Tresses et structure entière sur la catégorie des représentations de SL_N quantique

Alain Bruguières

Université Paris 7, Institut de mathématiques de Jussieu
2, place Jussieu, case 7012, 75251 Paris Cedex 05, France
e-mail : bruguier@ math.jussieu.fr

ABSTRACT. According to a theorem of Masbaum and Wenzl **[11]**, the Turaev-Viro invariant of a 3-manifold associated with the modular categories constructed from $U_q\mathfrak{sl}_N$ is a cyclotomic integer when q is of prime order. We extend this result to premodular categories (where the S-matrix need not be invertible) of 'type A' of a more general kind.

One defines premodular categories of type A, rank N and level K over $\mathbb{C}$ depending on two complex parameters s and u, with $q=s^2$ a root of unity of order $l=N+K$, and u a N-th root of s, in the case SL_N, or more generally any root of unity (a variant introduced by Blanchet, **[2]**). There are essentially two methods for constructing these premodular categories : through quantum groups, and through Hecke algebras. We carry out both constructions, and check that they yield the same result. A 'local handle-slide property' for a premodular category (1.6.4.) characterizes those for which the Turaev-Viro invariant TV is defined. This applies to premodular categories of type A. It turns out (3.3.6.) that TV is defined precisely when the premodular category is modularizable in the sense of **[4]** (assuming s is of order $2l$).

We show that the Turaev-Viro invariant associated with a such a premodular category, when defined, is a cyclotomic integer if $l=N+K$ is prime; this holds also for PGL. More precisely, we show that such a category is 'defined' over $k=\mathbb{Z}[u,s,1/[l-1]_s^!]$. Extending a criterion of **[11]** to the premodular case, we conclude that the Turaev-Viro invariant lies in k.

Ces dernières années, il est devenu clair que les invariants topologiques 'quantiques' sont intimement liés à certains types de catégories monoïdales (ou plus généralement, à des n-catégories). Ainsi, les invariants de nœuds d'Alexander, Jones et HOMFLY correspondent à des *catégories rubanées*, ou *tortils*. Un *tortil* est une catégorie monoïdale admettant des duaux et munie d'un tressage R et d'une structure balancée θ compatible à la dualité. L'archétype en est la catégorie des enchevêtrements ('tangles') orientés en rubans colorés par un ensemble Λ, universelle parmi les tortils munis d'une famille d'objets indexée par Λ (*cf.* Shum, [**13**], Turaev, [**14**]). Il résulte de cette propriété universelle que tout tortil $\mathcal{C}$, d'objet unité I, définit un invariant d'entrelacs en rubans orientés colorés par des objets de $\mathcal{C}$, à valeurs dans $\mathsf{End}(I)$.

D'autres exemples peuvent être construits au moyen de 'groupes quantiques'. En effet, si $\mathcal{L}$ est une bigèbre de Hopf, la catégorie $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}$ de ses représentations de dimension finie est monoïdale et admet des duaux. Pour en faire un tortil, il suffit, grâce au dictionnaire tannakien, de munir $\mathcal{L}$ de certaines structures additionnelles. Ainsi, pour $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{C}^*$, la catégorie des $U_q\mathfrak{g}$-modules de dimension finie admet en général plusieurs structures de tortil, d'où autant d'invariants d'entrelacs. Le polynôme de Jones correspond à SL_2, et HOMFLY s'obtient en considérant la famille des SL_N.

Afin de définir des invariants de 3-variétés, V. Turaev [**14**] a introduit la notion de *catégorie modulaire.* Une catégorie *prémodulaire* $\mathcal{C}$ sur un corps commutatif k est un tortil muni d'une structure abélienne k-linéaire semi-simple; en outre les objets simples, parmi lesquels figure l'objet unité, sont supposés en nombre fini, et *scalaires* ($\mathsf{End}(X) = k$). On dit que $\mathcal{C}$ est *modulaire* si une certaine matrice associée à $\mathcal{C}$, la S*-matrice*, est inversible. À toute catégorie modulaire $\mathcal{C}$, V. Turaev associe une TQFT et partant, des invariants de 3-variétés fermées connexes orientées : l'invariant de Reshetikhin-Turaev $I_{\mathcal{C}}$, et celui de Turaev-Viro $TV_{\mathcal{C}}$.

Encore faut-il construire des catégories modulaires. Pour $\mathfrak{g}$, algèbre de Lie simple sur $\mathbb{C}$, et q racine de l'unité d'ordre l bien choisi, on sait fabriquer à partir de la catégorie des représentations de $U_q\mathfrak{g}$ une catégorie tensorielle semi-simple $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}_{(q)}(\mathfrak{g})$ sur $\mathbb{C}$ ayant un nombre fini d'objets simples (H. H. Andersen, [**1**]). En général, il existe sur $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}_{(q)}(\mathfrak{g})$ plusieurs structures prémodulaires, dont certaines sont modulaires.

G. Masbaum et J. Roberts ont montré que, pour l premier, l'invariant TV associé à ces catégories modulaires est un entier algébrique dans les cas SU_2 et SO_3,[1] résultat que G. Masbaum et H. Wenzl ont ensuite étendu dans [**11**] aux types A, 'BC'. Ces deux auteurs ont noté qu'il suffit d'établir l'existence d'une 'structure entière' sur une catégorie modulaire $\mathcal{C}$ pour démontrer l'intégralité de $TV_{\mathcal{C}}$, ce qu'ils ont fait dans les cas 'BC'.

Il se trouve que l'inversibilité de la S-matrice n'est pas nécessaire pour définir un invariant de Turaev-Viro; les variétés prémodulaires $\mathcal{C}$ (sur un corps k) pour lesquelles on peut définir un invariant de Turaev-Viro sont caractérisées dans [**4**]. L'objet principal du présent travail est l'étude détaillée des catégories prémodulaires 'de type A', la construction de 'structures entières' pour ces catégories, et la démonstration de l'intégralité de l'invariant de Turaev-Viro pour l premier dans tous les cas où il est défini.

Tout d'abord, il s'agit de construire les catégories prémodulaires 'de type A'. On se donne deux entiers $N, K > 0$, le *rang* et le *niveau*, et on pose $l = K + N$. Soient s, u des complexes tels que $q = s^2$ soit une racine de l'unité d'ordre l, et $u^N = s$.

À ces données est associée une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}_u$, qui se construit essentiellement par deux méthodes (en définitive équivalentes).

1) **Par les groupes quantiques.** La catégorie $\mathcal{V} = \mathsf{rep}\,\mathsf{SL}_{N,s}$ des représentations de dimension finie du groupe quantique $\mathsf{SL}_{N,s}(\mathbb{C})$ $\mathcal{V} = \mathsf{rep}\,\mathsf{SL}_{N,s}$ est abélienne $\mathbb{C}$-linéaire, mais non semi-simple, et admet une unique structure de tortil $\mathcal{V}_u$ vérifiant :

$$u\,R_{X,X} - u^{-1}R^{-1}_{X,X} = (s - s^{-1})\,1_{X\otimes X}\ , \quad \theta_X = u^{-1}s^N\,1_X\ ,$$

où X dénote la représentation fondamentale. Le quotient de $\mathcal{V}_u$ par l'idéal des morphismes négligeables est un tortil semi-simple $\mathcal{V}^{\mathsf{ss}}_u$. La catégorie prémodulaire $\mathcal{C}_u$ est la sous-catégorie pleine de $\mathcal{V}^{\mathsf{ss}}_u$ des facteurs directs de sommes de puissances tensorielles de X; elle s'identifie à $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}_{(q)}(\mathfrak{sl}_N)$ (**2.2.1**). Cette construction a pour principal avantage de se généraliser naturellement aux autres algèbres de Lie simples.

[1] Murakami l'avait montré pour les sphères d'homologie.

2) **Par les algèbres de Hecke.** Soit k un anneau commutatif. Une *k-algèbre monoïdale* est une k-catégorie monoïdale stricte A vérifiant $\mathsf{Ob}(A) = \mathbb{N}$ et $\mathsf{Hom}([n],[m]) = 0$ pour $m \neq n$. Exemple : la k-algèbre monoïdale des tresses $k\mathbb{B}$, définie par $\mathsf{End}([n]) = k[B_n]$, le produit tensoriel étant la juxtaposition. Pour $s \in k^*$, la k-algèbre monoïdale de Hecke $k\mathbb{H}(s)$ est le quotient de $k\mathbb{B}$ par le $\otimes$-idéal engendré par $(g-s)(g+s^{-1})$ (où g est le générateur de B_2).

Une construction de Kazhdan-Wenzl [**8**] permet d'associer à une algèbre monoïdale tressée A, et un projecteur $\pi \in A_N$ vérifiant certaines conditions (**3.2.2**), une k-catégorie monoïdale tressée additive karoubienne $\nabla(A,\pi)$ contenant A, de telle sorte que l'objet $S = \mathsf{Im}(\pi)$ soit isomorphe à l'objet unité dans $\nabla(A,\pi)$, et universelle pour cette propriété. L'étude détaillée de cette construction, menée dans la section **3,** permet de dégager un critère pour que $\nabla(A,\pi)$ soit prémodulaire.

Ceci s'applique à l'algèbre monoïdale A, quotient de $\mathbb{C}\mathbb{H}(s)$ par l'idéal des morphismes négligeables pour une certaine trace de Markov. On sait décrire un système d'idempotents orthogonaux de A, indexés par des tableaux de Young. L'idempotent $\pi \in A_N$ associé au tableau 1^N a les propriétés requises pour former $\mathcal{C}_u = \nabla(A,\pi)$ (A étant munie du tressage $R_{1,1} = u^{-1}s$) et la structure balancée caractérisée par $\theta_1 = u^{-1}s^N$ fait de $\mathcal{C}_u$ une catégorie prémodulaire.

Cette construction est très voisine de celle de Ch. Blanchet [**2**], qui a également introduit la variante suivante. Soit u une racine de l'unité quelconque (on ne suppose plus $u^N = s$). Pour $\kappa \geq 1$ bien choisi le projecteur $\pi^{\otimes\kappa}$ a les propriétés requises pour former $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)} = \nabla(A,\pi^{\otimes\kappa})$, qui est alors prémodulaire. Cette variante se construit également en termes de groupes quantiques (**3.3.3**).

Étudiant en détail $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$, on détermine dans quels cas $TV_{\mathcal{C}}$ est défini, et on montre que $\mathcal{C}$ est définie sur le sous-anneau $k = \mathbb{Z}[u,s,1/[l-1]_s^!]$ de $\mathbb{C}$. (Une k-catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ est *définie sur* $k' \subset k$ s'il existe une k'-catégorie prémodulaire $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C}$ soit équivalente à $\mathcal{C}' \otimes_{k'} k$; cette condition est plus forte que l'existence d'une structure entière sur k' au sens de [**11**].) Pour l premier, k est formé d'entiers cyclotomiques.

Or, un théorème de Masbaum et Wenzl [**11**] affirme que si une k-catégorie modulaire $\mathcal{C}$ admet une structure entière sur un sous-anneau $k' \subset k$, $TV_{\mathcal{C}}$ est à valeurs dans k'. Ce théorème s'étend aux catégories prémodulaires (sous certaines hypothèses : **1.6.7**). On en déduit que, pour l premier, l'invariant de Turaev-Viro, s'il est défini, est un entier cyclotomique pour les catégories 'de type SL' ($\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$), ainsi que pour les catégories 'de type PGL' ($\mathcal{D}_u$, partie de degré zéro de $\mathcal{C}_u$).

Plan

La section **1** regroupe un certain nombre de rappels, de conventions, et de résultats généraux. Catégories monoïdales souveraines, tortils (ou catégories rubanées), trace d'un morphisme sont présentés au **1.1;** on y donne un critère d'existence de duaux (prop. **1.1.5**). Au **1.2** sont introduites les k-catégories (où les Hom sont des k-modules), et quelques constructions élémentaires : adjonction de sommes directes finies et scindage des idempotents (ou 'karoubianisation'), changement de scalaires, quotient par un idéal. On introduit dans **1.3** la notion de k-catégorie additive karoubienne libre, qui généralise à un anneau commutatif quelconque la notion de catégorie abélienne k-linéaire semi-simple lorsque k est un corps algébriquement clos. En **1.4,** on associe à toute k-catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une trace une catégorie $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$, quotient de $\mathcal{C}$ par l'idéal des morphismes négligeables. Cette construction commute à certains changements de base (**1.4.1**). Moyennant des hypothèses faibles, $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$

est abélienne semi-simple lorsque k est un corps (**1.4.2**). Passant aux k-catégories monoïdales (**1.5**), on montre que si $\mathcal{C}$ est un k-tortil 'pur' (où $\mathsf{End}(I) = k$), $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$ est le plus petit k-tortil pur quotient de $\mathcal{C}$ (**1.5.1**). Dans **1.6,** on définit les k-catégories prémodulaires, et modulaires (notion introduite par Turaev, [**14**]). On démontre un lemme de glissement d'anse local pour les catégories prémodulaires (**1.6.4**), ce qui permet de caractériser celles pour lesquelles TV est défini. Après avoir introduit la notion de catégorie prémodulaire définie sur un sous-anneau, on étend un théorème de [**11**] au cadre prémodulaire (**1.6.7**).

La section **2** est consacrée à la construction de $\mathcal{C}_u$ par le biais des groupes quantiques. Dans **2.1,** on rappelle comment une bigèbre de Hopf sur un anneau k, munie de structures additionnelles, définit un tortil. Appliquant ceci à la bigèbre de Hopf $\mathsf{SL}_{N,s}$ (construite à la Reshetikhin-Faddeev-Takhtadjian), on construit un k-tortil $\mathcal{C}_u(k)$. Dans **2.2,** on montre que $\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_u(\mathbb{C})$ est prémodulaire, équivalente à $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}_{(q)}(\mathfrak{sl}_N)$; puis que $\mathcal{C}_u$ est équivalente à $\mathcal{C}_u(k) \otimes_k \mathbb{C}$, pour $k = \mathbb{Z}[u, s, 1/[l-1]_s^!]$, et que $\mathcal{C}_u(k)$ est k-prémodulaire. D'où l'intégralité de TV pour $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{D}_u$ lorsque l est premier.

La section **3** est consacrée à la construction de Kazhdan et Wenzl, présentée tout d'abord dans un cadre général (**3.1**), puis appliquée en **3.2.** pour établir une équivalence $(A, \pi) \mapsto \nabla(A, \pi)$ entre, d'une part, les k-algèbres monoïdales tressées A munies d'un projecteur $\pi \in A_N$ ayant certaines propriétés, et d'autre part, certaines k-catégories additives karoubiennes tressées (théorème **3.2.3**). On donne des critères pour que $\nabla(A, \pi)$ soit une catégorie abélienne semi-simple (**3.2.6**), un tortil (**3.2.7**). C'est ainsi qu'en **3.3,** on construit au moyen de la $\mathbb{C}$-algèbre monoïdale de Hecke une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}_{s,u}^{(\kappa)}$ (**3.2.2**), qui est définie sur $k = \mathbb{Z}[u, s, 1/[l-1]_s^!]$ (**3.3.10**), et on en déduit l'intégralité de TV pour l premier (**3.3.11**).

L'appendice **A** regroupe un certain nombre de résultats classiques sur les idempotents des algèbres de Hecke qui sont utilisés dans ce travail.

Je remercie Gregor Masbaum pour m'avoir encouragé à entreprendre ce travail, et Christian Blanchet, dont les remarques m'ont incité à explorer les cas non modulaires.

1. Conventions et rappels

1.1. Catégories monoïdales souveraines et tortils

1.1.1. Une *catégorie monoïdale stricte* est une donnée $(\mathcal{C}, \otimes, I)$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie, $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un bifoncteur associatif (le *produit tensoriel*), et I un objet de $\mathcal{C}$ neutre à droite et à gauche pour $\otimes$ (l'*objet unité*).

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales strictes. Un *foncteur monoïdal* de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$ est un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ muni d'isomorphismes fonctoriels $\Phi_{2X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)$ et d'un isomorphisme $\Phi_0 : I' \xrightarrow{\sim} F(I)$ vérifiant certaines conditions ([**9**],[**3**]).

Si (F, Φ_2, Φ_0) et (G, Ψ_2, Ψ_0) sont deux foncteurs monoïdaux $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$, un morphisme fonctoriel $\alpha : F \to G$ est dit *monoïdal* s'il vérifie $\alpha_{X \otimes Y} \Phi_{2X,Y} = \Psi_{2X,Y}(\alpha_X \otimes' \alpha_Y)$, et $\alpha_0 \Phi_0 = \Psi_0$.

1.1.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale stricte. Une *dualité de* $\mathcal{C}$ est une donnée (X, Y, e, h), où X, Y sont des objets de $\mathcal{C}$, e est un morphisme $X \otimes Y \longrightarrow I$, l' *évaluation*, et h un morphisme $I \longrightarrow Y \otimes X$, la *coévaluation*, avec les conditions :

$$(e \otimes 1_X)(1_X \otimes h) = 1_X \quad \text{et} \quad (1_Y \otimes e)(h \otimes 1_Y) = 1_Y \ .$$

On dit alors que (X, e, h) est un *dual à gauche de* Y, et (Y, e, h) un *dual à droite de* X.

Une catégorie monoïdale est *autonome à gauche* (resp. *à droite*) lorsque tout objet admet un dual à gauche (resp. à droite), et *autonome* si elle est autonome à gauche et à droite.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale autonome à droite. Une *structure autonome à droite sur* $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le choix pour chaque objet X d'un dual à droite $(X^\vee, e_X, h_X)$, définit un *foncteur dual à droite* $?^\vee : \mathcal{C}^o \longrightarrow \mathcal{C}$ admettant une structure naturelle de foncteur monoïdal ($\mathcal{C}^o$ étant munie du produit tensoriel opposé à celui de $\mathcal{C}$). Un tel choix est anodin dans la mesure où deux structures autonomes à droite définissent des foncteurs dual à droite monoïdalement isomorphes de manière canonique. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le foncteur $X^\vee \otimes ?$ est adjoint à droite au foncteur $X \otimes ?$, et le foncteur $? \otimes X^\vee$ est adjoint à gauche au foncteur $? \otimes X$. Autrement dit, on a des *isomorphismes d'adjonction*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X^\vee \otimes Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Z, Y) \quad \text{et} \quad \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z \otimes X^\vee, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y \otimes X) .$$

Ce qui précède s'applique, mutatis mutandis, aux duaux à gauche.

Une *catégorie monoïdale souveraine* est une catégorie monoïdale autonome à droite munie d'une *structure souveraine*, c'est-à-dire d'un morphisme fonctoriel monoïdal $\phi_X : X \to X^{\vee\vee}$. Un tel morphisme est un isomorphisme [**10**].[2] Dans une catégorie monoïdale souveraine $(\mathcal{C}, \phi)$, le choix d'une structure autonome à droite $(X^\vee, e_X, h_X)_{X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}}$ détermine une structure autonome à gauche $({}^\vee X, \varepsilon_X, \eta_X)_{X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}}$, avec ${}^\vee X = X^\vee$, $\varepsilon_X = e_{X^\vee}(1_{X^\vee} \otimes \phi_X) : X^\vee \otimes X \to I$ et $\eta_X = (\phi_X^{-1} \otimes 1_{X^\vee}) h_{X^\vee} : I \to X \otimes X^\vee$. Le foncteur dual à gauche est alors *égal* au foncteur dual à droite.

Soit X un objet de $\mathcal{C}$, et u un endomorphisme de X. On appelle *trace à gauche de* u l'élément $\mathsf{tr}_l\, u$ de $\mathsf{End}(I)$ défini par :

$$\mathsf{tr}_l\, u = \varepsilon_X (1_{X^\vee} \otimes u) h_X .$$

La trace à gauche a les propriétés suivantes :
- $\mathsf{tr}_l(fg) = \mathsf{tr}_l(gf)$ pour $f \in \mathsf{Hom}(X, Y)$ et $g \in \mathsf{Hom}(Y, X)$;
- $\mathsf{tr}_l(f \otimes g) = \mathsf{tr}_l(f)\,\mathsf{tr}_l(g)$ pour $f \in \mathsf{End}(X)$, $g \in \mathsf{End}(Y)$;
- $\mathsf{tr}_l\, u = u$ pour $u \in \mathsf{End}(I)$.

On définit de même la *trace à droite de* u ; c'est l'élément $\mathsf{tr}_r\, u$ de $\mathsf{End}(I)$ défini par :

$$\mathsf{tr}_r\, u = e_X (u \otimes 1_{X^\vee}) \eta_X .$$

Ces deux traces, en général distinctes, sont reliées par la formule : $\mathsf{tr}_r\, f = \mathsf{tr}_l\, f^\vee$.

1.1.3. Une *catégorie monoïdale (stricte) tressée* est une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ munie d'un *tressage*, c'est-à-dire un isomorphisme fonctoriel

$$R_{X,Y} : X \otimes Y \to Y \otimes X \qquad (X, Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C})$$

vérifiant :

$$R_{X,Y \otimes Z} = (1_Y \otimes R_{X,Z})(R_{X,Y} \otimes 1_Z) \quad \text{et} \quad R_{X \otimes Y, Z} = (R_{X,Z} \otimes 1_Y)(1_X \otimes R_{Y,Z}) .$$

Pour une catégorie monoïdale tressée, l'existence des duaux à droite équivaut à celle des duaux à gauche. La notion suivante jouera un rôle important par la suite.

[2] On peut définir la notion de structure souveraine de manière plus conceptuelle, sans faire intervenir le choix d'une structure autonome à droite : voir [**10**].

Définition. Un objet X d'une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ est dit *transparent* si pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, $R_{X,Y}^{-1} = R_{Y,X}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale tressée. On appelle *structure balancée sur* $\mathcal{C}$ la donnée d'un isomorphisme fonctoriel

$$\theta_X : X \xrightarrow{\sim} X \qquad (X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C})$$

vérifiant l'axiome suivant[3] :

$$\theta_{X\otimes Y} = R_{Y,X}(\theta_Y \otimes \theta_X)R_{X,Y}\,.$$

Supposons à présent $\mathcal{C}$ autonome et tressée. La donnée d'une structure balancée θ sur $\mathcal{C}$ équivaut à la donnée d'une structure souveraine ϕ (**[5]**,**[15]**,**[10]**). Précisons cette correspondance canonique. Soit $(X^\vee, e_X, h_X)_{X\in\mathsf{Ob}\,\mathcal{C}}$ une structure autonome à droite, et notons $U_X : X^{\vee\vee} \xrightarrow{\sim} X$ et $V_X : X \xrightarrow{\sim} X^{\vee\vee}$ les isomorphismes fonctoriels définis par $U_X = (e_{X^\vee} \otimes 1_X)(1_{X^\vee} \otimes R_{X,X^{\vee\vee}})(h_X \otimes 1_{X^{\vee\vee}})$ et $V_X = (1_{X^{\vee\vee}} \otimes e_X)(R_{X,X^{\vee\vee}} \otimes 1_{X^\vee})(1_X \otimes h_{X^\vee})$. Alors θ se déduit de ϕ par la formule $U\phi = \theta$. La structure autonome à gauche correspondante est donnée par : $\varepsilon_X = e_X R_{X^\vee,X}(1_{X^\vee} \otimes \theta_X) = e_X R_{X,X^\vee}^{-1}(\theta_{X^\vee}^{-1} \otimes 1_X)$ et $\eta_X = (\theta_X^{-1} \otimes 1_{X^\vee})R_{X,X^\vee}^{-1} h_X = (1_X \otimes \theta_{X^\vee})R_{X^\vee,X} h_X$.

