Algèbre/*Algebra*

QUASI-GROUPOÏDES QUANTIQUES

Alain Bruguières et Georges Maltsiniotis

Résumé - Le but de cette note est d'introduire une notion généralisant à la fois celle de groupoïde quantique, introduite dans [4], et celle de quasi-groupe quantique (quasi-bigèbre de Hopf, quasi-triangulaire), introduite par Drinfeld [3]. Cette notion, qu'on pourrait appeler quasi-groupoïde quantique, permet de généraliser certain résultats de [1].

QUASI-QUANTUM GROUPOIDS

Abstract - The aim of this note is to introduce a notion that generalizes simultaneously the notion of quantum groupoid [4] and the notion of quasi-quantum group (quasi-triangular quasi-Hopf algebra) introduced by Drinfeld [3]. This new mathematical object may be called a quasi-quantum groupoid. Some results of [1] can be generalized in this framework.

Dans cette note, k désigne un anneau commutatif. Par algèbre, on entend k-algèbre associative, unitaire. Le produit tensoriel sur k est noté $\otimes$. Si B est une algèbre, on note B^o l'algèbre opposée, et B^e l'algèbre enveloppante $B^o \otimes B$. La catégorie des B-modules à droite est notée $\mathsf{Mod}(B)$. On identifie la catégorie $\mathsf{Bimod}(B,B)$ des (B,B)-bimodules à la catégorie $\mathsf{Mod}(B^e)$ en munissant tout (B,B)-bimodule M de la structure de B^e-module à droite donnée par : $m \cdot (x \otimes y) = x \cdot m \cdot y$. Un tel bimodule M peut aussi être vu comme un (B^o, B^o)-bimodule ; on le note alors M^o.

Rappels sur les cogébroïdes [2], [1]. — Soit B une algèbre. Un *cogébroïde de base* B est un (B,B)-bimodule L muni de morphismes de (B,B)-bimodules $\Delta : L \longrightarrow L \otimes_B L$ et $\varepsilon : L \longrightarrow B$, appelés respectivement *coproduit* et *coünité*, vérifiant les axiomes suivants : $(1_L \otimes_B \Delta)\Delta = (\Delta \otimes_B 1_L)\Delta$ et $(1_L \otimes_B \varepsilon)\Delta = 1_L = (\varepsilon \otimes_B 1_L)\Delta$. Un *morphisme de cogébroïdes de base* B est un morphisme de (B,B)-bimodules compatible aux coproduits et aux coünités.

Le (B,B)-bimodule B^e est muni d'une structure de cogébroïde, dont le coproduit est défini par $\Delta(x\otimes y)=(x\otimes 1)\otimes_B(1\otimes y)$ et la coünité par $\varepsilon(x\otimes y)=xy$. Si L est un cogébroïde de base B, L^o est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base B^o. Si $\phi: B\longrightarrow C$ est un morphisme d'algèbres, et si L est un cogébroïde de base B, alors $C\otimes_B L\otimes_B C$ est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base C, qu'on note ϕ_*L. Si L et L' sont des cogébroïdes de bases respectives B et B', $L\otimes L'$ est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base $B\otimes B'$. Lorsque $B=B'$ et B est commutatif, $L\otimes_{B^e}L'$ est muni d'une structure de cogébroïde de base B, s'identifiant au cogébroïde $\mu_{B*}(L\otimes L')$, où μ_B désigne la multiplication de B.

Soit L un cogébroïde de base B. Un *L-comodule à droite* est un B-module à droite V muni d'une *coaction à droite de L*, c'est-à-dire un morphisme de B-modules à droite $\delta: V\longrightarrow V\otimes_B L$ vérifiant les axiomes suivants : $(\delta\otimes_B 1_L)\delta=(1_V\otimes_B\Delta)\delta$ et $(1_V\otimes_B\varepsilon)\delta=1_V$. Un *morphisme de L-comodules à droite* est un morphisme de B-modules à droite compatible aux coactions. La catégorie des L-comodules à droite est notée $\mathsf{Comod}(L)$.

