (1994) 219–248
- [91] N. Reshetikhin, V. Turaev, *Ribbon graphs and their invariants derived from quantum groups*, Comm. Math. Phys. 127 (1990) 1–26
- [92] N. Reshetikhin, V. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. 103 (1991) 547–598
- [93] W.P. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Princeton Univ. lecture notes (1979)
- [94] W.P. Thurston, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces* (1986) ArXiv:math.GT/9801039
- [95] V. Turaev, *Quantum Invariants of 3-Manifolds*, De Gruyter Studies in Mathematics 18 (1994)
- [96] V. Turaev, *Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories*, arXiv:math.GT/0005291
- [97] V. Turaev, O. Viro, *State sum invariants of 3-manifolds and quantum 6j-symbols*, Topology 31 (4) (1992) 865–902
- [98] R. van der Veen, *Proof of the volume conjecture for Whitehead chains*, ArXiv:math/0611181
- [99] O. Viro, *Dequantization of real algebraic geometry on logarithmic paper*, Proceedings of the European Congress of Mathematics (2000), ArXiv:math/0005163v3
- [100] P. Vogel, *Invariants de Witten-Reshetikhin-Turaev et théories quantiques des champs*, in “Espaces de modules des courbes, groupes modulaires et théorie des champs”, Soc. Math. de France, Panoramas et Synthèse 7 (1999) 117–143
- [101] P. Vogel, *Invariants de type fini*, in “Nouveaux invariants en géométrie et en topologie”, Soc. Math. de France, Panoramas et Synthèse 11 (2001) 99–128
- [102] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989) 351–399
- [103] E. Witten, *2+1 Dimensional gravity as an exact soluble system*, Nucl. Phys. B 323 (1989) 113–140
- [104] Y. Yokota, *On the volume conjecture for hyperbolic knots*, preprint <http://www.comp.metro-u.ac.jp/~jojo/volume-conjecture.pdf>, ArXiv:math.QA/0009165
- [105] Y. Yokota, *On the potential functions for the hyperbolic structures of a knot complement*, in “Invariants of Knots and 3-manifolds (Kyoto 2001)” (T. Ohtsuki, et al., éditeur), Geom. Topol. Monogr. 4 (2002) 303–311
- [106] T. Yoshida, *The η -invariant of hyperbolic manifolds*, Invent. Math. 81 (3) (1985) 473–514