Une structure balancée θ sur $\mathcal{C}$ est *compatible à la dualité* si elle vérifie pour tout objet X :

$$\theta_{X^\vee} = (\theta_X)^\vee\,.$$

Cette condition équivaut à $\theta^2 = UV$, et implique l'identité de la trace à droite et de la trace à gauche relatives à la structure souveraine canoniquement associée.

Définitions. On appelle *tortil*, ou *catégorie rubanée*, une catégorie monoïdale tressée autonome munie d'une structure balancée compatible à la dualité. Si u est un endomorphisme d'un objet X de $\mathcal{C}$, on appelle *trace de* u, et on note $\mathsf{tr}\,u$, la trace de u (à droite ou à gauche, c'est égal) pour la structure souveraine canonique. En particulier, on appelle *dimension de* X, et on note $\mathsf{dim}\,X$, la trace de 1_X.

1.1.4. Critère d'existence d'un dual. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale tressée, et X un objet de $\mathcal{C}$. On se propose de formuler un critère d'existence d'un dual (à droite) pour X. Si X admet un dual à droite (Y, e, h), on pose $\delta(X) = eR_{Y,X}h \in \mathsf{End}(I)$.

Remarque. Si X admet un dual Y et si $\delta(X)$ est inversible, I est un rétracte de $Y \otimes X$; en effet, posant $i = h : I \to Y \otimes X$ et $p = \delta(X)^{-1} e\, R_{Y,X} : Y \otimes X \to I$, on a $p\,i = 1_I$.

Définition. Un endomorphisme de X est dit *scalaire* s'il est de la forme $a \otimes 1_X$, pour $a \in \mathsf{End}(I)$.

Rappelons qu'une catégorie est dite *karoubienne* si tous les projecteurs admettent une image; autrement dit pour tout objet Z et tout idempotent $\pi \in \mathsf{End}(Z)$, il existe un objet Y et des morphismes $i : Y \to Z$, $p : Z \to Y$ tels que $i\,p = \pi$ et $p\,i = 1_Y$.

[3] D'où il résulte : $\theta_I = 1_I$.

1.1.5. Proposition. *Supposons qu'il existe dans $\mathcal{C}$ un objet Z tel que I soit un rétracte de $Z \otimes X$; soient $p : Z \otimes X \to I$ et $i : I \to Z \otimes X$ des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $p\,i = 1_I$. Considérons l'endomorphisme γ de X défini par :*

$$\gamma = (p \otimes 1_X)(1_Z \otimes R_{X,X})(i \otimes 1_X)\,.$$

Alors :

1) si γ est inversible et si $\mathcal{C}$ est karoubienne, X admet un dual Y dans $\mathcal{C}$, qui est un rétracte de Z ; plus précisément, $\pi' = (1_Z \otimes p)(R_{Z,Z} \otimes \gamma^{-1})(1_Z \otimes i)$ est un projecteur de Z d'image Y ;

2) si γ est scalaire et si X admet un dual, γ est inversible, d'inverse $\delta(X) \otimes 1_X$.

Démonstration.

1) Soit $E = p\,R_{Z,X}^{-1} : X \otimes Z \to I$ et $H = (1_Z \otimes \gamma^{-1})\,i : I \to Z \otimes X$. On a alors $(E \otimes 1_X)(1_X \otimes H) = 1_X$. On conclut par le lemme suivant, classique.

1.1.6. Lemme. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale karoubienne, X, Z des objets de $\mathcal{C}$, $E : X \otimes Z \to I$ et $H : I \to Z \otimes X$ des morphismes tels que $(E \otimes 1_X)(1_X \otimes H) = 1_X$.*

Alors $\pi' = (1_Z \otimes E)(H \otimes 1_Z)$ est un projecteur de Z. Soit $Y = \mathsf{Im}(\pi')$, et soient $j : Y \to Z$, $q : Z \to Y$ tels que $j\,q = \pi'$ et $q\,j = 1_Y$. Posons $e = E(1_X \otimes j)$ et $h = (q \otimes 1_X)H$. Alors (X, Y, e, h) est une dualité de $\mathcal{C}$. □

2) Soit (Y, e, h) un dual à droite de X, et soit $a \in \mathsf{End}(I)$ tel que $\gamma = a \otimes 1_X$. Il s'agit de montrer que a est inversible, d'inverse $\delta(X)$. Par définition, $\delta(X) = e\,R_{Y,X}\,h$, donc : $a\,\delta(X) = e\,(\gamma \otimes 1_Y)R_{Y,X}\,h = (p \otimes e)(1_Z \otimes R_{X,X} \otimes 1_Y)(i \otimes R_{Y,X}\,h) = p(1_Z \otimes (e \otimes 1_X)(1_X \otimes h))\,i = p\,i = 1_I$. Ainsi $\delta(X)$ est inverse à a (le monoïde $\mathsf{End}(I)$ étant commutatif). □

1.1.7. Remarque. Avec les notations de la proposition, soit π le projecteur $i\,p$ de $Z \otimes X$; on a par définition de γ :

$$(\pi \otimes 1_X)(1_Z \otimes R_{X,X})(\pi \otimes 1_X) = \pi \otimes \gamma\,,$$

et si γ est inversible, on a $(\pi' \otimes 1_X)\pi = \pi = \pi(\pi' \otimes 1_X)$.

1.2. Généralités sur les k-catégories

Soit k un anneau commutatif. Nous appellerons *k-catégorie* une catégorie $\mathcal{C}$ munie, pour tout couple (X, Y) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une structure de k-module sur $\mathsf{Hom}(X, Y)$ de sorte que les compositions soient k-bilinéaires. Par *k-foncteur*, on entend foncteur entre k-catégories induisant des applications k-linéaires sur les flèches. On parlera de même d'*équivalence de k-catégories*, ou *k-équivalence*. Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux (petites) k-catégories, les k-foncteurs $\mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ forment une k-catégorie $\mathsf{Fun}_k(\mathcal{C}, C')$.

1.2.1. La construction 'tilde'. Une k-catégorie $\mathcal{C}$ est *additive* si elle admet des sommes directes finies, et en particulier un objet nul.[4] L'inclusion

$$\{k\text{-catégories additives karoubiennes}\} \subset \{k\text{-catégories}\}$$

[4] C'est ce qu'on appelle 'catégories k-linéaires' dans S. G. A; les k-catégories y sont appelées 'catégories pré-k-linéaires' et les k-foncteurs, 'foncteurs k-linéaires'.

admet un adjoint à gauche $\mathcal{C} \mapsto \widetilde{\mathcal{C}}$.

Explicitons ce point. D'une part, on peut associer à toute catégorie $\mathcal{C}$ une catégorie karoubienne $\mathsf{kar}\,\mathcal{C}$ par adjonction formelle des images des projecteurs; les objets de $\mathsf{kar}\,\mathcal{C}$ sont les couples (X,p), où X est un objet de $\mathcal{C}$ et p un projecteur de X; si $E=(X,p)$ et $F=(Y,q)$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{kar}\,\mathcal{C}}(E,F)=\{f\in\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\mid qf=f=fp\}$; la composition est induite par celle de $\mathcal{C}$ (en particulier $1_E=p$). Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie, il en va de même de $\mathsf{kar}\,\mathcal{C}$.

D'autre part, on peut associer à toute k-catégorie $\mathcal{C}$ une k-catégorie additive $\mathsf{add}\,\mathcal{C}$ par adjonction formelle des sommes directes finies d'objets. Concrètement, $\mathsf{add}\,\mathcal{C}$ a pour objets les suites finies d'objets de $\mathcal{C}$; si $E=(X_i)_{1\le i\le n}$ et $F=(Y_j)_{1\le j\le m}$ sont deux objets de $\mathsf{add}\,\mathcal{C}$, $\mathsf{Hom}_{\mathsf{add}\,\mathcal{C}}(E,F)=\bigoplus_{i,j}\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i,Y_j)$.

On note $\widetilde{\mathcal{C}}=\mathsf{kar}\,\mathsf{add}\,\mathcal{C}$; c'est une k-catégorie additive karoubienne, munie d'un k-foncteur canonique pleinement fidèle $\mathcal{C}\to\widetilde{\mathcal{C}}$, et pour toute k-catégorie additive karoubienne $\mathcal{A}$, le foncteur $\mathsf{Fun}_k(\widetilde{\mathcal{C}},\mathcal{A})\to\mathsf{Fun}_k(\mathcal{C},\mathcal{A})$ est une k-équivalence.

1.2.2. Changement de scalaires. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie et $k\longrightarrow L$ un morphisme d'anneaux commutatifs, on définit une L-catégorie $\mathcal{C}_L=\mathcal{C}\otimes_k L$ par $\mathsf{Ob}(\mathcal{C}_L)=\mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ et $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}_L}(X,Y)=\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)\otimes_k L$.

Si $\mathcal{C}$ est additive, il en va de même de $\mathcal{C}_L$; mais il ne suffit pas que $\mathcal{C}$ soit karoubienne pour que $\mathcal{C}_L$ le soit.

1.2.3. Quotients. Un *idéal* d'une k-catégorie $\mathcal{C}$ est une classe $\mathcal{I}$ de flèches de $\mathcal{C}$ vérifiant :
— $\mathcal{I}(X,Y):=\mathcal{I}\cap\mathsf{Hom}(X,Y)$ est un sous k-module de $\mathsf{Hom}(X,Y)$ $(X,Y\in\mathsf{Ob}(\mathcal{C}))$;
— si $f:X\to Y$ et $g:Y\to Z$, $f\in\mathcal{I}$ ou $g\in\mathcal{I}\Longrightarrow gf\in\mathcal{I}$.

La *k-catégorie quotient de $\mathcal{C}$ par l'idéal $\mathcal{I}$*, notée $\mathcal{C}/\mathcal{I}$, admet les mêmes objets que $\mathcal{C}$, les morphismes étant donnés par : $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\mathcal{I}}(X,Y)=\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)/\mathcal{I}(X,Y)$.

1.3. k-catégories additives karoubiennes libres

Définition. Un objet X d'une k-catégorie est dit *scalaire* si $\mathsf{End}(X)=k$.

1.3.1. Définitions. Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie additive karoubienne; une famille $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ d'objets de $\mathcal{C}$ est une *base de $\mathcal{C}$* si elle vérifie :
— V_λ est scalaire;
— $\mathsf{Hom}(V_\lambda,V_\mu)=0$ si $\lambda\neq\mu$;
— tout objet de $\mathcal{C}$ est facteur direct d'une somme finie d'éléments de $\{V_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$.

On dit que $\mathcal{C}$ est une k-catégorie additive karoubienne *libre* si elle admet une base.

Définition. Deux objets V, W d'une k-catégorie $\mathcal{C}$ seront dits *localement isomorphes*, et on écrira $V\overset{\mathrm{loc}}{\simeq}W$, s'ils sont isomorphes dans $\mathcal{C}_{k_{\mathfrak{m}}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de k.

1.3.3. Remarques.

1) Si k est un corps, une k-catégorie additive karoubienne libre n'est autre qu'une catégorie abélienne k-linéaire semi-simple où les Hom sont de dimension finie et tout objet simple est scalaire. Une base est alors une famille de représentants des classes d'isomorphisme d'objets simples.

2) Étant donné un ensemble Λ, la catégorie $(\mathsf{proj}\,k)^{(\Lambda)}$ des suites presque nulles de k-modules projectifs de type fini indexées par Λ est une k-catégorie additive karoubienne libre, de base $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, où E_λ désigne la suite de k-modules ayant k en position λ et 0

ailleurs. Cet exemple est essentiellement le seul. En effet, si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie additive karoubienne, le k-foncteur

$$\Phi : \mathsf{Fun}_k((\mathsf{proj}\, k)^{(\Lambda)}, \mathcal{C}) \to \mathcal{C}^\Lambda,$$
$$F \mapsto \Phi(F) = (F(E_\lambda))_{\lambda \in \Lambda}$$

est une équivalence; et $\Phi(F)$ est une base de $\mathcal{C}$ si et seulement si F est une équivalence.

3) Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie additive karoubienne libre, avec $\mathsf{Spec}\, k$ connexe non vide, et $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de $\mathcal{C}$. Alors tout objet scalaire de $\mathcal{C}$ est localement isomorphe à l'un des V_λ. Ainsi la base de $\mathcal{C}$ est unique à isomorphisme local et ordre près.

4) Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie additive karoubienne libre, et $k \to L$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Alors $\widetilde{\mathcal{C}_L}$ est une L-catégorie additive karoubienne libre, l'image d'une base de $\mathcal{C}$ par le foncteur $\mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}_L}$ étant une base de $\widetilde{\mathcal{C}_L}$. De plus si tout L-module projectif de type fini est libre, $\mathcal{C}_L$ est karoubienne donc $\widetilde{\mathcal{C}_L} = \mathcal{C}_L$.

Projecteurs isotypiques. Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie additive karoubienne libre, et $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une base de $\mathcal{C}$. Tout objet Y de $\mathcal{C}$ s'écrit de manière unique

$$Y = \sum_{\lambda\in\Lambda} Y_\lambda\,,$$

où Y_λ est facteur direct d'une somme finie de copies de V_λ. Cette décomposition est fonctorielle en Y. On note $\pi_Y^{(V_\lambda)}$ le projecteur de Y sur la composante Y_λ.

Définition. On appelle *projecteur isotypique de type* V_λ le projecteur $\pi^{(V_\lambda)} \in \mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$.

Couleurs. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie additive karoubienne libre, on appelle *k-module des couleurs de* $\mathcal{C}$, et on note $\mathsf{Col}(\mathcal{C})$, le k-module engendré par les objets de $\mathcal{C}$ avec les relations :
— $[X+Y] = [X] + [Y]$;
— $[X] = [Y]$ si $X \overset{\text{loc}}{\simeq} Y$;
— $p[X] = [pX]$ pour tout idempotent p de k.

Exercice. Le k-module $\mathsf{Col}(\mathcal{C})$ est libre, et $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$ s'identifie canoniquement à son dual. Si $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ est une base de $\mathcal{C}$, les $[V_\lambda]$ forment une base de $\mathsf{Col}(\mathcal{C})$; les $\pi^{(V_\lambda)}$ sont alors les formes coordonnées.

1.4. k-catégories à trace

On appelle *k-catégorie à trace* une k-catégorie $\mathcal{C}$ munie d'une trace k-linéaire t, c'est-à-dire, pour tout objet X, d'une forme k-linéaire t_X sur $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X)$, de sorte qu'on ait $t_X(gf) = t_Y(fg)$ pour $f : X \to Y$, $g : Y \to X$.

S Définitions. oit $(\mathcal{C}, t)$ une k-catégorie à trace. Un morphisme $f : X \to Y$ de $\mathcal{C}$ est dit *négligeable* si pour tout $g : Y \to X$, $t(gf) = 0$. Un objet X est *négligeable* si 1_X est négligeable. La classe des morphismes t-négligeables est un idéal de $\mathcal{C}$; on note $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$ le quotient de $\mathcal{C}$ par cet idéal.

Si $k \to L$ est un morphisme d'anneaux, $\mathcal{C}_L$ est naturellement munie d'une structure de L-catégorie à trace, obtenue en prolongeant la trace t par L-linéarité.

1.4.1. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie à trace, et $f : k \to L$ un morphisme d'anneaux. Le L-foncteur canonique $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}} \otimes_k L \longrightarrow {\mathcal{C}_L}^{\mathsf{ss}}$ est une équivalence dans les cas suivants :*

1) L est plat sur k et, dans $\mathcal{C}$, les Hom sont des k-modules de type fini;

2) L est un k-module projectif;

3) L est un corps et f est injectif.

Démonstration. Soit N (resp. N') l'idéal des morphismes négligeables de $\mathcal{C}$ (resp. $\mathcal{C}_L$), et soit J le noyau du L-foncteur surjectif $\mathcal{C} \otimes_k L \longrightarrow (\mathcal{C}/N) \otimes_k L$, de sorte que $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}} = \mathcal{C}/N$, ${\mathcal{C}_L}^{\mathsf{ss}} = \mathcal{C}_L/N'$, et $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}} \otimes_k L = \mathcal{C}_L/J$. Soient $X, Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$; il résulte de la suite exacte

$$N(X,Y) \otimes_k L \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \otimes_k L \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/N}(X,Y) \otimes_k L \longrightarrow 0$$

que tout élément de $J(X,Y)$ est somme finie de flèches de la forme $f \otimes \alpha$ avec $f \in N(X,Y)$ et $\alpha \in L$, et donc $J \subset N'$. Le foncteur canonique étudié n'est autre que la surjection canonique $\mathcal{C}_L/J \longrightarrow \mathcal{C}_L/N'$. Reste à montrer que si l'une des conditions 1), 2), 3) est satisfaite, ce foncteur est fidèle, c'est-à-dire $N' \subset J$. Dans chacun de ces cas L est plat sur k, de sorte que $J = N \otimes_k L$.

Dans le cas 1), soient $g_1, \ldots g_r$ des générateurs du k-module $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, et ψ l'application k-linéaire

$$\begin{aligned} \mathsf{Hom}(X,Y) &\longrightarrow k^r \\ h &\mapsto (t(g_i h))_{1 \le i \le r} \, . \end{aligned}$$

Alors $N(X,Y) = \mathsf{Ker}\, \psi$, et $N'(X,Y) = \mathsf{Ker}(\psi \otimes_k L) = N(X,Y) \otimes_k L$ par platitude.

Dans le cas 2), L est facteur direct d'un k-module libre M de base $(e_i)_{i \in I}$; notons p la projection de M sur L. Soit $f \in N'(X,Y)$. Vu dans $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \otimes_k M$, f s'écrit $\sum f_i \otimes e_i$. Puisque f est négligeable, on a pour tout $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$: $(t \otimes_k L)[(g \otimes_k L)f] = \sum t(gf_i)e_i = 0$. Les e_i étant indépendants sur k, on en déduit $t(gf_i) = 0$, donc $f_i \in N$, et $f = \sum f_i \otimes_k p(e_i) \in N \otimes_k L$. D'où le cas 2).

En particulier, le cas 3) se ramène à $L = \mathsf{Frac}\, k$, k intègre; $f \in N'(X,Y)$ s'écrit alors $f_0 \otimes_k s^{-1}$, avec $f_0 \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ et $s \in k - \{0\}$. On a donc : $\forall g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$, $s^{-1}t(gf) = 0$, d'où $t(gf) = 0$, ce qui entraîne $f_0 \in N$, et donc $f \in N \otimes_k L$. $\square$

1.4.2. Proposition. *Soit k un corps, et $\mathcal{C}$ une k-catégorie à trace abélienne où les Hom sont de dimension finie. Alors $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$ est abélienne k-linéaire semi-simple.*

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie. Le radical de $\mathcal{C}$ (Gabriel, [**6**]) est l'idéal $\mathsf{Rad}\,\mathcal{C}$ défini comme suit : pour $f \in \mathsf{Hom}(X,Y)$, $f \in \mathsf{Rad}\,\mathcal{C} \iff \forall g \in \mathsf{Hom}(Y,X)$, gf est nilpotent. Si k est un corps et si $\mathcal{C}$ est additive karoubienne avec des Hom de dimension finie, $\mathsf{Rad}\,\mathcal{C}$ est le plus petit idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$ tel que la catégorie $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ soit abélienne semi-simple [**6**]. Pour démontrer la proposition, il suffit donc de vérifier que l'idéal des morphismes négligeables de $\mathcal{C}$ contient $\mathsf{Rad}\,\mathcal{C}$, ce qui résultera immédiatement du lemme suivant.

1.4.3. Lemme. *Dans $\mathcal{C}$ la trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle.*

Démonstration. Soit $f \in \mathsf{End}(X)$, nilpotent de degré n, et montrons $t(f) = 0$ par récurrence sur n. Si $f = 0$ c'est clair; sinon f s'écrit ig, où i est l'inclusion $\mathsf{Im}\, f \hookrightarrow X$. On a $t(f) = t(ig) = t(gi) = 0$, car $gi = f_{|\mathsf{Im}\, f}$ est nilpotent de degré $< n$. $\square$ $\square$

Remarque. Sous les hypothèses de **1.4.2,** le foncteur $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$, en général non exact, induit une bijection entre, d'une part, les classes d'isomorphisme d'objets indécomposables non négligeables de $\mathcal{C}$, et d'autre part, les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$.

1.5. k-catégories monoïdales

Définitions. Une *k-catégorie monoïdale* est une catégorie monoïdale munie d'une structure de k-catégorie de sorte que le produit tensoriel un k-foncteur en chaque variable. Un *k-foncteur monoïdal* (resp. une *k-équivalence monoïdale*) est un foncteur monoïdal (resp. une équivalence monoïdale) qui est un k-foncteur.

Une *k-catégorie souveraine, tressée,* un *$k-$tortil* ... est une k-catégorie munie d'une structure souveraine, tressée, d'une structure de tortil ...

Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale, $A = \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(I)$ est une k-algèbre commutative, et $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ possède une structure naturelle de (A, A)-bimodule pour X, Y objets de $\mathcal{C}$. Si les deux structures de A-module coïncident, cela fait de $\mathcal{C}$ une A-catégorie monoïdale; c'est en particulier le cas si $\mathcal{C}$ est tressée. Le cas $A = k$ jouera un rôle particulier dans la suite, ce qui motive la définition suivante.

Définition. Une k-catégorie monoïdale est dite *pure* si I est scalaire ($\mathsf{End}(I) = k$).

Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale, $\mathsf{add}\,\mathcal{C}$, $\mathsf{kar}\,\mathcal{C}$, $\widetilde{\mathcal{C}}$ héritent d'une structure de k-catégorie monoïdale, ainsi que $\mathcal{C}_L$ pour tout morphisme d'anneaux commutatifs $k \to L$. (Par exemple, si $\mathcal{C}$ est stricte, $\mathsf{add}\,\mathcal{C}$ est monoïdale stricte pour le produit tensoriel défini, sur les objets, par $(X_i)_{1 \le i \le m} \otimes (Y_j)_{1 \le j \le n} = (Z_k)_{1 \le k \le mn}$, avec $Z_k = X_i \otimes Y_j$ si $k = n(i-1) + j$).