Notations diverses. — Soit B une algèbre commutative. Si P et M sont des (B,B)-bimodules, et n un entier, on notera $C^n(P,M)$ le k-module des applications de P^n dans M qui sont B-linéaires à droite et à gauche en chaque variable, et $C^\bullet(P,M)$ la somme directe $\bigoplus C^n(P,M)$. Posant $P^{(n)}=P\otimes_{B^e}P\otimes_{B^e}\cdots\otimes_{B^e}P$ (n fois), on identifiera $C^n(P,M)$ à $\mathsf{Hom}_{B^e}(P^{(n)},M)$. Pour $\varphi\in C^n(P,B)$ et $\psi\in C^m(P,M)$ (ou $\varphi\in C^n(P,M)$ et $\psi\in C^m(P,B)$) on note $\varphi\cdot\psi$ l'élément de $C^{n+m}(P,M)$ défini par :

$$(\varphi\cdot\psi)(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)=\varphi(x_1,\ldots,x_n)\psi(y_1,\ldots,y_m)\ .$$

On fait ainsi de $C^\bullet(P,B)$ une algèbre graduée, et de $C^\bullet(P,M)$ un $C^\bullet(P,B)$-bimodule gradué. Pour $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ et $\varphi\in C^n(P,M)$, on note $\varphi_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$ l'élément de $C^n(P,M)$ défini par : $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\varphi(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$.

Soit à présent (L,Δ,ε) un cogébroïde de base B. Pour tout (B,B)-bimodule M, on pose $C^n(M)=C^n(L,M)$. Si M et N sont deux (B,B)-bimodules, on définit un produit $*: C^n(M)\times C^n(N)\longrightarrow C^n(M\otimes_B N)$, appelé *produit de convolution*, par la formule :

$$(\varphi*\psi)(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i_1,\ldots,i_n}\varphi(y_1^{i_1},\ldots,y_n^{i_n})\otimes_B\psi(z_1^{i_1},\ldots,z_n^{i_n})\ ,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont dans L, et $\Delta(x_l) = \sum_{i_l \in I_l} y_l^{i_l} \otimes_B z_l^{i_l}$, pour $1 \leq l \leq n$. Le produit $*$ est associatif, et admet pour élément neutre $\varepsilon^n = \varepsilon \cdot \varepsilon \cdots \varepsilon \in C^n(B)$. En particulier, $C^n(B)$ est une algèbre unitaire. Pour $\rho : \{1, \ldots, m\} \hookrightarrow \{1, \ldots, n\}$ injection et $\psi \in C^m(B)$ on note $\psi_{\rho(1)\ldots\rho(m)}$ l'élément $\varphi_{\sigma(1)\ldots\sigma(n)}$ de $C^n(B)$, où $\varphi = \psi \cdot \varepsilon^{n-m}$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ désigne un prolongement arbitraire de ρ.

Soient $X_1 = (V_1, \delta_1), \ldots, X_n = (V_n, \delta_n)$ des L-comodules à droite, et M un (B,B)-bimodule. Pour $\varphi \in C^n(M)$, on définit une application $\varphi_{X_1,\ldots,X_n}$ de $V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n$ dans $V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n \otimes_B M$ par la formule :

$$\varphi_{X_1,\ldots,X_n}(v_1 \otimes_B \cdots \otimes_B v_n) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} w_1^{i_1} \otimes_B \cdots \otimes_B w_n^{i_n} \otimes_B \varphi(x_1^{i_1}, \ldots, x_n^{i_n}) \ ,$$

où v_l est pour $1 \leq l \leq n$ un élément de V_l, d'image $\delta_l(v_l) = \sum_{i_l \in I_l} w_l^{i_l} \otimes_B x_l^{i_l}$ par la coaction de L. Lorsque $M = B$, on définit ainsi sur $V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n$ une structure de $C^n(B)$-module à *gauche*.