Définitions. Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale, un *$\otimes$-idéal à droite (resp. à gauche) de* $\mathcal{C}$ est un idéal $\mathcal{I}$ vérifiant, pour $f, g \in \mathsf{Fl}(C)$: $f \otimes g \in \mathcal{I}$ si $f \in \mathcal{I}$ (resp. si $g \in \mathcal{I}$). Un *$\otimes$-idéal* est un $\otimes$-idéal à droite et à gauche. Un $\otimes$-idéal $\mathcal{I}$, à droite ou à gauche, est dit *propre* s'il satisfait la condition : $\mathcal{I} \cap \mathsf{End}(I) = 0$.

Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ est un k-foncteur monoïdal, $\mathsf{Ker}(F) = \{f \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C}) \mid F(f) = 0\}$ est un $\otimes$-idéal de $\mathcal{C}$. D'autre part, étant donné un $\otimes$-idéal $\mathcal{I}$ de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ admet une unique structure de k-catégorie monoïdale faisant du foncteur canonique $\Pi : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\mathcal{I}$ un foncteur k-monoïdal strict, et $\mathcal{I} = \mathsf{Ker}\,\Pi$. Si $\mathcal{C}$ est pure, $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ est pure si et seulement si $\mathcal{I}$ est propre.

Dans un k-tortil, l'idéal des morphismes négligéables est le plus grand $\otimes$-idéal propre (et ne dépend donc que de la structure monoïdale). Ce fait remarquable résulte de la proposition suivante (voir aussi la remarque **1.5.3**, 2)).

1.5.1. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie monoïdale souveraine pure. L'idéal N_l (resp. N_r) des morphismes négligeables pour la trace à gauche (resp. à droite) est le plus grand $\otimes$-idéal à gauche (resp. à droite) propre de $\mathcal{C}$. S'il existe dans $\mathcal{C}$ un isomorphisme fonctoriel $X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$ (par exemple, si $\mathcal{C}$ est tressée) on a $N_l = N_r$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{I}$ un $\otimes$-idéal à gauche propre de $\mathcal{C}$, et soit $f : X \to Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$ appartenant à $\mathcal{I}$. Pour $g : Y \to X$, on a $\mathsf{tr}_l(gf) = \varepsilon_X(1_{X^\vee} \otimes gf)h_X \in \mathcal{I} \cap \mathsf{End}(I) = k$ donc $\mathsf{tr}_l(gf) = 0$, ce qui montre que $\mathcal{I} \subset N_l$.

Reste à montrer que N_l est un $\otimes$-idéal à gauche propre. Soit $f \in \mathsf{Hom}(X, X')$, $g \in \mathsf{Hom}(Y, Y')$, $h \in \mathsf{Hom}(X' \otimes Y', X \otimes Y)$. On a alors $\mathsf{tr}_l(h(f \otimes g)) = \mathsf{tr}_l(Hg)$, où $H = (\varepsilon_X \otimes 1_Y)(1_{X^\vee} \otimes h)(1_{X^\vee} \otimes f \otimes 1_Y)(h_X \otimes 1_{Y'})$. Si $g \in N_l$, on a $\mathsf{tr}_l(Hg) = 0$ donc $f \otimes g \in N_l$. Ainsi N_l est bien un $\otimes$-idéal à gauche, propre car pour $u \in \mathsf{End}(I)$, $\mathsf{tr}_l(u) = u$.

De même pour N_r. S'il existe dans $\mathcal{C}$ un isomorphisme fonctoriel $X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$, les $\otimes$-idéaux à droite coïncident avec les $\otimes$-idéaux à gauche; en ce cas N_l est le plus grand $\otimes$-idéal propre, et N_r aussi. $\square$

1.5.2. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ un k-tortil pur additif karoubien libre. Alors :*

1) pour tout objet scalaire V de $\mathcal{C}$, $\mathsf{dim}\, V$ est inversible dans k;

2) l'idéal des morphismes négligeables de $\mathcal{C}$ est réduit à zéro.

Démonstration.

1) L'inversibilité étant une propriété locale, on peut supposer k local. Alors les objets scalaires (à isomorphisme près) forment une base, et tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à une somme directe d'objets scalaires. Si V est scalaire, $\mathsf{End}(V) = k \simeq \mathsf{Hom}(V \otimes V^\vee, I)$, donc I est facteur direct de $V \otimes V^\vee$. D'après **1.1.5,** $\delta(V)$ est inversible, ainsi que $\mathsf{dim}\, V = \theta_V \delta(V)$.

2) Soit N l'idéal des morphismes négligeables de $\mathcal{C}$, et soit (V_λ) une base de $\mathcal{C}$. D'après 1), l'intersection de N avec $\mathsf{End}(V_\lambda)$ est nulle pour tout λ, donc $N = 0$. $\square$

1.5.3. Remarques.

1) Mettant ensemble **1.5.1** et **1.5.2**, on voit que si $\mathcal{C}$ est un k-tortil pur et $\mathcal{I}$ un $\otimes$-idéal tel que $\mathcal{C}/\mathcal{I}$ soit un k-tortil pur additif karoubien libre, alors $\mathcal{I}$ est l'idéal des morphismes négligeables de $\mathcal{C}$.

2) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale arbitraire, et considérons sur $\mathcal{C}$ les relations d'équivalence $\sim_0$, $\sim_l$, $\sim_r$, et $\sim$ définies comme suit. Pour $f, g : X \to Y$, $f \sim_0 g$ si pour tous morphismes $e : I \to X$, $h : Y \to I$, $efh = egh$; $f \sim_l g$ (resp. $f \sim_r g$) si pour tout objet Z, $1_Z \otimes f \sim_0 1_Z \otimes g$ (resp. $f \otimes 1_Z \sim_0 g \otimes 1_Z$). Enfin, $f \sim g$ si pour tous objets Z, Z', $1_Z \otimes f \otimes 1_{Z'} \sim_0 1_Z \otimes g \otimes 1_{Z'}$. Alors $\sim$ est une relation d'équivalence compatible au produit tensoriel (autrement dit, $\mathcal{C}/_\sim$ est monoïdale et la surjection canonique est un foncteur monoidal strict); de plus la restriction de $\sim$ à $\mathsf{End}(I)$ est l'égalité, et $\sim$ est la relation d'équivalence la moins fine sur $\mathcal{C}$ ayant ces propriétés. S'il existe un isomorphisme fonctoriel $X \otimes Y \simeq Y \otimes X$, $\sim = \sim_l = \sim_r$. Dans un tortil, $f \sim g \iff \forall h : Y \to X, \mathsf{tr}(hf) = \mathsf{tr}(hg)$. Enfin pour un k-tortil, $\mathcal{C}/_\sim = \mathcal{C}^{\mathsf{ss}}$.

1.6. Catégories prémodulaires et modulaires.

Soit k un anneau commutatif.

1.6.1. Définition. On appelle *k-catégorie prémodulaire* un k-tortil pur additif karoubien libre admettant une base finie.

Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie prémodulaire.

Si L est un entrelacs en rubans orienté à n composantes numérotées, et si $X_1, \ldots, X_n$ sont des objets de $\mathcal{C}$, notons $\langle L(X_1, \ldots, X_n)\rangle$ la valeur de l'invariant d'entrelacs en rubans colorés associé au tortil $\mathcal{C}$ sur l'entrelacs L coloré par les X_i. L'application $(X_1, \ldots X_n) \mapsto \langle L(X_1, \ldots, X_n)\rangle$ induit par n-linéarité et passage au quotient une application

$$\mathsf{Col}(\mathcal{C})^n \longrightarrow k,$$
$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \mapsto \langle L(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\rangle\,.$$

Pour $X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$, on définit un élément $\mathcal{S}X$ de $\mathsf{End}(1_\mathcal{C})$ en posant :

$$(\mathcal{S}X)_Y = (\varepsilon_X \otimes 1_Y)(1_{X^\vee} \otimes R_{Y,X} \otimes R_{X,Y})(h_X \otimes 1_Y) \quad \text{pour} \quad Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}\,.$$

Proposition. *Le produit tensoriel induit sur* $\mathsf{Col}(\mathcal{C})$ *une structure de* k*-algèbre, et l'application* k*-linéaire* $\mathcal{S} : \mathsf{Col}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$ *définie par* $[X] \mapsto \mathcal{S}(X)$ *est un morphisme de* k*-algèbres.* $\square$

1.6.2. Définition. On dit que $\mathcal{C}$ est *modulaire* si $\mathcal{S}$ est bijectif.

Pour X, Y objets scalaires de $\mathcal{C}$, on pose $s_{X,Y} = \langle H([X],[Y])\rangle$, où H est l'entrelacs de Hopf. Autrement dit, $s_{X,Y} = \mathsf{tr}(R_{Y,X}R_{X,Y})$.

Remarques.

1) Donnons-nous une base $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, ce qui identifie $\mathsf{Col}(\mathcal{C})$ et $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$ au k-module k^Λ, et posons $s_{\lambda,\mu} = s_{X_\lambda,X_\mu}$. Alors $\mathcal{S}$ a pour matrice $(\mathsf{dim}(X_\mu)^{-1}s_{\lambda,\mu})$ ($\mathsf{dim}\, X_\mu$ est inversible par **1.5.2**); de sorte que l'inversiblilité de $\mathcal{S}$ équivaut à celle de la S-matrice $(s_{\lambda,\mu})$.

2) Cette définition d'une k-catégorie modulaire est celle de Turaev [**14**], avec deux nuances. D'une part, nous supposons $\mathcal{C}$ additive karoubienne, ce que ne fait pas Turaev; cette hypothèse, anodine dans la mesure où l'on peut toujours remplacer $\mathcal{C}$ par $\widetilde{\mathcal{C}}$, simplifie la formulation des axiomes. D'autre part, Turaev incorpore à la définition la donnée d'une base particulière; mais tout peut se faire indépendament d'un tel choix.

Critère de modularité. Supposons $\mathsf{Spec}\, k$ connexe pour simplifier. Soit $\Lambda_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme local d'objets scalaires de $\mathcal{C}$, et posons

$$M_{\mathcal{C}} = \{X \in \Lambda_{\mathcal{C}} \mid \exists \mathfrak{m} \quad \text{idéal maximal de } k \text{ t. q.} \quad \forall Y \in \Lambda_{\mathcal{C}},\, s_{X,Y} - \mathsf{dim}\, X\, \mathsf{dim}\, Y \in \mathfrak{m}\}\,.$$

1.6.3. Proposition. *Si* $\mathsf{Spec}\, k$ *est connexe, une* k*-catégorie prémodulaire* $\mathcal{C}$ *est modulaire si et seulement si* $M_{\mathcal{C}} = \{I\}$.

Démonstration. La proposition est démontrée dans [**4**] (**1.1**) lorsque k est un corps. En général, la modularité de $\mathcal{C}$ équivaut à celle de tous les $\mathcal{C}_{k/\mathfrak{m}}$, pour $\mathfrak{m}$ idéal maximal de k. Par ailleurs, si $\mathsf{Spec}\, k$ est connexe, et si X, Y sont deux objets scalaires, $X \overset{\text{loc}}{\simeq} Y \Longleftrightarrow \exists\mathfrak{m} \mid X \simeq Y$ dans $\mathcal{C}_{k/\mathfrak{m}}$. On se ramène ainsi au cas d'un corps. $\square$

Invariants de 3-variétés. Turaev a démontré dans [**14**] qu'on peut associer à toute k-catégorie modulaire une TQFT, et en particulier certains invariants de 3-variétés fermées. Ces derniers peuvent être définis sous des hypothèses plus faibles que la modularité.

Choisissons une base $(X)_{X\in\Lambda}$, et considérons les couleurs

$$\Omega = \sum_{X\in\Lambda} \mathsf{dim}\, X\,[X], \quad \Omega^{\pm} = \sum_{X\in\Lambda} \theta_X{}^{\pm 1}\, \mathsf{dim}\, X\,[X]\,,$$

qui sont en fait indépendantes de la base choisie, et posons $\Delta = (\mathcal{S}\Omega)_I = \sum_{X\in\Lambda}(\mathsf{dim}\, X)^2$, $\Delta^{\pm} = (\mathcal{S}\Omega^{\pm})_I = \sum_{X\in\Lambda}\theta_X{}^{\pm 1}(\mathsf{dim}\, X)^2$, et enfin $\widetilde{\Delta} = \Delta^+\Delta^-$.

Notant U (resp. $U^{\pm}$) le nœud en rubans trivial d'auto-enlacement 0 (resp. ± 1), on a : $\Delta = \langle U(\Omega)\rangle$ et $\Delta^{\pm} = \langle U^{\pm}(\Omega)\rangle$.

1.6.4. Lemme. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie prémodulaire. Alors :*

1) $\forall X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $[X]\,\Omega = \mathsf{dim}\, X\,\Omega$*;*

2) $\mathcal{S}\Omega^+ = \Delta^+\theta^{-1}$ *et* $\mathcal{S}\Omega^- = \Delta^-\theta$ *('propriété de glissement d'anse locale').*

Démonstration. Les démonstrations de [**4**], **1.4,**, valables lorsque k est un corps, s'adaptent au cas général de la manière suivante.

1) On peut supposer l'anneau k local, de sorte que deux objets localement isomorphes sont isomorphes. Soit $\Lambda = \Lambda_{\mathcal{C}}$. Pour $Y \in \mathsf{Ob}(C)$ et $X \in \Lambda$, soit $\mu_{X,Y}$ le rang du k-module libre $\mathsf{Hom}(X,Y)$. On a : $Y \simeq \bigoplus_{X\in\Lambda} X^{\mu_{X,Y}}$. Pour $X,Y,Z \in \Lambda$, $\mu_{Z,X\otimes Y} = \mathsf{rg}\,\mathsf{Hom}(X\otimes Y, Z) = \mathsf{rg}\,\mathsf{Hom}(Y, X^\vee \otimes Z)$ (par adjonction) $= \mu_{Y,X^\vee\otimes Z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}[X]\Omega &= \sum_{Y\in\Lambda} \mathsf{dim}\, Y[X][Y] = \sum_{Y,Z\in\Lambda} \mathsf{dim}\, Y \mu_{Z,X\otimes Y}[Z] = \sum_{Y,Z\in\Lambda} \mathsf{dim}\, Y \mu_{Y,X^\vee\otimes Z}[Z] \\ &= \sum_{Z\in\Lambda} \mathsf{dim}(X^\vee\otimes Z)[Z] = \sum_{Z\in\Lambda} \mathsf{dim}\, X^\vee\ \mathsf{dim}\, Z\,[Z] = \mathsf{dim}\, X^\vee\,\Omega = \mathsf{dim}\, X\,\Omega\,.\end{aligned}$$

2) Montrons par exemple la première identité. Par 1), le scalaire $\langle U^+([X]\Omega)\rangle$ vaut $\mathsf{dim}\, X\,\Delta^+$. D'autre part il est égal à $\mathsf{tr}[\theta_X(\mathcal{S}\Omega^+)_X] = \theta_X\,\mathsf{dim}\, X(\mathcal{S}\Omega^+)_X$. □

Si L est un entrelacs en rubans orienté, notons respectivement $b_+(L)$, $b_-(L)$ et $b_0(L)$ le nombre de valeurs propres strictement positives, strictement négatives et nulles de la matrice d'enlacement de L. Si $M = S^3_L$, variété obtenue à partir de S^3 par chirurgie le long de L, $b_0(L)$ n'est autre que le premier nombre de Betti de M, noté $h_1(M)$.

1.6.5. Corollaire. *Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie prémodulaire pour laquelle $\widetilde{\Delta} \in k^*$, on définit un invariant de 3-variétés fermées connexes orientées en posant pour $M \simeq S^3_L$:*

$$I'_{\mathcal{C}}(M) = \frac{\langle L(\Omega)\rangle}{{\Delta^+}^{b_+(L)}{\Delta^-}^{b_-(L)}}\,.$$

Démonstration. Identique en tout point à celle de [**4**] **1.7,** compte tenu du lemme précédent. □

L'invariant de Reshetikhin-Turaev de M est

$$I_{\mathcal{C}}(M) = D^{-h_1(M)} I'_{\mathcal{C}}(M)\,,$$

où D est une racine carrée de $\widetilde{\Delta} = \Delta^+\Delta^-$. L'invariant de Turaev-Viro de M est

$$TV_{\mathcal{C}}(M) = I_{\mathcal{C}}(M\,\#\,\overline{M}) = \widetilde{\Delta}^{-h_1(M)} I'_{\mathcal{C}}(M\,\#\,\overline{M})\,.$$

S'il est nécéssaire de se donner une racine carrée de $\widetilde{\Delta}$ dans k pour définir $I_{\mathcal{C}}$, ce n'est le cas ni pour $I'_{\mathcal{C}}$, ni pour $TV_{\mathcal{C}}$.

Supposons que k soit un corps. Alors $\Lambda_{\mathcal{C}}$ est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples, et $M_{\mathcal{C}}$, l'ensemble des $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ vérifiant : $\forall Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}, s_{X,Y} = \mathsf{dim}\, X\,\mathsf{dim}\, Y$.

Notons $\mu^{\mathcal{C}}$ l'élément de $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$ caractérisé par

$$\mu^{\mathcal{C}}_Y = \begin{cases} 1_Y & \text{si } Y \in M_{\mathcal{C}}, \\ 0 & \text{si } Y \in \Lambda_{\mathcal{C}} - M_{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Autrement dit, $\mu^{\mathcal{C}} = \sum_{X\in M_{\mathcal{C}}} \pi^{(X)}$. On a alors :

— $\mathcal{S}\Omega = \Delta\mu$ (*lemme d'annulation, cf.* [**4**] **1.4**);

— $\widetilde{\Delta} = \Delta\Delta_M$, où $\Delta_M = \sum_{X\in M_{\mathcal{C}}} \theta_X(\mathsf{dim}\, X)^2$ ([**4**], remarque **1.5,** 3).

Supposons de plus que $M_{\mathcal{C}}$ soit constitué d'objets inversibles.[5] Alors tout $X \in M_{\mathcal{C}}$ est transparent (*cf.* **1.1.3**), et vérifie : $\mathsf{dim}\, X = \pm 1$ et $\theta_X = \pm 1$. En outre le produit tensoriel fait de $M_{\mathcal{C}}$ un groupe qui opère sur $\Lambda_{\mathcal{C}}$. On a $\Delta_M = \sum_{X \in M_{\mathcal{C}}} \theta_X$; d'où $\Delta_M = |M_{\mathcal{C}}|$ si $\theta_X = 1$ pour tout $X \in M_{\mathcal{C}}$, et $\Delta_M = 0$ sinon. Ainsi, $\widetilde{\Delta} \in k^*$ si et seulement si $\Delta \in k^*$, $|M_{\mathcal{C}}| \in k^*$ et $\forall X \in M_{\mathcal{C}}, \theta_X = 1$. Dans ce cas, $\widetilde{\Delta} = |M_{\mathcal{C}}|\Delta$.

En vertu de la remarque **1.3.3,** 4), si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie prémodulaire et si $k \to L$ est un morphisme d'anneaux commutatifs, $\widetilde{\mathcal{C}_L}$ est L-prémodulaire; de plus $\widetilde{\mathcal{C}_L} = \mathcal{C}_L$ si tout L-module projectif de type fini est libre, par ex. si L est local. Ceci inspire la définition suivante.

Définition. Une k-catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ est *définie sur* k', sous-anneau de k, s'il existe une k'-catégorie prémodulaire $\mathcal{C}'$ telle que $\mathcal{C}$ soit équivalente à $\widetilde{\mathcal{C}'_k}$.

1.6.6. Théorème. *Soit k un corps, et $\mathcal{C}$ une k-catégorie prémodulaire telle que $TV_{\mathcal{C}}$ soit défini (autrement dit $\widetilde{\Delta} \neq 0$) et $M_{\mathcal{C}}$ soit constitué d'objets inversibles.*

On suppose $\mathcal{C}$ définie sur un sous-anneau k' de k tel que pour tout $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, l'ordre du stabilisateur de Y sous l'action de $M_{\mathcal{C}}$ soit inversible dans k'.

Alors $TV_{\mathcal{C}}$ est à valeurs dans k'.

Démonstration. On peut supposer $\mathcal{C} = \mathcal{C}' \otimes_{k'} k$, où $\mathcal{C}'$ est une k'-catégorie prémodulaire.

Soit $(X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une base de $\mathcal{C}'$; c'est aussi une base de $\mathcal{C}$, donc Λ s'identifie à $\Lambda_{\mathcal{C}}$. Pour Y objet de $\mathcal{C}'$, $\mu_Y^{\mathcal{C}} = \sum_{\lambda \in M_{\mathcal{C}}} \pi^{(X_\lambda)}(Y)$ est un morphisme de $\mathcal{C}'$, la décomposition de Y en somme de ses composantes isotypiques étant la même dans $\mathcal{C}$ et dans $\mathcal{C}'$. On conclut par la proposition suivante, qui généralise au cas prémodulaire un résultat de Masbaum et Wenzl ([**11**]).

1.6.7. Proposition. *Soit k un corps et $\mathcal{C}$ une k-catégorie prémodulaire telle que $M_{\mathcal{C}}$ soit constitué d'objets inversibles et $\widetilde{\Delta} \neq 0$. Soit k' un sous-anneau de k tel que pour tout $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, l'ordre du stablisateur de Y sous $M_{\mathcal{C}}$ soit inversible dans k'.*

On suppose que $\mathcal{C}$ admet un sous-tortil $\mathcal{C}'$ vérifiant :

— $\mathsf{End}_{\mathcal{C}'}(I) \subset k'$;

— *il existe une base de $\mathcal{C}$ constituée d'objets de $\mathcal{C}'$;*

— *pour Y objet de $\mathcal{C}'$, $\mu_Y^{\mathcal{C}}$ est un morphisme de $\mathcal{C}'$.*

Alors $TV_{\mathcal{C}}$ est à valeurs dans k'.

Démonstration.

Soit M une 3-variété fermée orientée connexe. La variété $N = M \# \overline{M}$ est isomorphe à S^3_L pour un certain entrelacs en rubans L à $2g$ composantes numérotées, les g dernières constituant un sous-entrelacs trivial (c'est-à-dire juxtaposition de g copies de U). On a alors $b_+(N) = b_-(N)$, de sorte que

$$TV_{\mathcal{C}}(M) = \frac{\langle L(\Omega)\rangle}{\widetilde{\Delta}^g} = |M_{\mathcal{C}}|^{-g} \frac{\langle L(\Omega)\rangle}{\Delta^g}.$$

Choisissons une base $(X)_{X \in \Lambda}$ de $\mathcal{C}$. On a

$$\langle L(\Omega)\rangle = \sum_{X_1, \ldots, X_g \in \Lambda} \mathsf{dim}\, X_1 \ldots \mathsf{dim}\, X_g \langle L(X_1, \ldots, X_g, \Omega, \ldots, \Omega)\rangle .$$

[5] Un objet X est *inversible* s'il existe un objet Y tel que $X \otimes Y \simeq I$.