Quasi-bigébroïdes. — Soit B une algèbre commutative. On appelle *quasi-bigébroïde de base* B la donnée d'un cogébroïde L de base B muni d' éléments $\mu \in C^2(L)$, $\eta \in C^0(L)$, et $\Phi \in C^3(B)$, vérifiant les axiomes suivants :

(QB1) $\mu : L \otimes_{B^e} L \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B;

(QB2) $\eta : B^e \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B;

(QB3) η est neutre à droite et à gauche pour μ (on a $\mu \circ (\eta \otimes_{B^e} 1_L) = 1_L = \mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \eta)$);

(QB4) $\Phi * \big(\mu \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L)\big) = \big(\mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu)\big) * \Phi$ dans $C^3(L)$;

(QB5) $\big(\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} \mu)\big) * \big(\Phi \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} 1_L)\big) = (\varepsilon \cdot \Phi) * \big(\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu \otimes_{B^e} 1_L)\big) * (\Phi \cdot \varepsilon)$ dans $C^4(B)$;

(QB6) $\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} \eta \otimes_{B^e} 1_L) = \varepsilon^2$;

(QB7) Φ est inversible dans $C^3(B)$ pour le produit de convolution (et son inverse sera noté Φ^{-1}).

Remarque. L'application μ définit une structure d'algèbre non associative sur L possédant un élément unité égal à $\eta(1 \otimes 1)$, et les applications $s, b : B \longrightarrow L$ définies par

$s(a) = \eta(1 \otimes a)$ et $b(a) = \eta(a \otimes 1)$, pour $a \in B$, sont des morphismes d'algèbres, correspondant aux morphismes source et but d'un groupoïde. Lorsque $\Phi = \varepsilon^3$, on retrouve la notion de bigébroïde introduite par G. Maltsiniotis dans [4] ; lorsque $B = k$, on obtient la notion duale à la notion de quasi-bigèbre ("quasibialgebra") introduite par Drinfeld [3].

Théorème. *Soit* $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ *un quasi-bigébroïde de base* B*. Alors il existe sur* $\mathsf{Comod}(L)$ *une structure naturelle de catégorie monoïdale, qu'on notera* $\mathsf{Rep}(\mathcal{L})$*; en outre le foncteur oubli* $U : \mathsf{Rep}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ *commute aux produits tensoriels et envoie l'objet unité* I *sur* B*.*

DÉMONSTRATION. — 1) Si $X_1 = (V_1, \delta_1)$ et $X_2 = (V_2, \delta_2)$ sont des L-comodules à droite, leur produit tensoriel est, par définition, le L-comodule à droite $X_1 \otimes X_2 = (V_1 \otimes_B V_2, \delta)$, où $\delta = \mu_{X_1,X_2} : V_1 \otimes_B V_2 \longrightarrow V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B L$. Que δ soit une coaction à droite résulte de la condition (QB1) et cette construction est clairement fonctorielle.

2) L'objet-unité est défini par $I = (B, s)$, où $s : B \to L = B \otimes L$ est défini ci dessus. Il résulte de (QB2) que s est une coaction et de (QB3) que I est neutre à droite et à gauche pour le produit tensoriel.

3) La contrainte d'associativité a. Soient trois L-comodules à droite $X_i = (V_i, \delta_i)$ pour $i = 1, 2, 3$. Considérons $a_{X_1,X_2,X_3} = \Phi_{X_1,X_2,X_3} : V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B V_3 \longrightarrow V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B V_3$. Il résulte de (QB4) que a_{X_1,X_2,X_3} est un morphisme de comodules de $(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3$ vers $X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$, et a est clairement fonctoriel. De (QB5) résulte que a rend commutatif le pentagone de MacLane, de (QB6), que a est compatible à l'unité, et de (QB7), que a est un isomorphisme. $\square$