Puisque tout $X \in M_{\mathcal{C}}$ est inversible, transparent, et vérifie $\theta_X = 1$ et $\mathsf{dim}\, X = \pm 1$, la valeur de l'expression $\mathsf{dim}\, X_1 \ldots \mathsf{dim}\, X_g \langle L(X_1, \ldots, X_g, \Omega, \ldots, \Omega)\rangle$ reste inchangée lorsqu'on remplace l'un des X_i par un élément de son orbite sous $M_{\mathcal{C}}$. Ainsi, choisissant un sous-ensemble Λ_0 de Λ contenant un et un seul représentant de chaque orbite, on a

$$\langle L(\Omega)\rangle = |M_{\mathcal{C}}|^g \sum_{X_1,\ldots,X_g \in \Lambda_0} \frac{\mathsf{dim}\, X_1}{|\,\mathsf{Stab}(X_1)|} \cdots \frac{\mathsf{dim}\, X_g}{|\,\mathsf{Stab}(X_g)|} \langle L(X_1, \ldots, X_g, \Omega, \ldots, \Omega)\rangle \,.$$

Par hypothèse, on peut choisir $\Lambda \subset \mathsf{Ob}(\mathcal{C}')$, et puisque $\mathcal{C}'$ est un sous-tortil de $\mathcal{C}$, on peut trouver une structure autonome à droite sur $\mathcal{C}$ telle que pour $X \in \Lambda$, $X^\vee$ soit un objet de $\mathcal{C}'$ et e_X, h_X des morphismes de $\mathcal{C}'$. Alors $\mathsf{dim}\, X \in \mathsf{End}_{\mathcal{C}'}(I) \subset k'$, et $|\,\mathsf{Stab}(X)|^{-1} \in k'$; on se ramène donc à vérifier :

$$\langle L(X_1, \ldots, X_g, \Omega, \ldots, \Omega)\rangle \in \Delta^g k' \,.$$

Ce scalaire est la trace d'un morphisme de $\mathcal{C}'$ de la forme $H \circ \{(\mathcal{S}\Omega)_{Z_1} \otimes \cdots \otimes (\mathcal{S}\Omega)_{Z_r}\}$, où H est un morphisme de $\mathcal{C}'$ défini par un enchevêtrement coloré par des objets appartenant à $\Lambda \cup \Lambda^\vee$, et les Z_i sont des produits tensoriels de tels objets. D'après le lemme d'annulation,

$$\langle L(X_1, \ldots, X_g, \Omega, \ldots, \Omega)\rangle = \Delta^g\, \mathsf{tr}(H \circ (\mu^{\mathcal{C}}_{Z_1} \otimes \cdots \otimes \mu^{\mathcal{C}}_{Z_n})) \,;$$

ce scalaire appartient à $\Delta^g k'$ car H est un morphisme de $\mathcal{C}'$, ainsi que les $\mu^{\mathcal{C}}_{Z_i}$, les Z_i étant des objets de $\mathcal{C}'$. D'où la proposition $\square$... et le théorème. $\square$

1.6.8. Modularisations. Rappelons quelques résultats de [**4**]. Soit k un corps, et $\mathcal{C}$ une k-catégorie prémodulaire.

Définitions. Une *modularisation de* $\mathcal{C}$ est la donnée d'une k-catégorie modulaire $\mathcal{C}'$ et d'un k-foncteur tortil $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ tel que tout objet de $\mathcal{C}'$ soit facteur direct de l'image par H d'un objet de $\mathcal{C}$. On dit que $\mathcal{C}$ est *modularisable* si elle admet une modularisation.

Supposons k algébriquement clos de caractéristique nulle. Une k-catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ est modularisable si et seulement si pour tout $X \in M_{\mathcal{C}}$, X est transparent, $\theta_X = 1$ et $\mathsf{dim}\, X$ est un entier naturel. Si $\mathcal{C}$ est modularisable, la modularisation $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est unique à équivalence près ([**4**], **3.5**). En outre $\widetilde{\Delta}_{\mathcal{C}}$ est inversible, donc $TV_{\mathcal{C}}$ est défini, et il est égal à $TV_{\mathcal{C}'}$.

Si $M_{\mathcal{C}}$ est constitué d'objets inversibles (qui sont donc transparents), $\mathcal{C}$ est modularisable si et seulement si $\forall X \in M_{\mathcal{C}}$, $\mathsf{dim}\, X = 1$ et $\theta_X = 1$. Rappelons que sous les mêmes hypothèses, $\widetilde{\Delta} \in k^*$ si et seulement si $\Delta \in k^*$ et $\forall X \in M_{\mathcal{C}}$, $\theta_X = 1$.

1.7. Algèbres monoïdales

1.7.1. Définition. On appelle *k-algèbre monoïdale* une k-catégorie monoïdale stricte A vérifiant :

- $\mathsf{Ob}(A) = \mathbb{N}$ comme monoïde (on notera souvent $[n]$ l'objet correspondant à l'entier n pour plus de clarté);
- pour m, $n \in \mathbb{N}$, $m \neq n$, $\mathsf{Hom}_A([m],[n]) = 0$.

Remarque. Concrètement, une k-algèbre monoïdale A est la donnée d'une famille $A_n = \mathsf{End}_A([n])$ de k-algèbres indexée par $\mathbb{N}$ et d'une loi de composition interne $\otimes$ sur $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ avec les conditions suivantes :

- $\otimes$ fait de $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ une k-algèbre associative graduée, d'unité 1_0 ;
- $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $\forall f, f' \in A_m$, $\forall g, g' \in A_n$, $(f \otimes g)(f' \otimes g') = ff' \otimes gg'$ et $1_m \otimes 1_n = 1_{m+n}$.

1.7.2. Exemples.

1) La *k-algèbre monoïdale des tresses* $k\mathbb{B}$ est la k-algèbre monoïdale définie comme suit : $(k\mathbb{B})_n = k[B_n]$, où B_n est le n-ième groupe de tresses (engendré par des générateurs g_i, $(1 \leq i < n)$ avec les relations $g_i g_j = g_j g_i$ si $|j-i| > 1$, $g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}$ si $1 \leq i < n-1$); le produit tensoriel $k[B_m] \times k[B_n] \to k[B_{m+n}]$ correspond à la juxtaposition des tresses. La k-algèbre monoïdale des tresses est naturellement munie d'un tressage R et d'une structure balancée Θ, définis par $R_{1,1} = g$ (le générateur g_1 de B_2) et $\Theta_1 = 1_1$.

2) Pour $s \in k^*$, la *k-algèbre monoïdale de Hecke* $k\mathbb{H}(s)$ est la k-catégorie monoïdale quotient de $k\mathbb{B}$ par le $\otimes$-idéal engendré par $(g-s)(g+s^{-1}) \in k[B_2]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $k\mathbb{H}(s)_n$ n'est autre que l'algèbre de Hecke $H_n(s)$, quotient de kB_n par l'idéal engendré par les éléments $(g_i - s)(g_i + s^{-1})$ $(1 \leq i > n)$.

2. Construction de la catégorie prémodulaire $\mathcal{C}_u$ via les groupes quantiques

2.1. Généralités

2.1.1. Rappels sur les groupes quantiques. Soit k un anneau commutatif. On pose $\otimes = \otimes_k$, et si V, W sont deux k-modules, on note $\sigma_{V,W}$ l'isomorphisme canonique $V \otimes W \xrightarrow{\sim} W \otimes V$.

Soit $\mathcal{L}$ une k-bigèbre, de coproduit Δ, coünité ε, produit μ, unité η. La catégorie des $\mathcal{L}$-comodules à gauche est naturellement munie d'une structure de k-catégorie monoïdale, notée $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$. On note $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$ la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ des comodules dont le k-module sous-jacent est projectif de type fini.

Si $\mathcal{L}$ admet un antipode S, il existe sur $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$ une structure autonome à droite canonique, associant à un objet $X = (V, \delta)$ de $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$ le dual à droite $(X^\vee, e_X, h_X)$ défini comme suit. Soit $V^* = \mathsf{Hom}_k(V, k)$, ev_V l'évaluation canonique $V \otimes V^* \to k$, et $\mathsf{coev}\, V$: $k \to V^* \otimes V$ la coévaluation correspondante, de sorte que (V^*, e_V, h_V) est une dualité de $\mathsf{Mod}\, k$. Posons $\delta' = (S \otimes 1_{V^*})(\sigma_{V^*,\mathcal{L}} \otimes e_V)(1_{V^*} \otimes \delta \otimes 1_{V^*})(h_V \otimes 1_{V^*})$. Alors $X^\vee = (V^*, \delta')$, $e_X = \mathsf{ev}_V$ et $h_X = \mathsf{coev}_V$.

Soit $\mathcal{L}$ une bigèbre de Hopf, c'est-à-dire admettant un antipode bijectif S. Une *structure souveraine sur* $\mathcal{L}$ est un morphisme de k-algèbres $\phi : \mathcal{L} \to k$ vérifiant : $(1_\mathcal{L} \otimes \phi)\Delta = (\phi \otimes S^2)\Delta$. Une structure souveraine ϕ sur $\mathcal{L}$ définit une structure souveraine sur $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$, encore notée ϕ; pour $X = (V, \delta)$ objet de $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$, ϕ_X est la composée de

$$V \xrightarrow{\delta} \mathcal{L} \otimes V \xrightarrow{\phi \otimes 1} V \xrightarrow{\sim} V^{**}.$$

Soit $\mathcal{L}$ une bigèbre. Une *structure tressée sur* $\mathcal{L}$ est une forme linéaire coïnversible r sur $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ vérifiant :

— $r(1_\mathcal{L} \otimes \mu) = (r \otimes r)(1_\mathcal{L} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes 1_\mathcal{L})(\Delta \otimes 1_\mathcal{L} \otimes 1_\mathcal{L})$,

— $r(\mu \otimes 1_\mathcal{L}) = (r \otimes r)(1_\mathcal{L} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes 1_\mathcal{L})(\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes \Delta)$,

— $(r \otimes \mu)(1_\mathcal{L} \otimes 1_\mathcal{L} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(1_\mathcal{L} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes 1_\mathcal{L})(\Delta \otimes \Delta) = (\mu \otimes r)(1_\mathcal{L} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes 1_\mathcal{L})(\Delta \otimes \Delta)$.

Une structure tressée r sur $\mathcal{L}$ définit un tressage R sur $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$: pour $X = (V, \delta)$, $X' = (V', \delta')$ objets de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$,

$$R_{X,X'} = (r \otimes \sigma_{V,V'})(1_\mathcal{L} \otimes \sigma_{V,\mathcal{L}} \otimes 1_\mathcal{L})(\delta \otimes \delta').$$

Soit $\mathcal{L}$ une bigèbre tressée. Une *structure balancée sur* $\mathcal{L}$ est une forme linéaire coïnversible $\theta : \mathcal{L} \to k$ vérifiant :

— $(\theta \otimes 1_{\mathcal{L}})\Delta = (1_{\mathcal{L}} \otimes \theta)\Delta$;
— $\theta \circ \mu = (r \otimes r)(1_{\mathcal{L}} \otimes 1_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}})(1_{\mathcal{L}} \otimes \sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}} \otimes 1_{\mathcal{L}})(\Delta \otimes \Delta)(\theta \otimes 1_{\mathcal{L}} \otimes \theta \otimes 1_{\mathcal{L}})(\Delta \otimes \Delta)$.

Une structure balancée θ sur $\mathcal{L}$ définit sur $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ une structure balancée, encore notée θ : pour $X = (V, \delta)$, $\theta_X = (\theta \otimes 1_V)\delta$. Si $\mathcal{L}$ admet un antipode S et si $\theta S = \theta$, la structure balancée induite sur $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$ est compatible à la dualité, faisant de $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$ un tortil.

De plus, sur une bigèbre de Hopf tressée $\mathcal{L}$, les données d'une structure balancée θ ou d'une structure souveraine ϕ sont équivalentes. On passe de l'une à l'autre par la formule : $\theta = (\phi \otimes U)\Delta$, où $U = r\sigma_{\mathcal{L},\mathcal{L}}(I^2 \otimes 1_{\mathcal{L}})\Delta$. Cette bijection correspond à la bijection entre structures balancées et structures souveraines sur $\mathsf{prep}\,\mathcal{L}$ vue au **1.1.3.**

Définition. Soit $\mathcal{L}$ une bigèbre de Hopf, d'antipode S. Une *structure tortile sur* $\mathcal{L}$ est la donnée d'une structure tressée et d'une structure balancée θ telle que $\theta S = \theta$.

2.1.2. La construction de Faddeev-Reshetikhin-Takhtadjian. Soit N un entier naturel, et V le k-module k^N rapporté à sa base canonique $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$. Soit $\mathcal{R}$ un automorphisme du k-module $V \otimes V$.

On associe à $\mathcal{R}$ une k-bigèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$, construite comme suit. Soit $\mathsf{M}_N = k\langle a_{i,j} \rangle$ la k-algèbre des polynômes non commutatifs en des indéterminées $a_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq N$. C'est une k-bigèbre, le coproduit $\Delta : \mathsf{M}_N \to \mathsf{M}_N \otimes \mathsf{M}_N$ et la coünité $\varepsilon : \mathsf{M}_N \to k$ étant les morphismes d'algèbres définis par $\Delta(a_{i,j}) = \sum a_{i,k} \otimes a_{k,j}$ et $\varepsilon(a_{i,j}) = \delta_{i,j}$. De plus V est un M_N-comodule à gauche pour la coaction $\delta_0 : V \longrightarrow \mathsf{M}_N \otimes V$, $e_i \mapsto \sum a_{i,j} \otimes e_j$.

Notons A la matrice $((a_{i,j}))_{1 \leq i,j \leq N}$. L'idéal $\mathcal{I}_{\mathcal{R}}$ de M_N engendré par les coefficients de la matrice $\mathcal{R}(A \otimes A) - (A \otimes A)\mathcal{R}$ est aussi un coïdéal, et $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ est la k-bigèbre quotient $\mathsf{M}_N / \mathcal{I}_{\mathcal{R}}$. Par construction, V est un $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$-comodule à gauche, appelé *représentation fondamentale* et noté X, et $\mathcal{R}$ est un automorphisme du comodule $X \otimes X$. De plus $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ est universelle parmi les k-bigèbres munies d'une coaction à gauche sur V ayant cette propriété.

Si $\mathcal{R}$ vérifie l'équation de Yang-Baxter quantique :

$$(\mathcal{R} \otimes 1_V)(1_V \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes 1_V) = (1_V \otimes \mathcal{R})(\mathcal{R} \otimes 1_V)(1_V \otimes \mathcal{R}),$$

$\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ admet une structure tressée unique r telle que le tressage associé R sur $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ vérifie $R_{X,X} = \mathcal{R}$. Cette structure tressée est définie, sur les générateurs $a_{i,j}$, par la formule : $\mathcal{R}(e_i \otimes e_j) = \sum_{k,l} r(a_{i,k} \otimes a_{j,l})\, e_l \otimes e_k$.

2.1.3. Application à SL_N. Soit $s \in k^*$, et $q = s^2$. Soit $\mathcal{R}_s$ l'endomorphisme de $V \otimes V$ donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_s(e_i \otimes e_j) &= e_j \otimes e_i \quad \text{si } i < j, \\ \mathcal{R}_s(e_i \otimes e_j) &= e_j \otimes e_i + (s - s^{-1})\, e_i \otimes e_j \quad \text{si } i > j, \\ \mathcal{R}_s(e_i \otimes e_i) &= s\, e_i \otimes e_i. \end{aligned}$$

C'est un automorphisme vérifiant l'équation de Yang-Baxter quantique, ainsi que la *relation d'écheveau* :

$$\mathcal{R}_s - {\mathcal{R}_s}^{-1} = (s - s^{-1})\, 1_{V \otimes V} \ .$$

On note $\mathsf{M}_{N,s}$ la k-bigèbre $\mathcal{L}_{\mathcal{R}_s}$, et X sa représentation fondamentale. L'objet $T^\bullet X = \bigoplus X^{\otimes n}$ est une algèbre graduée dans $\mathsf{Rep}\,\mathsf{M}_{N,s}$. Soit S_s^2 le sous-module libre de $V \otimes V$

engendré par les éléments $e_i \otimes e_i$ $(1 \leq i \leq N)$ et $e_j \otimes e_i + s^{-1} e_i \otimes e_j$ $(1 \leq i < j \leq N)$. On vérifie que c'est un sous-comodule de $X \otimes X$ (si $s + s^{-1} \in k^*$, $S_s^2 = \mathsf{Ker}(\mathcal{R}_s - s\,1) = \mathsf{Im}(\mathcal{R}_s + s^{-1}\,1)$. Soit $S_s^\bullet$ l'idéal de $T^\bullet X$ engendré par S_s^2, qui est aussi un sous-comodule, et soit $\Lambda^\bullet$ l'algèbre quotient $T^\bullet X / S_s^\bullet$. Notons ξ_i l'image de e_i dans Λ_s^1.

Le k-module Λ_s^N est libre de rang 1, de base $\omega = \xi_1 \ldots \xi_N$. Il existe donc $D_s \in \mathsf{M}_{N,s}$ tel qu'on ait : $\delta\omega = D_s \otimes \omega$. Un simple calcul montre que :

$$D_s = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} (-s)^{-l(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} \ldots a_{N,\sigma(N)} \,.$$

Par construction, on a : $\Delta(D_s) = D_s \otimes D_s$, et $\varepsilon(D_s) = 1$, et on vérifie que D_s est central. L'idéal de $\mathsf{M}_{N,s}$ engendré par $D_s - 1$ est donc aussi un coïdéal.

Soit $\mathsf{SL}_{N,s}(k)$ la k-bigèbre quotient $\mathsf{M}_{N,s}/(D_s - 1)$. On montre que c'est une bigèbre de Hopf, dont l'antipode S vérifie : $S^2(a_{i,j}) = s^{2(j-i)} a_{i,j}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose : $[n]_s = \frac{s^n - s^{-n}}{s - s^{-1}}$. Si $n \geq 0$, $[n]_s = s^{n-1} + s^{n-3} + \cdots + s^{-n+1}$; on pose alors $[n]_s^! = [1]_s [2]_s \ldots [n]_s$.

2.1.4. Proposition. *Soit $u \in k$ tel que $u^N = s$. Il existe sur $\mathsf{SL}_{N,s}(k)$ une structure tortile unique faisant de $\mathsf{prep}\,\mathsf{SL}_{N,s}(k)$ un tortil où le tressage R et la structure balancée θ vérifient :*

$$R_{X,X} = u^{-1}\mathcal{R}_s \quad \textit{et} \quad \theta_X = u^{-1} s^N\, 1_X \ .$$

La dimension de X est alors $[N]_s$.

On note $\mathcal{V}_u(k)$ le k-tortil ainsi défini.

Démonstration. Étant donné $u \in k^*$, il existe sur $\mathsf{M}_{N,s}(k)$ un unique tressage r^u tel que le tressage associé R vérifie : $R_{X,X} = u^{-1}\mathcal{R}_s$; on l'obtient en normalisant le tressage canonique r : $r^u(a \otimes a') = u^{-dd'} r(a \otimes a')$ pour a, a' homogènes de degrés respectifs d, d'. Or on a $r(a_{i,j} \otimes D_s) = r(D_s \otimes a_{i,j}) = \delta_{i,j} s$. Il en s'ensuit que si $u^N = s$, r^u passe au quotient à $\mathsf{SL}_{N,s}$, d'où l'unique tressage sur $\mathsf{SL}_{N,s}$ tel que $R_{X,X} = u^{-1}\mathcal{R}_s$.

Soit $\phi : \mathsf{SL}_{N,s} \to k$ le morphisme d'algèbres défini par $a_{i,j} \mapsto \delta_{i,j} s^{2i-N-1}$. Il résulte de la formule $S^2(a_{i,j}) = s^{2(j-i)}$ que ϕ est une structure souveraine; soit θ la structure balancée correspondante (relativement au tressage r^u). On a $\theta = (\phi \otimes U)\Delta$, et $U(a_{i,j}) = \delta_{i,j} u^{-1} s^{2N-2i+1}$. On en déduit $\theta(a_{i,j}) = \delta_{i,j} u^{-1} s^N$, de sorte que $\theta_X = u^{-1} s^N$. On vérifie que $\theta S = \theta$, et $\mathsf{dim}\, X = [N]_s$. □

Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale et Y un objet de $\mathcal{C}$, on notera $\langle Y \rangle \subset \mathcal{C}$ la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathcal{C}$ dont les objets sont les facteurs directs de sommes finies de puissances tensorielles de Y.

2.1.5. Proposition. *Supposons $[N]_s^! \in k^*$; alors :*

1) l'objet unité est facteur direct de $X^{\otimes N}$ dans $\mathsf{prep}\,\mathsf{SL}_{N,s}(k)$;

2) pour $u \in k$ tel que $u^N = s$, la sous-catégorie pleine $\langle X \rangle \subset \mathcal{V}_u(k)$ est un sous-tortil.

DÉMONSTRATION.

1) Soit $p : X^{\otimes N} \to \Lambda_s^N$. la surjection canonique. D'autre part, on définit un morphisme de $\mathsf{M}_{N,s}$-comodules $a : \Lambda_s^N \to X^{\otimes N}$ par $a(\omega) = \omega_0 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-s)^{-l(\sigma)} e_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes e_{\sigma(N)}$. On a $p(\omega_0) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} (-s)^{-l(\sigma)} \xi_{\sigma(1)} \ldots \xi_{\sigma(N)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_N} q^{-l(\sigma)} \omega = s^{-N(N-1)/2} [N]_s^! \omega$, donc pa est la multiplication par le scalaire $s^{-N(N-1)/2}[N]_s^!$. Si $[N]_s^!$ est inversible, $1/[N]_s^! ap$ est un projecteur de $X^{\otimes N}$ d'image isomorphe à Λ_s^N dans $\mathsf{rep}\,\mathsf{M}_{N,s}$. L'objet unité de $\mathsf{prep}\,\mathsf{SL}_{N,s}(k)$, par construction isomorphe à Λ_s^N, est donc facteur direct de $X^{\otimes N}$.

2) La sous-catégorie $\langle X \rangle$ étant monoïdale pleine, reste à montrer qu'elle est autonome, c'est-à-dire qu'elle contient $X^\vee$; cela résulte de **1.1.5,** car X est scalaire et $\delta(X) = \theta_X^{-1} \dim(X) = us^{-N}[N]_s \in k^*$, donc $X^\vee$ est un facteur direct de $Z = X^{N-1}$. □

Si $[N]_s^! \in k^*$, on note $\mathcal{C}_u(k) = \langle X \rangle^{\mathsf{ss}}$; c'est un sous-tortil plein de $\mathcal{V}_u(k)^{\mathsf{ss}}$.

2.1.6. REMARQUE. Si k est un corps, $\mathcal{V}_u(k)$ est abélienne, et $\mathcal{V}_u(k)^{\mathsf{ss}}$ et $\mathcal{C}_u(k)$ sont abéliennes semi-simples. Les objets simples de $\mathcal{C}_u(k)$ sont les facteurs directs simples des $X^{\otimes n}$ dans $\mathcal{V}_u(k)^{\mathsf{ss}}$.

2.1.7. Rapport avec les algèbres de Hecke. En raison de la relation d'écheveau, il existe un unique k-foncteur monoïdal strict $F : k\mathbb{H}_s \longrightarrow \mathsf{prep}\,\mathsf{SL}_{N,s}(k)$ vérifiant $F([1]) = X$ et $F(g) = \mathcal{R}_s$. Pour $h \in k\mathbb{H}_q([n])$, la trace de $F(h)$ dans le tortil $\mathcal{V}_u(k)$ s'exprime au moyen de la trace de Markov τ^{μ_N}, pour $\mu_N = s^N/[N]_s$, par la formule :

$$\mathsf{tr}\, F(h) = [N]_s{}^n \tau^{\mu_N}(h) \, ;$$

en particulier cette trace ne dépend pas du choix de u (voir appendice, **A.1.2**).

2.2. On travaille désormais sur $\mathbb{C}$. Soit $s \in \mathbb{C}^*$, $q = s^2$, $u \in \mathbb{C}$ tel que $u^N = s$; on pose $\mathcal{C}_u = \mathcal{C}_u(\mathbb{C})$. Notons $O(q) = \inf\{n > 0 \mid 1 + q + \cdots + q^{n-1} = 0\}$. Si q est une racine de l'unité autre que 1, $O(q)$ est l'ordre de cette racine; dans le cas contraire, $O(q) = +\infty$.

Si $O(q) = +\infty$, $\mathcal{V}_u(\mathbb{C})$ est semi-simple et admet une infinité d'objets simples; chacun de ces objets simples est facteur direct d'une puissance tensorielle de X. On a donc alors $\mathcal{C}_u = \mathcal{V}_u(\mathbb{C})$.

Supposons désormais $N < O(q) < +\infty$, et posons $l = O(q)$. Alors $\mathcal{V}_u(\mathbb{C})$ n'est ni semi-simple, ni engendrée par X.

2.2.1. Proposition. *Si q est d'ordre fini $l > N$, $\mathcal{C}_u$ est une $\mathbb{C}$-catégorie prémodulaire, monoïdalement équivalente à la catégorie $\mathcal{C}_{(q)}^{\mathsf{tilt}}(\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C}))$.*

DÉMONSTRATION. On sait déjà que $\mathcal{C}_u = \langle X \rangle^{\mathsf{ss}}$ est une catégorie abélienne semi-simple.

D'autre part, H. H. Andersen construit dans [**1**], au moyen des 'tilting modules', une $\mathbb{C}$-catégorie monoïdale abélienne semi-simple $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}} = \mathcal{C}_{(q)}^{\mathsf{tilt}}(\mathfrak{sl}_N(\mathbb{C}))$ ayant un nombre fini d'objets simples. Soit $U = U_q\mathfrak{sl}_N$, $\mathsf{mod}\, U$ la catégorie des U-modules de dimension finie, et C la première alcove dominante. Alors $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathsf{mod}\, U$ des sommes directes finies de modules simples de la forme $V(\lambda)$, $\lambda \in C$.

Or $\mathsf{mod}\, U$ s'identifie à $\mathsf{rep}\,\mathsf{SL}_{N,s}$, car $\mathsf{SL}_{N,s}$ est le dual restreint de U. Via cette identification, tout $V(\lambda)$ ($\lambda \in C$) est facteur direct d'un $X^{\otimes n}$, donc $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}} \subset \langle X \rangle$; d'où un $\mathbb{C}$-foncteur plein $F : \mathcal{C}^{\mathsf{tilt}} \to \langle X \rangle^{\mathsf{ss}} = \mathcal{C}_u$. Pour $\lambda \in C$, $\dim V(\lambda) \neq 0$; donc tout morphisme négligeable de $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}$ est nul. Ainsi, F est fidèle. Enfin, tout objet de $\langle X \rangle$ s'écrit $Y \oplus Z$, avec $Y \in \mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}$ et Z négligeable, donc F est une équivalence, monoïdale par définition du produit tensoriel 'restreint' sur $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}$. Par conséquent $\mathcal{C}_u$ est prémodulaire, ses objets simples étant indexés par C, donc en nombre fini. □

Supposons q d'ordre l, $N < l < +\infty$, et soit $K = l - N$. Alors $\mathcal{C}_u$ est modulaire si et seulement si u^{2l} est une racine de l'unité d'ordre N ([**4**]). En général, tout élément de $M_{\mathcal{C}_u}$ est inversible, et $M_{\mathcal{C}_u}$ opère librement sur $\Lambda_{\mathcal{C}_u}$ (voir **3.3.8**). L'invariant de Turaev-Viro $TV_{\mathcal{C}_u}$ est défini (*i. e.* $\widetilde{\Delta}_{\mathcal{C}_u} \neq 0$) sauf dans les cas suivants : N pair, K impair et l'ordre de u est congru à 2 modulo 4 (resp. impair) si s est d'ordre $2l$ (resp. l) ([**4**] et **3.3.6**).

D'autre part, $\mathcal{C}_u$ est $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ graduée. Notons $\mathcal{D}_u$ sa partie de degré 0, c'est-à-dire la sous-catégorie pleine $\langle X^{\otimes N} \rangle \subset \mathcal{C}_u$. C'est une catégorie prémodulaire 'de type PGL'. Elle est modulaire si et seulement si $K \wedge N = 1$. Tout élément de $M_{\mathcal{D}_u}$ est inversible, mais l'action de ce groupe sur $\Lambda_{\mathcal{D}_u}$ n'est libre que dans le cas modulaire. L'invariant $TV_{\mathcal{D}_u}$ est défini sauf lorsque N, K sont pairs de même valuation dyadique (voir [**4**]).

Nous allons montrer que ces catégories prémodulaires sont définies sur un certain sous-anneau de $\mathbb{C}$, ce qui entraînera l'intégralité des invariants de Turaev-Viro associés (lorsqu'ils existent) pour l premier.

Soit $\mathcal{J}^{(N)}$ l'idéal de $\mathbb{CH}(s)$ des morphismes négligeables pour la trace τ^{μ_N}.

2.2.2. Proposition. *Le foncteur $\mathbb{CH}(s) \to \mathcal{C}_u$ se factorise à travers l'idéal $\mathcal{J}^{(N)}$, induisant pour tout $n \in \mathbb{N}$ un isomorphisme*

$$\mathbb{CH}(s)_n / \mathcal{J}_n^{(N)} \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathcal{C}_u}(X^{\otimes n}) .$$

DÉMONSTRATION.

Soit $\mathcal{I}_n$ le noyau du morphisme $\mathbb{CH}(s)_n \to \mathsf{End}_{\mathcal{C}_u}(X^{\otimes n})$. Tout morphisme négligeable de $\mathcal{C}_u$ est nul, car $\mathcal{C}_u$ est prémodulaire (**1.5.2** et **2.2.1**). On en déduit par **2.1.7** l'inclusion $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{J}_n^{(N)}$. Soit $A = \mathbb{CH}(s)/\mathcal{J}^{(N)}$. D'une part, $\mathbb{CH}(s)_n/\mathcal{I}_n \hookrightarrow \mathsf{End}_{\mathcal{C}_u}(X^{\otimes n})$, et d'autre part, $\mathbb{CH}(s)_n/\mathcal{I}_n \twoheadrightarrow A_n$. Il suffit donc pour conclure de montrer que A_n et $\mathsf{End}_{\mathcal{C}_u}(X^{\otimes n})$ ont même dimension. Or il résulte de **A.2** (avec les notations de l'appendice) que dans $\widetilde{A}$, l'objet $[n]$ admet la décomposition

$$[n] = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} V_\lambda^{\mathsf{card}(T_\lambda)} ,$$

les $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_n}$ étant des objets simples deux à deux non isomorphes. D'autre part, l'objet $X^{\otimes n}$ admet une décomposition semblable dans $\mathcal{C}^{\mathsf{tilt}}$, où les facteurs simples apparaissent avec les mêmes multiplicités. Ainsi $\dim A_n = \dim \mathsf{End}_{\mathcal{C}_u}(X^{\otimes n}) = \sum_{\lambda \in \Lambda_n} \mathsf{card}(\Lambda_n)^2$, d'où la proposition. □

2.2.3. Théorème. *Soit k un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant u. Alors :*

1) si $[N]_s^!$ est inversible dans k, il existe un foncteur fidèle canonique $\mathcal{C}_u(k) \to \mathcal{C}_u(\mathbb{C})$, induisant un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{C}_u(k) \otimes_k \mathbb{C} \to \mathcal{C}_u(\mathbb{C}) ;$$

2) si $[l-1]_s^!$ est inversible dans k, $\mathcal{C}_u(k)$ est une k-catégorie prémodulaire, et le foncteur $\mathcal{C}_u(k) \otimes_k \mathbb{C} \to \mathcal{C}_u(\mathbb{C})$ est une équivalence.

DÉMONSTRATION.

1) On utilisera le résultat suivant.

2.2.4. Lemme. *Soit k un anneau commutatif, et C une k-cogèbre. On note $\mathcal{V}(C,k)$ la k-catégorie des C-comodules à gauche dont le k-module sous-jacent est projectif de type fini. Soit L une k-algèbre commutative, et C_L la L-cogèbre $C\otimes_k L$.*

Si L ou C est plat sur k, le foncteur naturel :

$$H : \mathcal{V}(C,k)\otimes_k L \to \mathcal{V}(C_L, L)$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. Notons $?_L$ le foncteur monoïdal $?\otimes_k L : \mathsf{Mod}(k)\to\mathsf{Mod}(L)$. Soient $X=(V,\delta)$, $Y=(W,\delta')$ deux objets de $\mathcal{V}(C,k)$. On a $H(X)=(V_L,\delta_L)$, $H(Y)=(W_L,\delta'_L)$, et il s'agit de montrer que l'application L-linéaire

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{V}(C,k)}(X,Y)\otimes_k L\to \mathsf{Hom}_{\mathcal{V}(C_L,L)}(H(X),H(Y))$$

induite par H est bijective. Or, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{V}(C,k)}(X,Y)$ est par définition le noyau de

$$\begin{gathered} d:\mathsf{Hom}_k(V,W)\longrightarrow \mathsf{Hom}_k(V,C\otimes_k W),\\ u\mapsto (1_C\otimes_k u)\delta-\delta' u\,. \end{gathered}$$

Puisque V est projectif de type fini, $\mathsf{Hom}_L(V_L,W_L)$ (resp. $\mathsf{Hom}_L(V_L,C_L\otimes_L W_L)$) s'identifie à $\mathsf{Hom}_k(V,W)_L$ (resp. $\mathsf{Hom}_k(V,C\otimes_k W)_L$), et $\mathsf{Hom}_{\mathcal{V}(C_L,L)}(H(X),H(Y))$, à $\mathsf{Ker}(d_L)$. Si L est plat sur k, la flèche $\mathsf{Ker}(d)_L\to\mathsf{Ker}(d_L)$ est un isomorphisme; de même si C est plat sur k, $\mathsf{Hom}_k(V,C\otimes_k W)$ étant alors plat sur k. $\square$

Puisque $\mathsf{SL}_{N,s}(k)\otimes_k\mathbb{C}\simeq\mathsf{SL}_{N,s}(\mathbb{C})$, le foncteur naturel $H:\mathcal{V}_u(k)\otimes_k\mathbb{C}\to\mathcal{V}_u(\mathbb{C})$, pleinement fidèle d'après le lemme, induit un foncteur pleinement fidèle

$$H^{\mathsf{ss}}:(\mathcal{V}_u(k)\otimes_k\mathbb{C})^{\mathsf{ss}}\to\mathcal{V}_u(\mathbb{C})^{\mathsf{ss}}\,.$$

Puisque par **1.4.1**, $(\mathcal{V}_u(k)\otimes_k\mathbb{C})^{\mathsf{ss}}$ s'identifie à $\mathcal{V}_u(k)^{\mathsf{ss}}\otimes_k\mathbb{C}$, on peut voir H^{ss} comme un foncteur pleinement fidèle $\mathcal{V}_u(k)^{\mathsf{ss}}\otimes_k\mathbb{C}\to\mathcal{V}_u(\mathbb{C})^{\mathsf{ss}}$, d'où par restriction un foncteur pleinement fidèle

$$\mathcal{C}_u(k)\otimes_k\mathbb{C}\to\mathcal{C}_u(\mathbb{C})\,.$$

Le foncteur $\mathcal{C}_u(k)\to\mathcal{C}_u(\mathbb{C})$ qui s'en déduit est fidèle, car son noyau est un $\otimes$-idéal propre, donc nul par **1.5.1.**

2) Tout objet simple de $\mathcal{C}_u$ est facteur direct de $X^{\otimes n}$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. Il résulte de **2.2.2** et de l'appendice (**A.4.1**) que $X^{\otimes n}=\bigoplus_{t\in T_n}V_t$, où V_t est l'image d'un projecteur $\pi_t\in A_n$; de plus π_t est combinaison linéaire de tresses à coefficients dans k, et appartient donc à $\mathcal{C}_u(k)$. Soit W_t l'image de π_t dans $\mathcal{C}_u(k)$; V_t est l'image de W_t par le foncteur $\mathcal{C}_u(k)\hookrightarrow\mathcal{C}_u(\mathbb{C})$. Le foncteur $\mathcal{C}_u(k)\otimes_k\mathbb{C}\to\mathcal{C}_u(\mathbb{C})$ est donc essentiellement surjectif, et puisqu'il est pleinement fidèle, c'est une équivalence.

Reste à montrer que $\mathcal{C}_u(k)$ est libre en tant que k-catégorie additive karoubienne. Dans $\mathcal{C}_u(k)$, tout objet est facteur direct d'une somme de puissances tensorielles de X, et $X^{\otimes n}=\bigoplus W_t$, $t\in T_n$. Il suffit donc de montrer

(i) $\mathsf{End}(W_t)=k$,

(ii) $\mathsf{Hom}(W_s,W_t)=0$ si $V_s\not\simeq V_t$;

(iii) $W_s\simeq W_t$ si $V_s\simeq V_t$.

L'assertion (ii) résulte de la fidélité de $\mathcal{C}_u(k) \to \mathcal{C}_u(\mathbb{C})$. L'assertion (i) repose sur le fait que $\mathsf{dim}\, V_t \in k^*$ (voir **3.3.4**). Soit $\phi \in \mathsf{End}(W_t)$; l'image de ϕ dans $\mathsf{End}(V_t)$ est un complexe z. On a $\mathsf{tr}(\phi) = z\,\mathsf{dim}\, V_t \in k$, donc $z \in k$, et $\phi = z$ par fidélité. L'assertion (iii) résulte de **A.4.1.** Supposons $V_s \simeq V_t$, et regardons d'abord le cas où $|s| = |t| = n$. Il existe alors un isomorphisme $V_s \xrightarrow{\sim} V_t$ donné par une combinaison linéaire de tresses à coefficients dans k, ainsi que son inverse. Ces morphismes appartiennent à $\mathcal{C}_u(k)$, donc $W_s \simeq W_t$. En général, $|s| \equiv |t|$ mod. N. Or pour $s \in T_n$, il existe un tableau $s(1) \in T_{n+N}$ tel que $\pi_{s(1)} = \pi_{1^N} \otimes \pi_s$ (remarque **A.2.1**). Alors $W_{s(1)} \simeq W_s$, ce qui permet de se ramener au cas $|s| = |t|$. $\square$

2.2.5. Corollaire. *Les catégories prémodulaires $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{D}_u$ sont définies sur le sous-anneau $k = \mathbb{Z}[u, 1/[l-1]_s^!] \subset \mathbb{C}$. Si l'invariant $TV_{\mathcal{C}_u}$ est défini, il prend ses valeurs dans k. Il en va de même de $TV_{\mathcal{D}_u}$ si $K \wedge N = 1$.*

En particulier pour l premier, $TV_{\mathcal{C}_u}$ et $TV_{\mathcal{D}_u}$ prennent leurs valeurs dans les entiers cyclotomiques (plus précisément, dans $\mathbb{Z}[u]$).

DÉMONSTRATION. Il résulte du théorème **2.2.3** que $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{D}_u$ sont définis sur k. D'autre part, $M_{\mathcal{C}_u}$ est formé d'objets inversibles et son action sur l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples est libre (voir **3.3.8**); il en va de même de $\mathcal{D}_u$ si $K \wedge N = 1$, $M_{\mathcal{D}_u}$ étant alors trivial. On conclut par le théorème **1.6.6.** $\square$

3. Sur une construction de Kazhdan-Wenzl

3.1. Le cadre général

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, qu'on supposera stricte pour fixer les idées, et S un objet de $\mathcal{C}$. À partir de ces données, on se propose de construire une catégorie monoïdale $\mathcal{D}$ et un foncteur monoïdal $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$, de sorte que l'image de S soit isomorphe à l'objet unité. On utilise pour cela un procédé dû à Kazhdan et Wenzl (*cf.* [**8**]).

On définit tout d'abord une catégorie $\mathcal{D}$ comme suit. Les objets de $\mathcal{D}$ sont ceux de $\mathcal{C}$. Pour X objet de $\mathcal{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$X(n) = X \otimes S^{\otimes n}\,.$$

Soient X, $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$. Pour $m, n \in \mathbb{N}$, notons $\mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y) = \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X(m), Y(n))$. Alors :

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y) = \varinjlim_m \coprod_n \mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y)\,,$$

les flèches du système inductif étant définies par les applications $\phi \mapsto \phi(1) = \phi \otimes 1_S$ de $\mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y)$ vers $\mathsf{Hom}^{m+1,n+1}(X,Y)$. Pour $\phi \in \mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y)$, on note $\overline{\phi}$ l'image de ϕ dans $\mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$. La composition des flèches de $\mathcal{D}$ est donnée par $\overline{\psi} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi\phi}$ pour $\phi \in \mathsf{Hom}^{n,m}(X,Y)$ et $\psi \in \mathsf{Hom}^{m,l}(Y,Z)$.

Soit $F_0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ le foncteur donné, sur les objets, par l'identité, et sur les flèches, par l'application canonique $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$. Pour tout objet X, l'identité de $X \otimes S$, vue comme élément de $\mathsf{Hom}^{1,0}(X, X \otimes S)$ (resp. de $\mathsf{Hom}^{0,1}(X \otimes S, X)$), définit dans $\mathcal{D}$ un morphisme $\alpha_X : X \longrightarrow X \otimes S$ (resp. $\beta_X : X \otimes S \longrightarrow X$); les morphismes α_X et β_X sont inverses l'un de l'autre. En particulier, $a = \alpha_I$ est un isomorphisme $F_0(I) \xrightarrow{\sim} F_0(S)$. En outre, tout morphisme de $\mathcal{D}$ est composé d'un nombre fini de morphismes de la forme $F_0(f)$ (pour f morphisme de $\mathcal{C}$) ou de la forme $\alpha_X^{\pm 1}$ (pour X objet de $\mathcal{C}$).

On ne sait pas, en toute généralité, munir $\mathcal{D}$ d'une structure monoïdale; mais cela devient possible dans un cadre tressé, moyennant des hypothèses raisonnables sur S.

3.1.1. Proposition. *Supposons $\mathcal{C}$ munie d'un tressage R tel que S soit transparent, et $R_{S,S} = 1_{S\otimes S}$.*

Alors il existe sur $\mathcal{D}$ une structure monoïdale tressée unique $(\mathcal{D}, \otimes', I, R')$ telle que F_0 soit un foncteur monoïdal strict tressé, et qu'on ait : $1_X \otimes' a = \alpha_X$ pour $X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{D}$.

Démonstration. Pour alléger les notations, posons $\rho_X = R_{S,X} : S \otimes X \to X \otimes S$, et plus généralement, pour $n \in \mathbb{N}$, $\rho_X^{(n)} = R_{S^{\otimes n},X} : S^{\otimes n} \otimes X \to X \otimes S^{\otimes n}$.

1) Unicité. Supposons donnée une telle structure. Puisque F_0 est tressé, on a pour X, $Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$: $R'_{X,Y} = F_0(R_{X,Y})$; et ceci caractérise R'. Par ailleurs, $\otimes'$ coïncide avec $\otimes$ sur les objets. Pour f, g flèches de $\mathcal{C}$, on a : $F_0(f) \otimes' F_0(g) = F_0(f \otimes g)$. D'autre part, $1_X \otimes' a = \alpha_X$ par hypothèse; et par fonctorialité de R', $R'_{S,X}(a \otimes' 1_X) = (1_X \otimes' a)R'_{I,X} = 1_X \otimes' a$. Ainsi, $a \otimes' 1_X = F_0(R_{S,X})^{-1}(1_X \otimes' a) = F_0(\rho_X^{-1})\alpha_X$. Ceci caractérise $\otimes'$ sur les flèches, car les $F_0(f)$ $(f \in \mathsf{Fl}\,\mathcal{C})$ et $a^{\pm 1}$ engendrent monoïdalement $\mathcal{D}$.

2) Existence. On définit un produit tensoriel $\otimes'$ sur $\mathcal{D}$: sur les objets, c'est celui de $\mathcal{C}$; sur les flèches, on procède comme suit. Pour $\phi \in \mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y)$ et $\phi' \in \mathsf{Hom}^{m',n'}(X',Y')$, on définit $\phi \otimes' \phi' \in \mathsf{Hom}^{m+m',n+n'}(X \otimes X', Y \otimes Y')$ par la formule :

$$\phi \otimes' \phi' = (1_Y \otimes \rho_{Y'}^{(n)} \otimes 1_{S^{\otimes n'}})(\phi \otimes \phi')(1_X \otimes \rho_{X'}^{(m)} \otimes 1_{S^{\otimes m'}})^{-1}.$$

Il est clair que, R étant un tressage, le produit $\otimes'$ ainsi défini est associatif; il est compatible aux compositions, et $1_I \in \mathsf{Hom}^{0,0}(I,I)$ est neutre pour $\otimes'$. Reste à montrer la compatibilité de $\otimes'$ aux flèches $\mathsf{Hom}^{m,n} \longrightarrow \mathsf{Hom}^{m+1,n+1}$, $\phi \mapsto \phi(1) = \phi \otimes 1_S$. Cette compatibilité s'exprime par les relations suivantes :

$$\phi(1) \otimes' \phi' = \phi \otimes' \phi'(1) = (\phi \otimes' \phi')(1).$$

3.1.2. Lemme. *Si $\phi \in \mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y)$, $\phi(1) = \phi \otimes' \sigma = \sigma \otimes' \phi$, où $\sigma = (1_I)(1)$.*

Démonstration. La première égalité est évidente; pour la seconde, on remarque que la condition $\rho_S = R_{S,S} = 1_{S\otimes S}$ entraîne : $\rho_{X(n)} = \rho_X \otimes 1_{S^{\otimes n}}$. On a donc : $\sigma \otimes' \phi = \rho_{Y(n)}(1_S \otimes \phi)\rho_{X(m)}^{-1} = \phi \otimes 1_S$ par fonctorialité de ρ. □

Les relations de compatibilité résultent immédiatement du lemme et de l'associativité de $\otimes'$. Ainsi, $\otimes'$ induit par passage à la limite un foncteur $\mathcal{D} \otimes \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$, qu'on note encore $\otimes'$; par construction, $(\mathcal{D}, \otimes', I)$ est une catégorie monoïdale stricte et F_0 un foncteur monoïdal strict; de plus, on a bien $1_X \otimes' a = \alpha_X$. □

On notera $\mathsf{KW}(\mathcal{C}, S)$ la catégorie monoïdale tressée $\mathcal{D}$ ainsi définie; elle est munie d'un foncteur monoïdal strict $F_0 : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{KW}(\mathcal{C}, S)$ et d'un isomorphisme $a : I \xrightarrow{\sim} F_0(S)$. De plus, elle vérifie la propriété universelle suivante.