Définition. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. On appelle *tressage* de $\mathcal{L}$ tout élément R de $C^2(B)$ vérifiant les conditions suivantes :

(T1) $\mu_{21} * R = R * \mu$ dans $C^2(L)$;

(T2) $R \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L) = \Phi_{312} * R_{13} * \Phi_{132}^{-1} * R_{23} * \Phi$ dans $C^3(B)$;

(T3) $R \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu) = \Phi_{231}^{-1} * R_{13} * \Phi_{213} * R_{12} * \Phi^{-1}$ dans $C^3(B)$;

(T4) R est inversible dans $C^2(B)$.

Théorème. *Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de base B. La donnée d'un tressage de $\mathcal{L}$ définit un tressage dans la catégorie monoïdale* $\mathsf{Rep}(\mathcal{L})$.

Démonstration. Soit R un tressage de $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$. Soient $X_1 = (V_1, \delta_1)$, $X_2 = (V_2, \delta_2)$ deux objets de $\mathsf{Rep}(\mathcal{L})$. On note $\sigma_{V_1,V_2} : V_1 \otimes_B V_2 \to V_2 \otimes_B V_1$ l'échange des facteurs. Soit $\mathcal{R}_{X_1,X_2}$ l'application $\sigma_{V_1,V_2} \circ R_{X_1,X_2}$ de $V_1 \otimes_B V_2$ dans $V_2 \otimes_B V_1$. Il résulte de (T1) que $\mathcal{R}_{X_1,X_2}$ est un morphisme de L-comodules à droite de $X_1 \otimes X_2$ vers $X_2 \otimes X_1$, et de (T4), que c'est un isomorphisme. La fonctorialité de $\mathcal{R}$ est immédiate. Les hypothèses (T2) et (T3) assurent la commutativité des deux hexagones de MacLane. $\square$

Définition. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. On appelle *antipode de* $\mathcal{L}$ la donnée d'un élément S de $C^1(L^o)$ et de deux éléments α, β de $C^1(B)$, vérifiant :

(A1) $S : L \longrightarrow L^o$ est un morphisme de cogébroïdes;

(A2) $s \circ \alpha = \mu \circ (S * \alpha * 1_L)$;

(A3) $b \circ \beta = \mu \circ (1_L * \beta * S)$;

(A4) $\Phi \circ (1_L * \beta * S * \alpha * 1_L) = \varepsilon = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S)$;

(s et b sont définis dans la remarque). On dit qu'un quasi-bigébroïde $\mathcal{L}$ est un *quasi-bigébroïde de Hopf* s'il possède un antipode (S, α, β), avec S *bijectif.*

Rappels. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale de produit tensoriel $\otimes$, d'objet unité (strict) I et de contrainte d'associativité a, X et Y des objets de $\mathcal{C}$, et $e : X \otimes Y \to I$, $h : I \to Y \otimes X$ des morphismes de $\mathcal{C}$. On dit que (X, Y, e, h) est une *dualité de* $\mathcal{C}$ si $(e \otimes 1_X) a^{-1}_{X,Y,X} (1_X \otimes h) = 1_X$ et $(1_Y \otimes e) a_{Y,X,Y} (h \otimes 1_Y) = 1_Y$. Le choix pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'une dualité $({}^\vee X, X, e_X, h_X)$ détermine un foncteur contravariant "dual à gauche" ${}^\vee ?$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$. En particulier, dans la catégorie $\mathsf{proj}(B)$ des B-modules projectifs de type fini sur une algèbre commutative B, on a pour chaque objet V une dualité canonique (V^*, V, e_V, h_V), où $V^* = \mathsf{Hom}_B(V, B)$, $e_V : V^* \otimes_B V \to B$ est l'évaluation, et $h_V : B \to V \otimes_B V^*$ la co-évaluation (c'est-à-dire l'application B-linéaire qui envoie 1 sur l'élément de $V \otimes_B V^*$ correspondant à 1_V dans l'isomorphisme canonique $V \otimes_B V^* \simeq \mathsf{End}_B(V)$). D'où un foncteur dual à gauche qu'on note $?^*$.