3.1.3. Théorème. *Étant donnés une catégorie monoïdale (stricte) tressée $\mathcal{E}$, un foncteur monoïdal tressé $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ et un isomorphisme $c : G(I) \xrightarrow{\sim} G(S)$ dans $\mathcal{E}$, il existe un unique foncteur monoïdal $\overline{G} : \mathsf{KW}(\mathcal{C}, S) \longrightarrow \mathcal{E}$ tel que $G = \overline{G} \circ F_0$ et $\overline{G}(a) = c$. De plus, $\overline{G}$ est tressé.*

DÉMONSTRATION. Notons Φ_2 (resp. Φ_0) la contrainte de compatibilité de G aux produits tensoriels (resp. aux unités).

1) Unicité. Supposons donné un tel foncteur $\overline{G}$, et soit $\overline{\Phi}_2$ (resp. $\overline{\Phi}_0$) la contrainte de compatibilité de $\overline{G}$ aux produits tensoriels (resp. aux unités). Par hypothèse, $\overline{G}F_0 = G$. Ainsi pour X, $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{D}) = \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, on a $\overline{G}(X) = G(X)$, $\overline{\Phi}_{2X,Y} = \Phi_{2X,Y}$ donc $\overline{\Phi}_2 = \Phi_2$; et d'autre part $\overline{\Phi}_0 = \Phi_0$. Enfin, pour f flèche de $\mathcal{C}$, $\overline{G}(F_0(f)) = G(f)$, et $\overline{G}(a) = c$. Pour $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, posons

$$\gamma_X = \Phi_{2X,S}(1_{G(X)} \otimes c)\Phi_{2X,I}^{-1} : G(X) \longrightarrow G(X(1)) .$$

Par fonctorialité de $\overline{\Phi}_2$, on a : $\overline{G}(\alpha_X) = \overline{G}(1_X \otimes a) = \gamma_X$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons :

$$\alpha_X^{(n)} = \alpha_{X(n-1)} \dots \alpha_{X(1)}\alpha_X : X \longrightarrow X(n) ,$$
$$\gamma_X^{(n)} = \gamma_{X(n-1)} \dots \gamma_{X(1)}\gamma_X : G(X) \longrightarrow G(X(n)) .$$

Alors $\overline{G}(\alpha_X^{(n)}) = \gamma_X^{(n)}$. Or tout $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ s'écrit $\overline{\phi}$, pour $\phi \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)^{m,n}$. Autrement dit,

$$f = {\alpha_Y^{(n)}}^{-1} F_0(\phi)\alpha_X^{(m)} ;$$

on a donc

$$\overline{G}(f) = {\gamma_Y^{(n)}}^{-1} G(\phi)\gamma_X^{(m)} ,$$

ce qui caractérise $\overline{G}$ sur les flèches.

2) Existence. Posons $\overline{G}(X) = G(X)$ pour $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\overline{\Phi}_2 = \Phi_2$ et $\overline{\Phi}_0 = \Phi_0$. Si $f \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{D}}(X,Y)$ s'écrit $f = \overline{\phi}$, avec $\phi \in \mathsf{Hom}^{m,n}(X,Y)$, on pose

$$\overline{G}(f) = {\gamma_Y^{(n)}}^{-1} G(\phi)\gamma_X^{(m)} .$$

Pour s'assurer de la cohérence de cette définition, il suffit de vérifier que la valeur ainsi assignée à $\overline{G}(f)$ ne change pas lorsqu'on remplace ϕ par $\phi(1) = \phi \otimes 1_S$. Ceci revient à montrer que pour $g \in \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$,

$$G(g \otimes 1_S) = \gamma_Y G(g \otimes 1_S){\gamma_X}^{-1} ,$$

formule qui résulte de la fonctorialité de Φ_2.

On a donc construit un foncteur $\overline{G}$, et il reste à démontrer la fonctorialité de $\overline{\Phi}_2$.

a) En la seconde variable : en raison de la fonctorialité de Φ_2 et du fait que les morphismes $F_0(f)$ ($f \in \mathsf{Fl}(\mathcal{C})$) et $1_X \otimes a^{\pm}$ engendrent $\mathcal{D}$, cela se ramène à vérifier :

$$\Phi_{2X,Y\otimes S}(1_{G(X)} \otimes \overline{G}(1_Y \otimes a)) = \overline{G}(1_X \otimes 1_Y \otimes a)\Phi_{2X,Y} .$$

Pour $Y = I$, c'est vrai parce qu'on a précisément posé $\overline{G}(1_X \otimes a) = \gamma_X$, et $\overline{G}(a) = c$.

Dans le cas général, il s'agit de montrer la commutativité du carré central du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
G(X)\otimes G(Y)\otimes G(I) \arrow[rrr, "\Phi_{2\,X,Y}\otimes 1_{G(I)}"] \arrow[dr, "1_{G(X)}\otimes\Phi_{2\,Y,I}"] \arrow[ddd, "1_{G(X)\otimes G(Y)}\otimes c"'] & & & G(X\otimes Y)\otimes G(I) \arrow[dl, "\Phi_{2\,X\otimes Y,I}"'] \arrow[ddd, "1_{G(X\otimes Y)}\otimes c"] \\
& G(X)\otimes G(Y) \arrow[r, "\Phi_{2\,X,Y}"] \arrow[d, "1_{G(X)}\otimes\gamma_Y"'] & G(X\otimes Y) \arrow[d, "\gamma_{X\otimes Y}"] & \\
& G(X)\otimes G(Y\otimes S) \arrow[r, "\Phi_{2\,X,Y\otimes S}"'] & G(X\otimes Y\otimes S) & \\
G(X)\otimes G(Y)\otimes G(S) \arrow[rrr, "\Phi_{2\,X,Y}\otimes 1_{G(S)}"'] \arrow[ur, "1_{G(X)}\otimes\Phi_{2\,Y,S}"'] & & & G(X\otimes Y)\otimes G(S) \arrow[ul, "\Phi_{2\,X\otimes Y,S}"]
\end{tikzcd}$$

qui résulte de celle du carré extérieur, du carré de droite et de gauche (définition de γ), du haut et du bas (G est monoïdal).

b) En la première variable, on se ramène par un raisonnement similaire à celui de a) à vérifier :

$$\overline{G}(a\otimes 1_X)\Phi_{2\,I,X} = \Phi_{2\,S,X}(c\otimes 1_{G(X)})\,.$$

Dans le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
G(X)\otimes G(I) \arrow[rrr, "\Phi_{2\,X,I}"] \arrow[dr, "R''_{X,I}"] \arrow[ddd, "1_{G(X)}\otimes c"'] & & & G(X) \arrow[dl, "G(R_{X,I})=1_{G(X)}"'] \arrow[ddd, "\overline{G}(1_X\otimes a)=\gamma_X"] \\
& G(I)\otimes G(X) \arrow[r, "\Phi_{2\,I,X}"] \arrow[d, "c\otimes 1_{G(X)}"'] & G(X) \arrow[d, "\overline{G}(a\otimes 1_X)"] & \\
& G(S)\otimes G(X) \arrow[r, "\Phi_{2\,S,X}"'] & G(S\otimes X) & \\
G(X)\otimes G(S) \arrow[rrr, "\Phi_{2\,X,S}"'] \arrow[ur, "R''_{G(X),G(S)}"'] & & & G(X\otimes S) \arrow[ul, "G(R_{X,S})"]
\end{tikzcd}$$

(où R'' est le tressage de $\mathcal{E}$) les carrés du haut et du bas sont commutatifs (G est tressé), ainsi que celui de gauche (R'' est fonctoriel) et de droite (car $a\otimes 1_X = R^{-1}_{S,X}(1_X\otimes a)$). Puisque le carré extérieur commute (définition de γ_X), il en va de même du carré intérieur.

Le fait que $\overline{G}$ soit monoïdal tressé s'exprime par des conditions sur Φ_2, Φ_0 et R qui sont les mêmes que pour G. $\square$

3.1.4. Remarques. Il est clair que, pour construire la structure monoïdale sur $\mathcal{D}$, on n'a pas véritablement besoin du tressage R : seul intervient $R_{S,X}$. Afin de préciser ce point, appelons *S-tressage de $\mathcal{C}$* tout isomorphisme fonctoriel $\rho_X : S\otimes X \xrightarrow{\sim} X\otimes S$ vérifiant :

(a) $\rho_{X\otimes Y} = (1_X\otimes\rho_Y)(\rho_X\otimes 1_Y)$,

(b) $\rho_I = 1_I$.

La donnée d'un S-tressage ρ tel que $\rho_S = 1_{S\otimes S}$ permet de munir $\mathcal{D}$ d'une structure monoïdale stricte $\mathsf{KW}(\mathcal{C},S)$, de manière en tout point analogue à ce nous avons fait avec un tressage. Dans ce cadre, le théorème **3.1.3** prend la forme suivante.

Soit $\mathcal{E}$ une catégorie monoïdale (stricte), G un foncteur monoïdal $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$, et c un isomorphisme $G(I) \xrightarrow{\sim} G(S)$ dans $\mathcal{E}$. On dira que c est *compatible à* G si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, l'isomorphisme $G(S \otimes X) \xrightarrow{\sim} G(X \otimes S)$ obtenu par composition des flèches

$$G(S\otimes X)\simeq G(S)\otimes G(X)\xrightarrow{c^{-1}\otimes 1}G(I)\otimes G(X)\simeq G(X)\simeq G(X)\otimes G(I)\xrightarrow{1\otimes c}G(X)\otimes G(S)\simeq G(X\otimes S)$$

coïncide avec $G(\rho_X)$.

Avec ces données, il existe un foncteur monoïdal $\overline{G} : \mathsf{KW}(\mathcal{C}, S) \to \mathcal{E}$ tel que $\overline{G}F_0 = G$ et $\overline{G}(a) = c$ si et seulement si c est compatible à G, et un tel $\overline{G}$, s'il existe, est unique.

Tous les résultats de ce paragraphe s'adaptent immédiatement aux k-catégories; c'est d'ailleurs dans ce cadre que nous les utiliserons.

Ainsi, soit $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale tressée stricte, et S un objet transparent de $\mathcal{C}$ vérifiant $R_{S,S} = 1_{S\otimes S}$.

On construit comme ci-dessus une catégorie k-monoïdale tressée stricte $\mathsf{KW}(\mathcal{C}, S)$, un k-foncteur monoïdal strict $F_0 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, et un isomorphisme $a : F_0(I) \xrightarrow{\sim} F_0(S)$. Les objets de $\mathsf{KW}(\mathcal{C}, S)$ sont ceux de $\mathcal{C}$, et pour X, Y objets de $\mathcal{C}$,

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{KW}(\mathcal{C},S)}(X,Y) = \varinjlim_{m} \bigoplus_{n} \mathsf{Hom}(X(m), Y(n)) .$$

En particulier, il ne suffit pas que $\mathcal{C}$ soit une k-catégorie monoïdale pure pour que $\mathsf{KW}(\mathcal{C}, S)$ le soit.

3.2. Applications

À toute k-catégorie monoïdale stricte $\mathcal{C}$ et tout objet X de $\mathcal{C}$, on peut associer une k-algèbre monoïdale A définie par $A_n = \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$, le produit tensoriel $A_n \times A_m \to A_{n+m}$ étant celui de $\mathcal{C}$. Le foncteur fidèle

$$F : A \longrightarrow \mathcal{C}$$

défini, sur les objets, par $[n] \mapsto X^{\otimes n}$, et sur les flèches, par l'identité, est un k-foncteur monoïdal strict. De plus la donnée d'un tressage sur $\mathcal{C}$ définit un tressage sur A faisant de F un foncteur monoïdal tressé.

Dans quelle mesure peut-on reconstruire $\mathcal{C}$ à partir de la k-algèbre monoïdale ainsi définie? Ce n'est possible que moyennant certaines hypothèses.

3.2.1. Définitions. Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie monoïdale. Un objet X de $\mathcal{C}$ est un *générateur de* $\mathcal{C}$ si tout objet de $\mathcal{C}$ est facteur direct d'une somme directe finie de puissances tensorielles de X, *i. e.* $\langle X \rangle = \mathcal{C}$ (cette terminologie n'est pas standard). On dit que X est *de type* N, N entier > 0, s'il vérifie :

— $\mathsf{Hom}(X^{\otimes m}, X^{\otimes n}) = 0$ pour m non congru à n modulo N;
— I est facteur direct de $X^{\otimes N}$.

3.2.2. Définition. Soit A une k-algèbre monoïdale tressée. On appellera *projecteur de type* N *de* A tout projecteur $\pi \in A_N$ vérifiant :

— $R_{N,1}(\pi \otimes 1_1) = R^{-1}_{1,N}(\pi \otimes 1_1)$ et $R_{N,N}(\pi \otimes \pi) = \pi \otimes \pi$;
— pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $A_n \to A_{n+N}$, $f \mapsto f \otimes \pi$, est injective, d'image $\{g \in A_{n+N} \mid (1_n \otimes \pi)g = g = g(1_n \otimes \pi)\}$.

Ces deux conditions se lisent plus aisément dans $\widetilde{A}$: posant $S = \mathsf{Im}(\pi)$, la première signifie que S est transparent et $R_{S,S} = 1_{S\otimes S}$; la seconde, que le foncteur $? \otimes S \ : \widetilde{A} \to \widetilde{A}$ est pleinement fidèle.

Nous allons maintenant montrer que la donnée d'une k-algèbre monoïdale tressée A munie d'un projecteur π de type N est équivalente à la donnée d'une k-catégorie monoïdale stricte additive karoubienne tressée $\mathcal{C}$ munie d'un générateur X de type N, et d'un projecteur π de $X^{\otimes N}$ d'image isomorphe à l'objet unité.

Si A est une k-algèbre monoïdale tressée et π un projecteur de type N de A, notons $\nabla(A,\pi)$ la k-catégorie monoïdale tressée $\mathsf{KW}(\widetilde{A},\mathsf{Im}(\pi))$.

Si $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale stricte tressée et X un objet de $\mathcal{C}$, notons $\Delta(\mathcal{C},X)$ la k-algèbre monoïdale associée.

3.2.3 Théorème.

1) Soit A une k-algèbre monoïdale tressée et π un projecteur de type N de A. Soit $\mathcal{C}=\nabla(A,\pi)$. Alors :

a) $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale stricte additive karoubienne tressée, et l'image X de $[1]$ par le foncteur canonique $A\to\mathcal{C}$ est un générateur de type N de $\mathcal{C}$;

b) On a un isomorphisme canonique de k-algèbres monoïdales $A\xrightarrow{\sim}\Delta(\mathcal{C},X)$.

2) Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie monoïdale stricte tressée, X un générateur de $\mathcal{C}$ de type N, et π un projecteur de $X^{\otimes N}$ d'image isomorphe à I. Soit $A=\Delta(\mathcal{C},X)$. Alors :

a) A est une k-algèbre monoïdale tressée, et π un projecteur de type N de A ;

b) la donnée d'un isomorphisme $c: I\xrightarrow{\sim}\mathsf{Im}(\pi)$ dans $\mathcal{C}$ définit une k-équivalence monoïdale $\nabla(A,\pi)\longrightarrow\mathcal{C}$.

Démonstration.

1) Notons S l'image de π dans $\widetilde{A}$, et $F_0:\widetilde{A}\to\mathcal{C}$ le k-foncteur monoïdal tressé canonique. Par construction :

$$\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})=\varinjlim_{k}\bigoplus_{l}\mathsf{Hom}_{\widetilde{A}}([n](k),[n](l)).$$

Or, $[n](k)=[n]\otimes S^{\otimes k}$ étant facteur direct de $[n+kN]$, $\mathsf{Hom}_{\widetilde{A}}([n](k),[n](l))=0$ si $k\neq l$ (car $\mathsf{Hom}_A([m],[m'])=0$ si $m\neq m'$); d'autre part le foncteur $?\otimes S$, pleinement fidèle, induit un isomorphisme $A_n\to\mathsf{End}_{\widetilde{A}}([n](k))$. Ainsi $A_n\xrightarrow{\sim}\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$, ce qui démontre 1) b).

Il est clair que $\mathcal{C}$ est une k-catégorie monoïdale, et $\langle X\rangle=\mathcal{C}$. De plus, par construction de KW, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes m},X^{\otimes n})=0$ si $m\not\equiv n$ mod. N, et $F_0(S)$ est un facteur direct de $X^{\otimes N}$ isomorphe à I, donc X est un générateur de type N. En outre, A s'identifie à $\Delta(\mathcal{C},X)$.

Reste à montrer que $\mathcal{C}$ est additive karoubienne, c'est-à-dire que le foncteur pleinement fidèle $\mathcal{C}\hookrightarrow\widetilde{\mathcal{C}}$ est essentiellement surjectif.

Définition. Si A est une k-algèbre monoïdale, nous dirons qu'un objet de $\widetilde{A}$ est N*-mince* s'il est facteur direct d'un objet de la forme $E_n^m=([n]\oplus[n+1]\oplus\cdots\oplus[n+N-1])^m$.

3.2.4. Lemme. *Soit $\mathcal{C}$ une k-catégorie monoïdale, et X un générateur de type N de $\mathcal{C}$. Soit d'autre part A une k-algèbre monoïdale, et $F:\widetilde{A}\to\mathcal{C}$ un k-foncteur monoïdal vérifiant $F([1])=X$ et induisant pour tout $n\in\mathbb{N}$ un isomorphisme*

$$A_n\xrightarrow{\sim}\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}).$$

Alors :

1) si E est un objet N-mince de $\widetilde{A}$, F induit un isomorphisme $\mathsf{End}_{\widetilde{A}}(E)\to\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(F(E))$;

2) tout objet de $\mathcal{C}$ est isomorphe à l'image par F d'un objet N-mince de $\widetilde{A}$.

Démonstration.

1) Soit $E = E_n^m$. Pour $n \leq k, k' < n + N$, le foncteur F induit un isomorphisme $\mathsf{Hom}_{\widetilde{A}}([k],[k']) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(F([k]), F([k']))$, par hypothèse si $k = k'$, et parce que ces deux espaces sont nuls si $k \neq k'$; de sorte que $\mathsf{End}_{\widetilde{A}}(E) \to \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(F(E))$ est un isomorphisme. C'est encore vrai pour E facteur direct de E_n^m.

2) Puisque $\mathcal{C} = \langle X \rangle$ et $X^{\otimes n}$ est facteur direct de $X^{\otimes n+N}$ pour $n \in \mathbb{N}$, tout objet de $\mathcal{C}$ est facteur direct d'un objet de la forme $[X^{\otimes n} \oplus \cdots \oplus X^{\otimes n+N-1}]^m$, c'est-à-dire $F(E_n^m)$. Soit q un projecteur de $F(E_n^m)$ d'image Y, et p l'antécédent de q par l'application $\mathsf{End}(E_n^m) \to \mathsf{End}(F(E_n^m))$ induite par F, qui est bijective. Alors $E_0 = \mathsf{Im}(p)$ est un objet N-mince de $\widetilde{A}$, et $F(E_0) \simeq Y$. □

Le lemme s'applique à la composée $\widetilde{A} \to \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$, qui est donc essentiellement surjective, ainsi que $\mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$. D'où 1) a).

2) L'assertion 2) a) est évidente. Montrons 2) b). Soit $S = \mathsf{Im}(\pi)$, et $c : I \xrightarrow{\sim} S$ un isomorphisme dans $\mathcal{C}$. Par construction de A, on a un k-foncteur monoïdal tressé canonique $G : \widetilde{A} \to \mathcal{C}$. Soit $\mathcal{C}_0 = \nabla(A, \pi) = \mathsf{KW}(\widetilde{A}, S)$, F_0 le foncteur canonique $\widetilde{A} \to \mathcal{C}_0$, et a l'isomorphisme canonique $I \xrightarrow{\sim} S$ dans $\mathcal{C}_0$. Par la propriété universelle de KW, il existe un unique foncteur monoïdal tressé strict $H : \nabla(A, \pi) \to \mathcal{C}$ vérifiant $HF_0 = G$ et $H(a) = c$. Reste à montrer que H est une équivalence, ce qui résultera du lemme suivant.

3.2.5. Lemme. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ deux k-catégories monoïdales additives karoubiennes, et $H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un k-foncteur monoïdal. Soit X un générateur de type N de $\mathcal{C}$, $Y = H(X)$, et pour $n \in \mathbb{N}$ notons H_n le morphisme*

$$\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n}) \to \mathsf{End}_{\mathcal{D}}(Y^{\otimes n})$$

induit par H. Alors
1) H est fidèle $\iff \forall n$, H_n est injectif;
2) H est une équivalence $\iff Y$ est un générateur de type N de $\mathcal{D}$ et $\forall n$, H_n est bijectif.

Démonstration.

On peut supposer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ strictes. Soit A la k-algèbre monoïdale associée à $(\mathcal{C}, X)$, et $F : \widetilde{A} \to \mathcal{C}$ le k-foncteur monoïdal canonique. Les implications '$\Longrightarrow$' sont évidentes.

Supposons les H_n injectifs, et montrons que H est fidèle. Puisque $\mathcal{C}$ est additive, il suffit de montrer que pour $Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(Z) \to \mathsf{End}_{\mathcal{D}}(H(Z))$ est injectif. D'après le lemme **3.2.4,** Z est isomorphe à $F(E)$ pour un certain objet N-mince E de $\widetilde{A}$, et $\mathsf{End}_{\widetilde{A}}(E) \to \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(F(E))$ est un isomorphisme. Par ailleurs, l'injectivité de H_n entraîne la fidélité de $H \circ F : \widetilde{A} \to \mathcal{D}$, d'où l'injectivité de $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(Z) \to \mathsf{End}_{\mathcal{D}}(H(Z))$.

Supposons maintenant que les H_n sont bijectifs, et Y est un générateur de type N de $\mathcal{D}$. Pour montrer que H est une équivalence, il suffit de vérifier qu'il est pleinement fidèle, donc que $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(Z) \to \mathsf{End}_{\mathcal{D}}(H(Z))$ est un isomorphisme pour $Z \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$. Comme ci-dessus, on peut supposer $Z = F(E)$, avec E N-mince; alors $\mathsf{End}_{\widetilde{A}}(E) \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(F(E))$, et d'autre part **3.2.4** s'applique aussi à $HF : \widetilde{A} \to \mathcal{D}$, donc $\mathsf{End}_{\widetilde{A}}(E) \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathcal{D}}(G(E))$. Ainsi $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(Z) \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathcal{D}}(H(Z))$. □

Par 1) a), H_n est bijectif; l'assertion 2) du lemme s'applique donc à H, ce qui démontre 2) b) et achève la démonstration du théorème. □

3.2.6. Proposition. *Soit k une corps, A une k-algèbre monoïdale tressée, π un projecteur de type N de A, et $\mathcal{C} = \nabla(A, \pi)$.*

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) pour tout n, A_n est une k-algèbre semi-simple de dimension finie;

(ii) $\widetilde{A}$ est une k-catégorie abélienne semi-simple où les Hom sont de dimension finie;

(iii) $\mathcal{C}$ est une k-catégorie abélienne semi-simple où les Hom sont de dimension finie.

De plus, si tel est le cas, l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{C}$ est en bijection naturelle avec l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\widetilde{A}$ qui ne sont pas de la forme $S \otimes X$, pour X simple et $S = \mathsf{Im}(\pi)$.

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que (iii) $\Longrightarrow$ (i) $\Longrightarrow$ (ii). Montrons (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Soit X un objet de $\mathcal{C}$; d'après **3.2.4,** c'est l'image d'un objet N-mince E de $\widetilde{A}$. On a alors $\mathsf{End}_{\widetilde{A}} Y \simeq \mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X)$, donc $\mathsf{End}_{\mathcal{C}}(X)$ est une k-algèbre semi-simple de dimension finie. La catégorie $\mathcal{C}$, k-linéaire et karoubienne, est donc abélienne semi-simple. □

3.2.7. Proposition. *Soit A une k-algèbre monoïdale tressée telle que $A_0 = A_1 = k$, π un projecteur de type N de A, et $\mathcal{C} = \nabla(A, \pi)$. Soit $\gamma \in k$ le scalaire défini par*

$$(\pi \otimes 1_1)(1_{N-1} \otimes R_{1,1})(\pi \otimes 1_1) = \gamma(\pi \otimes 1_1)\,.$$

Alors :

1) $\mathcal{C}$ est autonome si et seulement si γ est inversible;

2) si $\mathcal{C}$ est autonome, la donnée d'une structure de tortil sur $\mathcal{C}$ équivaut à la donnée d'une structure balancée θ sur A vérifiant

a) $\theta_N\,\pi = \pi$;

b) $(\theta_1)^{-2}\pi = R_{1,N-1}R_{N-1,1}\,\pi$.

Dans le tortil ainsi défini, $\mathsf{dim}\, X = \gamma^{-1}\theta_1$.

DÉMONSTRATION. Soit S l'image de π, et X l'objet $[1]$, vus dans $\widetilde{A}$. Alors $\mathsf{End}(S\otimes X) \simeq \mathsf{End}(X) = A_1 \simeq k$, ce qui justifie la définition du scalaire γ. Posons $Z = X^{\otimes N-1}$. Puisque S est facteur direct de $Z \otimes X$, le critère de la proposition **1.1.5** s'applique : X admet un dual dans $\mathcal{C}$ si et seulement si γ est inversible, et ce dual Y est alors l'image d'un projecteur explicite π' de Z.

Une structure balancée θ sur A s'étend de manière unique à $\widetilde{A}$, et induit une structure balancée sur $\mathcal{C}$ si et seulement si $\theta_S = 1$: c'est la condition a). Supposons-la remplie, et notons encore θ la structure balancée ainsi définie sur $\mathcal{C}$. On a alors $\theta_Z\pi' = \theta_Y\pi'$, donc $\theta_{Z\otimes X}(\pi' \otimes 1_X) = R_{X,Z}R_{Z,X}(\theta_Z\pi' \otimes \theta_X) = \theta_Y\theta_X R_{X,Z}R_{Z,X}(\pi' \otimes 1_X)$. Composant à droite par π, il vient : $\theta_N\pi = \pi = \theta_Y\theta_X R_{1,N-1}R_{N-1,1}\pi$ (car $(\pi' \otimes 1_X)\pi = \pi$, remarque **1.1.6**). La condition b) signifie donc que les scalaires θ_X et θ_Y sont égaux, ce qui équivaut à la compatibilité de θ aux duaux (car X est un générateur de $\mathcal{C}$). Sous les hypothèses a) et b), on a $\mathsf{dim}\, X = \theta_X\delta(X) = \theta_X\gamma^{-1}$. □

3.3. La variante de Blanchet

Soient N et K deux entiers > 0, q une racine complexe de l'unité d'ordre $l = N+K$, et $s \in \mathbb{C}$ tel que $s^2 = q$. Soit A la $\mathbb{C}$-algèbre monoïdale $\mathbb{CH}(s)/\mathcal{J}^{(N)}$ décrite dans l'appendice (*cf.* **A.2**). On note π le projecteur de A_N correspondant au tableau 1^N.

Pour $u \in \mathbb{C}^*$, on note A^u la $\mathbb{C}$-algèbre monoïdale A munie du tressage R et de la structure balancée θ définis par $R_{1,1} = u^{-1}g$ et $\theta_1 = u^{-1}s^N$.

3.3.1. Proposition. *Supposons $u^N = s$. Alors π est un projecteur de type N de A^u, et $\nabla(A^u, \pi)$ est un tortil qui s'identifie à $\mathcal{C}_u$.*

DÉMONSTRATION. L'objet X est un générateur de type N de $\mathcal{C}_u$. Le foncteur monoïdal F : $A^u \to \mathcal{C}_u$ défini en **2.1.7** est tressé, balancé, induit des isomorphismes $A_n \xrightarrow{\sim} \mathsf{End}_{\mathcal{C}_u}(X^{\otimes n})$ (**2.2.2**) et $F(\pi)$ est le projecteur de $X^{\otimes N}$ d'image I. Il en résulte (**3.2.3**) que π est un projecteur de type N de A^u, et F induit une équivalence $\nabla(A^u, \pi) \to \mathcal{C}_u$. $\square$

À présent, soit κ un entier ≥ 1, et posons $\pi^\kappa = \pi^{\otimes \kappa}$. Soit d'autre part $v = u^{-N}s$ et $w = -u^{-K}s^{-1}$. Il résulte de la proposition **A.3.1** de l'appendice que π^κ est un projecteur de type κN de A^u si et seulement si $v^{2\kappa} = v^{N\kappa^2} = 1$.

On fait désormais l'hypothèse que $v^{2\kappa} = v^{N\kappa^2} = 1$. On peut alors former la catégorie $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)} = \nabla(A^u, \pi^\kappa)$. Pour $\lambda \in \Lambda$ (voir **A.1**), on note V_λ l'objet correspondant de $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$. En particulier, on pose $X = V_1$, $S = V_{1^N}$ et $\Sigma = V_K$. Soit $\Lambda^{(\kappa)} = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda_N < \kappa\}$.

3.3.2. Proposition. *La catégorie $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ est prémodulaire, et ses objets simples sont à isomorphisme près les V_λ, pour $\lambda \in \Lambda^{(\kappa)}$.*

DÉMONSTRATION.

De **3.2.6** résulte que $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ est abélienne semi-simple, avec pour objets simples (à isomorphisme près) les V_λ, $\lambda \in \Lambda^{(\kappa)}$. Pour montrer que c'est un tortil, appliquons **3.2.7.** On calcule γ au moyen de la trace de Markov (*cf.* appendice, **A.1**) : $\tau^{\mu_N}(\pi^\kappa \otimes 1_1)(1_{\kappa N-1} \otimes R_{1,1})(\pi^\kappa \otimes 1_1) = u^{-1}\mu_N \tau^{\mu_N}(\pi^\kappa \otimes 1_1)$, donc $\gamma = u^{-1}\mu_N = u^{-1}s^N/[N]_s \in k^*$. La catégorie est donc autonome. D'autre part, $\theta_{\kappa N}\pi^\kappa = \theta_{S^{\otimes\kappa}} = v^{N\kappa^2}\pi$ (par **A.3.1**) $= \pi^\kappa$. D'autre part, il résulte de **A.2.1** que $R_{1,\kappa N-1}R_{\kappa N-1,1}\pi^\kappa = u^2 s^{-2N}\pi^\kappa = {\theta_1}^{-2}\pi^\kappa$. Les conditions a) et b) étant remplies, on obtient bien un tortil. Notons que pour κN pair, le choix $\theta_1 = -u^{-1}s^N$ est également possible : *cf.* la remarque **3.3.12.** $\square$

3.3.3. EXERCICE. Montrer que $\mathsf{SL}_{N,s}^{(\kappa)} = \mathsf{M}_{N,s}/({D_s}^\kappa - 1)$ est une bigèbre de Hopf, et que la donnée de $u \in \mathbb{C}^*$ tel que $u^{N\kappa} = s^\kappa$ permet de défini une structure tortile $\mathcal{V}_{u,s}^{(\kappa)}$ sur $\mathsf{rep}\,\mathsf{SL}_{N,s}^{(\kappa)}$. Montrer que la sous-catégorie pleine $\langle X \rangle \subset {\mathcal{V}_{u,s}^{(\kappa)}}^{\mathsf{ss}}$ est un $\mathbb{C}$-tortil équivalent à $\nabla(A^u, \pi^\kappa)$.

3.3.4. Proposition. *Dans $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$, on a pour $\lambda \in \Lambda^{(\kappa)}$:*

$$\theta_{V_\lambda} = u^{-|\lambda|^2} s^{N|\lambda|} q^{\mathsf{cn}(\lambda)} \quad \textit{et} \quad \mathsf{dim}\, V_\lambda = d_\lambda .$$

DÉMONSTRATION.

La formule donnant θ est celle de **A.3.1.** On a $\mathsf{dim}(X) = \gamma^{-1}\theta_X = [N]_s$, et il résulte de **A.1.1** que $\mathsf{dim}\, V_\lambda = {[N]_s}^{|\lambda|}\tau^{\mu_N}(p_t) = d_\lambda$ par **A.2.3.** $\square$

REMARQUE. En particulier, $\Delta_{\mathcal{C}_u^\kappa} = \kappa \sum_{\lambda \in \Lambda^{(0)}} {d_\lambda}^2$ est un réel > 0. D'autre part, $\mathsf{dim}\, S = 1$, et $\mathsf{dim}\, \Sigma = (-\varepsilon_s)^K$, où $\varepsilon_s = s^l$. Autrement dit, $\mathsf{dim}\, \Sigma = 1$ sauf lorsque N est pair, K impair et s d'ordre l : en ce cas $\mathsf{dim}\, \Sigma = -1$.

3.3.5. Proposition.

1) Le groupe des objets inversibles de $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ est d'ordre κN, engendré par S et Σ, avec les relations : $S^\kappa = 1$ et $\Sigma^N = S^K$.

2) On a $M_{\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}} = \{S^a\Sigma^b \mid v^{2a}w^{2b} = 1\}$.

Démonstration.

Soit $V = V_\lambda$ un objet inversible de $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$; alors $V \otimes X$ est simple. Il résulte de **A.2.2** que $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, avec $\lambda_i = a + K$ pour $1 \leq i \leq b$, $\lambda_i = a$ pour $i > b$. Alors $V \simeq S^{\otimes a}\Sigma^{\otimes b}$. Par ailleurs, S est d'ordre κ dans $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$, et $\Sigma^N \simeq S^K$, d'où l'assertion 1).

Soit $M = M_{\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}}$, et $V \in M$. On démontre que V est inversible exactement comme dans le cas $v = 1$, voir [**4**], **5.3.** Or pour V inversible, $V \in M \iff V$ est transparent $\iff R_{X,V}R_{V,X} = 1$. Pour $V = S^a\Sigma^b$, on a $R_{X,V}R_{V,X} = v^{2a}w^{2b}$ d'après **A.3.1,** d'où l'assertion 2). □

Posons $M = M_{\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}}$. La catégorie $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ est modulaire si et seulement si $M = \{I\}$, condition qui équivaut ici à : $O(v^2) = \kappa$, $O(w^2) = N\frac{\kappa}{\kappa \wedge K}$, et $\kappa \wedge N \wedge K = 1$. On retrouve la condition 'usuelle' pour $v = 1$: $O(u^{2l}) = N$.

3.3.6. Théorème.

La catégorie prémodulaire $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ vérifie $\widetilde{\Delta} \neq 0$, et donc définit un invariant de Turaev-Viro, sauf dans les cas suivants :
1) N est impair et l'ordre de v est congru à 2 mod. 4 ;
2) N est pair, K impair, et l'ordre de w congru à 2 mod. 4 (resp. impair) si $O(s) = 2l$ (resp. $O(s) = l$) ;
3) K et N sont pairs, et les ordres de v^2 et de w^2 ont même valuation dyadique.[6]

Démonstration. L'invariant de Turaev-Viro est défini si et seulement si $\theta_F = 1$ pour tout $F \in M$. Pour ξ racine de l'unité d'ordre m, posons $\varepsilon_\xi = (-1)^{m+1}$. En particulier, $\varepsilon_s = s^l$. Soit $F = S^a\Sigma^b$. On a alors par **A.3.1 :**

$$\theta_F = {\varepsilon_s}^{(a+K)b} v^{Na^2+Kab}(-w)^{Kb^2+Nab} .$$

Soit $\varepsilon_{a,b} = v^a(-w)^b$, de sorte que F est transparent si et seulement si $\varepsilon_{a,b} = \pm 1$. Alors :

$$\theta_F = {\varepsilon_s}^{(a+K)b} {\varepsilon_{a,b}}^{Na+Kb} . \qquad (1)$$

Calculons maintenant des générateurs de M. Posons $V = v^2$, $W = w^2$, $\alpha = O(V)$, $\beta = O(W)$, $\gamma = \alpha \wedge \beta$, $\alpha' = \frac{\alpha}{\gamma}$ et $\beta' = \frac{\beta}{\gamma}$. Puisque $V^{\alpha'}$ et $W^{\beta'}$ sont tous deux d'ordre γ, il existe un entier H, inversible modulo γ, tel que $V^{H\alpha'} = W^{\beta'}$; et on a :

$$M = \langle S^\alpha, S^{-H\alpha'}\Sigma^{\beta'} \rangle .$$

Reste à déterminer la valeur de θ sur ces deux générateurs. Pour $F = S^\alpha$, $\theta_F = v^{N\alpha^2} = {\varepsilon_v}^{N\alpha}$. Ceci vaut 1 sauf pour N impair et $O(v) \equiv 2$ mod. 4. D'autre part, pour $F = S^{-H\alpha'}\Sigma^{\beta'}$, $\theta_F = {\varepsilon_s}^{(H\alpha'+K)\beta'}{\varepsilon'}^{-NH\alpha'+K\beta'}$, avec $\varepsilon' = v^{-H\alpha'}(-w)^{\beta'} = \pm 1$.

Posons $h = N \wedge K$, $n = N/h$ et $k = K/h$. On a :

$$v^k(-w)^{-n} = s^{l/h} . \qquad (2)$$

Par conséquent, $V^K = W^N$. Identifiant les ordres de ces éléments, il vient : $\frac{\alpha}{\alpha \wedge K} = \frac{\beta}{\beta \wedge N}$, donc $\alpha'(\beta \wedge N) = \beta'(\alpha \wedge K)$. En particulier, $\alpha' \mid K$ et $\beta' \mid N$. Si α' (resp. β') est pair, K (resp. N) est pair donc $\theta_F = 1$. Ainsi, θ ne peut valoir -1 sur F que si α' et β' sont impairs, c'est-à-dire si $\nu_2(\alpha) = \nu_2(\beta)$ (où ν_2 désigne la valuation dyadique).

[6] voir **3.3.7** pour une formulation plus explicite de cette condition

3.3.7. Lemme.
a) Si N et K sont impairs, $\nu_2(\alpha) = \nu_2(\beta)$;
b) si n et k sont impairs et h pair, $\nu_2(\alpha) = \nu_2(\beta) \Longleftrightarrow \nu_2(\alpha) > \nu_2(h) \Longleftrightarrow \nu_2(\beta) > \nu_2(h)$;
c) si n est impair et k pair, $\nu_2(\alpha) = \nu_2(\beta) \Longleftrightarrow \nu_2(\alpha) = \nu_2(h)$;
d) si n est pair et k impair, $\nu_2(\alpha) = \nu_2(\beta) \Longleftrightarrow \nu_2(\beta) = \nu_2(h)$.

Démonstration. Si ξ et ζ sont des racines de l'unité d'ordres respectifs x et y, et si z est l'ordre de $\xi\zeta^{-1}$, on a :

$$\nu_2(z) = \sup(\nu_2(x), \nu_2(y)) \quad \text{si } \nu_2(x) \neq \nu_2(y) \text{ ou } \nu_2(x) = \nu_2(y) = 0,$$
$$\nu_2(z) < \nu_2(x) \quad \text{si } \nu_2(x) = \nu_2(y) \neq 0.$$

Or il résulte de (2) que $V^k W^{-n} = q^{l/h}$, avec $O(q^{l/h}) = h$, $O(V^k) = \frac{\alpha}{k \wedge \alpha}$ et $O(W^n) = \frac{\beta}{n \wedge \gamma}$. Supposons n impair. Alors $\nu_2(O(W^n)) = \nu_2(\beta)$, et puisque $W^n = q^{l/h} V^{-k}$, on a :

1) $\nu_2(\beta) = \nu_2(h)$ si $\nu_2(\alpha) < \nu_2(h) + \nu_2(k)$;
2) $\nu_2(\beta) = \nu_2(\alpha) - \nu_2(k)$ si $\nu_2(\alpha) > \nu_2(h) + \nu_2(k)$;
3) $\nu_2(\beta) = 0$ si $\nu_2(h) = 0$ et $\nu_2(\alpha) \leq \nu_2(k)$;
4) $\nu_2(\beta) < \nu_2(h)$ si $\nu_2(h) = \nu_2(\alpha) - \nu_2(k) > 0$.

Pour k pair, on a donc $\nu_2(\beta) = \nu_2(\alpha) \Longleftrightarrow \nu_2(\alpha) = \nu_2(h)$; et pour k impair, $\nu_2(\beta) = \nu_2(\alpha) \Longleftrightarrow \nu_2(\alpha) > \nu_2(h)$ ou $\nu_2(\alpha) = 0 = \nu_2(h)$. Pour n pair, on échange V et W. $\square$

On suppose donc désormais α' et β' impairs, de sorte que $\theta_F = {\varepsilon_s}^{H+K} {\varepsilon'}^{NH+K}$. Observons que H étant défini et inversible modulo γ, on peut toujours le choisir impair, et on peut le choisir pair si γ est impair.

Supposons $l = N + K$ pair; on a $\varepsilon_s = -1$, et pour H impair, il vient $\theta_F = (-1)^{K+1}$. Par conséquent si N et K sont pairs, $\theta_F = -1$, et s'ils sont impairs, $\theta_F = 1$.

Si l est impair, il en va de même de h, et de γ d'après le lemme. On peut donc choisir H pair, $H = 2H'$. Alors $\theta_F = (\varepsilon_s \varepsilon')^K$. Si K est pair et N impair, on a donc $\theta_F = 1$. Enfin, si K est impair et N pair, $\theta_F = \varepsilon_s \varepsilon'$. Or $(-w)^{\beta'} = \varepsilon' v^{H\alpha'} = \varepsilon' V^{H'\alpha'}$; élevant cette équation à la puissance γ, il vient : $\varepsilon' = \varepsilon_{-w}$, et donc $\theta_F = \varepsilon_s \varepsilon_{-w}$. $\square$

Remarques.

1) La catégorie $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ est modularisable si et seulement si TV est défini et tout élément de M est de dimension 1 (*cf.* **1.6.8**). Le seul cas où l'invariant de Turaev-Viro est défini sans que la catégorie soit modularisable est : N pair, K impair, $O(s) = l$, et $O(u)$ impair.

2) Supposons $u^N = s$, c'est-à-dire $v = 1$. Les seuls cas où TV n'est pas défini sont N pair, K impair, et $O(w) \equiv 2 \bmod .4$ (resp. impair) si $O(s) = 2l$ (resp. l). La première condition sur w équivaut à $O(u) \equiv 2$ mod. 4 (on retrouve donc le résultat de [**4**]); la seconde, à $O(u)$ impair.

3.3.8. Proposition. *Le groupe M, d'ordre $\frac{\kappa N}{\alpha \vee \beta}$, opère librement sur l'ensemble $\Lambda^{(\kappa)}$ des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$.*

Démonstration. On a vu : $\alpha' \mid K$ et $\beta' \mid N$. Posons $k' = \frac{K}{\alpha'}$, $n' = \frac{N}{\beta'}$. D'autre part, $V^{\alpha' H} = W^{\beta'}$ par définition de H. Ainsi $V^{\alpha'(k' - Hn')} = V^{\alpha' k'} W^{-\beta' n'} = V^K W^{-N} = 1$, et comme $V^{\alpha'}$ est d'ordre γ, on en déduit $\gamma \mid k' - Hn'$. Posons $\Xi = \frac{k' - Hn'}{\gamma}$.

La catégorie $\mathcal{C}_{s,u}^{(\kappa)}$ est $\mathbb{Z}/\kappa N \mathbb{Z}$-graduée par le degré modulo κN. Soit $X \in M$; il existe des entiers m et m' tels que $X \simeq (\Sigma^{\beta'} S^{-H\alpha'})^m S^{m'\alpha}$. Supposons qu'il existe un objet simple F tel que $X \otimes F \simeq X$. Il s'agit de montrer qu'alors $X \simeq I$.

Or $|X|+|F|=|F|$, donc $|X|$ est nul. Autrement dit,

$$(a) \qquad m(K\beta'-H\alpha'N)+m'\alpha N\equiv 0 \mod. \kappa N\,.$$

En particulier, $N \mid mK\beta'$. On en déduit que $N \mid m\beta'h$, d'où : $n' \mid mh$. D'autre part $|X|=m(K\beta'-H\alpha'N)+m'\alpha N=\alpha\beta'(m\Xi+m'n')$. Puisque $\alpha\beta'n'=\alpha N \mid \kappa N$, il résulte de (a) : $n' \mid m\Xi$. Ainsi,

$$n' \mid m(h\wedge\Xi)\,.$$

Supposons que n' soit premier à $h\wedge\Xi$: alors $n' \mid m$, donc $\beta'm$, exposant de Σ figurant dans l'expression de X, est multiple de N. Puisque $\Sigma^N\simeq S^K$, il existe un entier a tel que $X\simeq S^a$. Alors $|X|=aN$ et $|X|=0\Longrightarrow \kappa\mid a\Longrightarrow X\simeq I$, d'où la proposition.