Théorème. *Soient $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B, $\mathcal{C}$ la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathsf{Rep}(\mathcal{L})$ formée des L-comodules à droite qui sont projectifs de type fini sur B, et (S, α, β) un antipode de $\mathcal{L}$. Alors la catégorie $\mathcal{C}$ est autonome à gauche, et plus précisément, on peut construire pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ une dualité $({}^{\vee}X, X, e_X, h_X)$, de sorte que le foncteur oubli commute aux foncteurs "dual à gauche" (autrement dit : $U \circ {}^{\vee}? = ?^{*} \circ U$). De plus, si $\mathcal{L}$ est un quasi-bigébroïde de Hopf, la catégorie $\mathcal{C}$ est autonome.*

DÉMONSTRATION. Soient V un B-module à droite projectif de type fini, et (V^*, V, e_V, h_V) la dualité canonique. Soit δ une coaction à droite de L sur V, et $X = (V, \delta)$. Soit $\delta' = (1_{V^*} \otimes_B S)\sigma_{L,V^*}(e_V \otimes_B 1_{L \otimes_B V^*})(1_{V^*} \otimes_B \delta \otimes_B 1_{V^*})(1_{V^*} \otimes_B h_V) : V^* \longrightarrow V^* \otimes_B L$. Il résulte de (A1) que δ' est une coaction à droite de L sur V^*. Soit ${}^{\vee}X$ le comodule (V^*, δ'). Posons $e = e_V \circ (1_{V^*} \otimes_B \alpha_X)$ et $h = (\beta_X \otimes_B 1_{V^*}) \circ h_V$. Il resulte de (A2) et (A3) que e est un morphisme de comodules de ${}^{\vee}X \otimes X$ vers I, et h, de I vers $X \otimes {}^{\vee}X$. Il résulte de $(A4)$ que $({}^{\vee}X, X, e, h)$ est une dualité de $\mathsf{Rep}(\mathcal{L})$. Il résulte aussi de $(A4)$ que si f est un morphisme de $\mathcal{C}$, $U({}^{\vee}f) = U(f)^*$ (transposé de $U(f)$).

Si S est un isomorphisme, soit $Y = (W, \delta')$ un L-comodule à droite, et supposons W projectif de type fini comme B-module. Posons $V = W^*$, de sorte que W s'identifie à V^*. Soit $\delta = (1_V \otimes_B e_V \otimes_B S^{-1})(1_{V \otimes_B V^*} \otimes_B \sigma_{L,V})(1_V \otimes_B \delta' \otimes_B 1_V)(h_V \otimes_B 1_V) : V \longrightarrow V \otimes_B L$. Alors δ est une coaction à droite de L sur V, d'où un comodule $X = (V, \delta)$, et Y s'identifie à ${}^{\vee}X$, donc admet X pour dual à droite. $\square$

Références bibliographiques.

[1] A. BRUGUIÈRES, *Théorie tannakienne non commutative*, Preprint Univ. Paris VII, No. **69**, 1993 (à paraître dans Comm. in Algebra).

[2] P. DELIGNE, Catégories tannakiennes, in *The Grothendieck Festschrift*, II, Progress in Mathematics, **87**, Birkhäuser, 1990, pp. 111–195.

[3] V. G. DRINFELD, *Quasi-Hopf Algebras*, Leningrad Math. J., Vol. **1**, No. 6, pp.1419-1457, 1990.

[4] G. MALTSINIOTIS, *Groupoïdes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **314**, Série I, pp. 249–252, 1992.

Université Paris VII, UFR de Mathématiques, URA n° 212,

2, Place Jussieu, 75251 Paris CEDEX 05, France.