Reste donc à vérifier : $n'\wedge h\wedge\Xi=1$. On sait que $Q=V^kW^{-n}$ est égal à $q^{\frac{l}{h}}$, donc d'ordre h. De $W^{\beta'}=V^{H\alpha'}$ résulte : $Q^{\frac{\beta'}{n\wedge\beta'}}=V^{\frac{k\beta'-nH\alpha'}{n\wedge\beta'}}$. Comparant les ordres de ces éléments, il vient :

$$h(\alpha\wedge\frac{k\beta'-nH\alpha'}{n\wedge\beta'})=\alpha(h\wedge\frac{\beta'}{n\wedge\beta'})\,.$$

On a donc $\alpha N\wedge\alpha\beta'h\wedge h(k\beta'-nH\alpha')=\alpha N\wedge\alpha\beta'h\wedge\alpha\beta'$. Or $\alpha N=\alpha\beta'n'$, et $h(k\beta'-nH\alpha')=K\beta'-HN\alpha'=\alpha'\beta'(k'-Hn')=\alpha\beta'\Xi$, d'où $n'\wedge h\wedge\Xi=1$. □

Remarque. Lorsque $\mathcal{C}^{(\kappa)}_{u,s}$ est modularisable, l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de sa modularisée s'identifie à $\Lambda^{(\kappa)}/M$. Son cardinal est $(\alpha\vee\beta)\frac{(K+N-1)!}{K!N!}$. On a $h\mid\alpha\vee\beta$, et C. Blanchet s'est particulièrement intéressé au cas où $\alpha\vee\beta=h$.

3.3.9. Proposition. *À N, K et s donnés, on peut trouver u tel que $\mathcal{C}_{u,s}$ définisse un invariant de Turaev-Viro, et $\alpha\vee\beta=h$.*

Démonstration. On a $\alpha\vee\beta=h\Longleftrightarrow\alpha\mid h$ et $\beta\mid h\Longleftrightarrow V^h=W^h=1$. Posons $U=u^{2h}$ de sorte que $V=U^{-n}q$ et $W=U^{-k}q^{-1}$. Alors $V^h=W^h=1\Longleftrightarrow U^N=q^h$ et $U^l=1$. Ainsi $\alpha\vee\beta=h\Longleftrightarrow U$ est de la forme q^ν, avec $n\nu\equiv 1$ mod. l/h.

Supposons u ainsi choisi. Obtient-on un invariant TV ? Posons $n\nu=1+\mu l/h$. Alors $V=q^{-\mu l/h}$ et $W=q^{(\mu-\nu)l/h}$, donc $\alpha=\frac{h}{h\wedge\mu}$ et $\beta=\frac{h}{h\wedge(\mu-\nu)}$, avec $\mu\wedge(\mu-\nu)=\mu\wedge\nu=1$. En particulier, pour h pair, $\nu_2(\alpha)=\nu_2(\beta)\Longleftrightarrow\nu$ est pair. Or ν, inverse de n modulo l/h, peut être choisi impair; l'invariant TV est alors défini.

Supposons h impair. Si N (resp. K) est impair, on doit choisir u de sorte que $\nu_2O(v)\neq 1$ (resp. $\nu_2O(w)\neq 0$ ou $\neq 1$ selon la parité de $O(s)$), ce qui est toujours possible quitte à remplacer u par $-u$, puisque cette transformation change v en $-v$ (resp. w en $-w$) sans changer U.

Notons que la catégorie ainsi obtenue est modularisable, sauf dans un cas : N pair, K impair, et s d'ordre l. □

3.3.10. Théorème. *La catégorie prémodulaire $\mathcal{C}^{(\kappa)}_{u,s}$ est définie sur $k=\mathbb{Z}[u,s,1/[l-1]^!_s]$.*

Démonstration. Soit $A(k)$ la k-algèbre monoïdale image du foncteur $k\mathbb{H}(s)\to A$. Pour $t\in T_n$, le projecteur π_t appartient à $A(k)_n$. Soit W_t l'image de ce projecteur, vue comme un objet de $\widetilde{A(k)}$. Par **A.4.1**, on a $[n]=\bigoplus_{t\in T_n}W_t$, et les W_t sont scalaires. De plus $W_s\simeq W_t$ si s et t sont de même forme, $\mathsf{Hom}(W_s,W_t)=0$ sinon. Puisque $W_t\otimes S\simeq W_{t(1)}$ par **A.2**, 2), le foncteur $?\otimes S:\widetilde{A(k)}\to\widetilde{A(k)}$ est pleinement fidèle. Soit $A(k)^u$ la k-algèbre $A(k)$ munie du tressage R et de la structure balancée θ définis par $R_{1,1}=u^{-1}g$

et $\theta_1 = u^{-1}s^N$, de sorte que l'équivalence $A(k)^u \otimes_k \mathbb{C} \to A^u$ soit tressée, balancée. Alors π^κ est un projecteur de type N de $A(k)^u$. Posons $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}(k) = \nabla(A^u, \pi^\kappa)$. C'est un k-tortil par **3.2.7,** et il résulte de **A.4.1** que c'est une k-catégorie prémodulaire ayant pour base les W_λ, $\lambda \in \Lambda^{(\kappa)}$ (par une démonstration identique à celle de la seconde assertion de **2.2.3**). Le foncteur canonique $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}(k) \otimes_k \mathbb{C} \to \mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ est donc une équivalence. □

3.3.11. Corollaire. *Dans tous les cas où l'invariant de Turaev-Viro associé à* $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ *est défini, il est à valeurs dans* $k = \mathbb{Z}[u, s, 1/[l-1]_s^!]$. *En particulier si* l *est premier, c'est un entier cyclotomique (car alors* $k = \mathbb{Z}[u,s]$*).*

Démonstration. Grâce à **3.3.8** et **3.3.10,** on peut appliquer le théorème **1.6.6.** □

3.3.12. Remarque. Si κN est pair, on peut modifier la structure tortile de $\mathcal{C}_{u,s}^{(\kappa)}$ de sorte que θ_{V_λ} soit multiplié par $(-1)^{|\lambda|}$, le tressage restant inchangé, de même que le groupe M. La dimension de V_λ devient $(-1)^{|\lambda|}d_\lambda$. La discussion ci-dessus s'adapte sans difficulté, et **3.3.11** reste vrai.

A. Appendice : idempotents des algèbres de Hecke

A.1. Trace de Markov. Soit k un anneau commutatif, $s \in k^*$. On note $k\mathbb{H}(s)$ la k-algèbre monoïdale de Hecke (*cf.* **1.7.2**). Soit $H_n = k\mathbb{H}_n(s)$. Lorsqu'on identifie H_n à une sous-algèbre de H_{n+1} via le morphisme $h \mapsto h \otimes 1_1$, l'application

$$H_{n-1} \oplus H_{n-1} \otimes_{H_{n-2}} H_{n-1} \to H_n$$
$$h \oplus (h' \otimes h'') \mapsto h + h' g_{n-1}^{(n)} h''$$

est un isomorphisme de (H_{n-1}, H_{n-1})-bimodules. Pour $\mu \in k$, il existe donc une unique application (H_{n-1}, H_{n-1})-linéaire $\tau_{n-1,n}^\mu : H_n \to H_{n-1}$ vérifiant $\tau_{n-1,n}^\mu(1) = 1$ $(n \geq 1)$ et $\tau_{n-1,n}^\mu(g_{n-1}) = \mu$ $(n \geq 2)$.

Pour $h \in H_n$, la *trace de Markov d'indice* μ de h est le scalaire $\tau_{0,1}^\mu \tau_{1,2}^\mu \ldots \tau_{n-1,n}^\mu h$. Ceci définit une trace τ^μ sur $k\mathsf{H}(s)$.

A.1.1. Proposition. *Soient* $\mathcal{C}$ *un* k*-tortil,* $F : k\mathbb{H}(s) \to \mathcal{C}$ *un* k*-foncteur monoïdal, et* $X = F([1])$*. On suppose que* $\dim X$, θ_X *sont des scalaires inversibles et qu'il existe* $u \in k^*$ *tel que*

$$F(g) = u\, R_{X,X}\,.$$

Soit $\mu = u\,\theta_X / \dim X$*. Alors :*

1) $(s - s^{-1}) \dim X = u\,\theta_X - u^{-1}\theta_X^{-1}$ *;*

2) pour $h \in H_n(s)$, $\operatorname{tr} F(h) = \dim(X)^n \tau^\mu(h)$*.*

Démonstration.

1) Résulte de la relation d'écheveau

$$u\, R_{X,X} - u^{-1} R_{X,X}^{-1} = (s - s^{-1})\, 1_{X \otimes X}\,,$$

elle-même conséquence de la relation $(g - s)(g + s^{-1}) = 0$.

2) Posons $B_n = \operatorname{End}_{\mathcal{C}}(X^{\otimes n})$, et considérons la *trace partielle* $\operatorname{tr}_{n-1,n} : B_n \to B_{n-1}$ définie par $f \mapsto (1_X{}^{\otimes n-1} \otimes e_X)(F(g) \otimes 1_X)(1_X{}^{\otimes n-1} \otimes \eta_X)$. Pour $f \in B_n$, on a $\operatorname{tr}(f) = \operatorname{tr}_{0,1} \operatorname{tr}_{1,2} \ldots \operatorname{tr}_{n-1,n}(f)$, de sorte qu'on se ramène à démontrer :

$$\forall h \in kH_n(s),\ \operatorname{tr}_{n-1,n} F(h) = \dim(X) F(\tau_{n-1,n}^\mu h)\,.$$

L'application $\mathsf{tr}_{n-1,n} : B_n \to B_{n-1}$ étant (B_{n-1}, B_{n-1})-linéaire, il suffit de vérifier cette identité pour $h = 1$ (c'est alors évident) et pour $h = g_{n-1} \in H_n$. Or $F(g_{n-1}) = u\, 1_{X^{\otimes n-2}} \otimes R_{X,X}$ donc $\mathsf{tr}_{n-1,n} F(g_{n-1}) = u\, \theta_X\, 1_{X^{\otimes n-1}}$; et d'autre part $\mathsf{dim}(X)\, F(\tau^{\mu}_{n-1,n}\, g_{n-1}) = \mu\, \mathsf{dim}(X) 1_{X^{\otimes n-1}} = u\, \theta_X\, 1_{X^{\otimes n-1}}$. □

A.1.2. Exemple. Ceci s'applique au foncteur naturel $k\mathbb{H}(s) \to \mathcal{C}_u(k)$ (**2.1.6**); on a alors $u\, \theta_X = s^N$, $\mathsf{dim}\, X = [N]_s$, et donc $\mu = \mu_N = \frac{s^N}{[N]_s}$.

A.2. On travaille maintenant sur $\mathbb{C}$. Soit N un entier ≥ 1 (le *rang*), $K \in \{1, 2, \ldots, +\infty\}$ (le *niveau*), et posons $l = K + N$. Soit $s \in \mathbb{C}^*$ tel que $q = s^2$ vérifie $O(q) = l$, autrement dit : si l est fini, q est une racine de l'unité d'ordre l, et si $l = +\infty$, $q = 1$ ou q n'est pas une racine de l'unité.

On note A la $\mathbb{C}$-algèbre monoïdale $\mathbb{C}\mathbb{H}(s)/\mathcal{J}^{(N)}$, où $\mathcal{J}^{(N)}$ est le $\otimes$-idéal de $\mathbb{C}\mathbb{H}(s)$ des morphismes négligeables pour la trace de Markov τ^{μ_N} (où $\mu_N = s^N/[N]_s$).

La catégorie $\widetilde{A}$ est une $\mathbb{C}$-catégorie monoïdale, non autonome, semi-simple. De plus, on peut expliciter un jeu d'idempotents minimaux des A_n en termes de tableaux de Young, ce qui permet de décrire les objets simples de $\widetilde{A}$ au moyen de diagrammes de Young.

Un *diagramme de Young* est une partie finie $\lambda \subset \mathbb{N}^2$, réunion de rectangles de la forme $[1, m_1] \times [1, m_2]$. Les élément du diagramme λ sont appelés *cellules*. Le *degré* du diagramme de Young λ, noté $|\lambda|$, est le nombre de cellules qui y figurent : $|\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_m$.

Traditionnellement, on dessine les cellules comme des cases, la cellule $(i, j+1)$ (resp. $(i+1, j)$) étant disposée à droite (resp. au-dessous) de la cellule (i, j). Le diagramme λ sera généralement rprésenté par la suite décroissante $(\lambda_1, \ldots, \lambda_i \ldots)$, des longueurs de ses lignes. On a $(i, j) \in \lambda \Longleftrightarrow 1 \leq j \leq \lambda_i$.

Un diagramme de Young λ est dit (N, K)-*admissible* s'il vérifie les conditions : $\lambda_{N+1} = 0$ et $\lambda_1 - \lambda_N \leq K$. Notons Λ l'ensemble des diagrammes de Young (N, K)-admissibles. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\widetilde{A}$. Une telle bijection peut être explicitée en termes de tableaux.

Un *tableau de Young* t est une suite croissante de diagrammes de Young $t_1 \subset \cdots \subset t_n$ (éventuellement vide) telle que pour tout i, $|t_i| = i$. Le nombre n est le *degré de* t, noté $|t|$, et le diagramme t_n est appelé la *forme de* t. La donnée de t équivaut à la donnée du diagramme t_n, et d'une numérotation des cellules de t_n de 1 à n de sorte que les numéros croissent le long de chaque ligne et de chaque colonne.

Un tableau t est dit (N, K)-*admissible* si chacun des t_i est (N, K)-admissible. On note T_n (resp. T_λ) l'ensemble des tableaux de Young (N, K)-admissibles de degré n (resp. de forme λ).

Pour $t \in T_n$, on pose $\beta_t = j - i$, où (i, j) est la n-ième cellule de t. Si $t = (t_1, \ldots t_n)$, avec $n > 0$, on note t' le tableau $(t_1, \ldots t_{n-1})$. Enfin, on note a_n la tresse à n brins :

$$a_n = g_{n-1} g_{n-2} \ldots g_1 g_1 g_2 \ldots g_{n-1} \in B_n\,,$$

et k_s l'anneau $\mathbb{Z}[s^{\pm 1}, (1/[n]_s)_{0 \leq n < l}]$.

À tout $t \in T_n$, on associé un élément $p_t \in k_s H_n(s)$ défini par récurrence comme suit :

$$p_\emptyset = 1, \quad \text{et pour } n > 0,$$

$$p_t = (p_{t'} \otimes 1_1) \prod_{\substack{s \in T_n \\ s \neq t,\, s' = t'}} \frac{a_n - q^{\beta_t}}{q^{\beta_s} - q^{\beta_t}}\,.$$

L'appartenance de p_t à $k_s \mathsf{H}_n(s)$ résulte du fait que pour s, $t \in T_n$ t. q. $s' = t'$, on a $|\beta_s - \beta_t| < l$, et $a_n - 1 \in (s - s^{-1})\mathbb{Z}[s^{\pm 1}] H_n(s)$.

Notant X l'objet [1] de $\widetilde{A}$, et π_t l'image de p_t dans A_n, on a pour $s,t \in T_n$: $\pi_s \pi_t = \delta_{s,t}\pi_s$, et $\sum_{t\in T_n} \pi_t = 1$. Ainsi π_t est un projecteur de $X^{\otimes n}$, et posant $V_t = \mathsf{Im}\,\pi_t$, on a dans $\widetilde{A}$:

$$X^{\otimes n} = \bigoplus_{t\in \mathcal{T}_n} V_t\,.$$

De plus, pour $t \in T$, V_t est simple, scalaire, et sa classe d'isomorphisme ne dépend que de la forme de t. Pour $\lambda \in \Lambda$, on note V_λ un représentant de la classe d'isomorphisme des V_t, $t \in T_\lambda$, ce qui établit la bijection annoncée.

A.2.1. Remarques.

1) La formule de récurrence définissant V_t s'interprète de la manière suivante. Pour $r \in T_{n-1}$, on a

$$V_r \otimes X = \bigoplus_{\substack{t\in T_n\\ t'=r}} V_t\,;$$

l'endomorphisme a_n de $X^{\otimes n}$ laisse stable $V_r \otimes X$; sa restriction à $V_r \otimes X$ est diagonalisable, et ses valeurs propres sont les q^{β_t}, pour $t \in T_n, t' = r$; V_t est l'espace propre associé.

2) Soit $\pi = \pi_{1^N}$, le projecteur de A_N correspondant à l'unique tableau à une colonne de longueur N, et posons $S = V_{1^N}$. Alors pour $s \in T$, $S \otimes V_s = V_{s(1)}$, où $s(1)$ est le tableau obtenu en accollant à gauche de s une colonne de longueur N, numérotée $1, \dots, N$, et en incrémentant de N les numéros des cellules de s.

3) Soit λ un diagramme de Young (N,K)-admissible de degré n; alors le projecteur central de $X^{\otimes n}$ sur sa composante isotypique de type V_λ est

$$Z_\lambda = \sum_{t\in T_\lambda} \pi_t\,.$$

Notons Σ l'objet simple V_K, correspondant au diagramme réduit à une ligne de longueur K (si $K = +\infty$, on pose $\Sigma = I$).

A.2.2. Proposition. *Tout objet simple V de $\widetilde{A}$ tel que $V \otimes X$ soit simple est de la forme $S^{\otimes a}\Sigma^{\otimes b}$ $(a,\ b \in \mathbb{N})$.*

Démonstration. Ceci résulte de la première remarque : si $V = V_t$, $V \otimes X$ est simple si et seulement si $\{s \in T \mid s' = t\}$ est réduit à un seul élément. Ceci n'arrive que si t a pour forme $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ avec $\lambda_i = a + K$ pour $1 \le i \le b$, $\lambda_i = a$ pour $i > b$. Alors $V_t \simeq S^{\otimes a}\Sigma^{\otimes b}$. $\square$

Pour $c = (i,j)$ cellule de λ, on note $\mathsf{hl}_\lambda(c)$ la 'longueur du crochet' $\lambda_i + \lambda^j - i - j + 1$ (où λ^j est la longueur de la colonne j dans λ), et $\mathsf{cn}(c)$ le 'contenu de c', égal à $j - i$. On pose $\mathsf{cn}(\lambda) = \sum_{c\in\lambda} \mathsf{cn}(c)$.

Pour $\lambda = (\lambda_i)_{1\le i\le N} \in \Lambda$, posons $\lambda^0 = (\lambda_i - \lambda_N)_{1\le i\le N}$, et

$$d_\lambda = \prod_{c\in\lambda^0} \frac{[N + \mathsf{cn}(c)]_s}{[\mathsf{hl}_\lambda(c)]_s}\,.$$

A.2.3. Lemme. *Pour $t \in T_\lambda$, $\tau^{\mu_N}(p_t) = [N]_s{}^{-|\lambda|} d_\lambda$.*

Démonstration. C'est une formule bien connue de la théorie des algèbres de Hecke; on peut aussi la déduire de la formule donnant la dimension d'un objet simple de $\mathcal{C}_u$ (avec $u^N = s$) : considérant le foncteur $A \to \mathcal{C}_u$, on a $\tau^{\mu_N}(p_t) = \mathsf{dim}\, X^{-|\lambda|}\, \mathsf{dim}_{\mathcal{C}_u} V_\lambda$; or $\mathsf{dim}_{\mathcal{C}_u} V_\lambda = d_\lambda$, et $\mathsf{dim}\, X = [N]_s$. □

A.3. Tressages et structures balancées sur $\widetilde{A}$.

La donnée de deux paramètres u, $\varepsilon \in \mathbb{C}^*$ définit sur $\widetilde{A}$ un tressage R et une structure balancée θ caractérisés par

$$R_{1,1} = u^{-1} g \quad \text{et} \quad \theta_1 = \varepsilon u^{-1} s^N \, .$$

.

Remarque. Si $u^N = s$ et $\varepsilon = 1$, le $\mathbb{C}$-foncteur monoïdal canonique $\widetilde{A} \to \mathcal{C}_u$ est tressé et balancé.

A.3.1. Proposition. *On a :*
1) $\theta_{V_\lambda} = \varepsilon^{|\lambda|} s^{N|\lambda|} u^{-|\lambda|^2} q^{\mathsf{cn}(\lambda)}$;
2) posant $v = u^{-N} s$: $R_{X,S} R_{S,X} = v^2\, 1_{X,S}$ *et* $R_{S,S} = v^N$;
3) si $K < +\infty$, *posant* $w = -u^{-K} s^{-1}$: $R_{X,\Sigma} R_{\Sigma,X} = w^2\, 1_{X,\Sigma}$ *et* $R_{\Sigma,\Sigma} = w^K$.

Démonstration. Soit $t \in T$ un tableau de forme λ, $r = t'$, $n = |r|$. D'après la remarque **A.2.1,** la restriction de $R_{X,V_r} R_{V_r,X}$ à V_t est le scalaire $u^{-2n} q^{\beta(t)}$, d'où en particulier les formules pour $R_{X,S} R_{S,X}$ et $R_{X,\Sigma} R_{\Sigma,X}$. Puisque $\theta_{V_r \otimes X} = \theta_X \theta_{V_r} R_{X,V_r} R_{V_r,X}$, il vient $\theta_{V_t} = \theta_X \theta_{V_r} u^{-2n} q^{\beta(t)}$, d'où la formule 1) par récurrence sur le degré.

Les formules donnant $R_{S,S}$ et $R_{\Sigma,\Sigma}$ se déduisent par homogénéité du cas $v = 1$, $\varepsilon = 1$: elles se vérifient alors dans $\mathcal{C}_u$. Là, $S \simeq I$, donc $R_{S,S} = 1_{S \otimes S}$. D'autre part Σ est inversible de dimension $(-\varepsilon_s)^K$ (où $\varepsilon_s = s^l$) et $\theta_\Sigma = s^{NK} u^{-K^2} q^{K(K-1)/2} = (-\varepsilon_s w)^K$ donc $R_{\Sigma,\Sigma} = w^K$. □.

A.4. Soit k un sous-anneau de $\mathbb{C}$ contenant $k_s = \mathbb{Z}[s^{\pm 1}, (1/[n]_s)_{0 \le n < l}]$. Soit $A(k)$ la k-algèbre monoïdale image du foncteur canonique $k\mathbb{H}(s) \longrightarrow A$.

Pour $t \in T_n$, on a $\pi_t \in A(k)_n$; soit W_t l'objet de $\widetilde{A(k)}$, image du projecteur π_t.

A.4.1. Proposition.
1) Dans $\widetilde{A(k)}$, $[n] = \bigoplus_{t \in T_n} W_t$.
2) Pour tout $t \in T$, $\mathsf{End}(W_t) = k$.
3) Pour s, $t \in T$, $W_s \simeq W_t$ *si* s *et* t *sont de même forme,* $\mathsf{Hom}(W_s, W_t) = 0$ *sinon.*
4) Le foncteur naturel $A(k) \otimes_k \mathbb{C} \to A$ *est une équivalence.*

Démonstration.

L'assertion 1) est évidente.

La trace de Markov de 1_{V_t}, qui est aussi celle de 1_{W_t}, est un élément de k^* (**A.2.3**). Soit ϕ un endomorphisme de W_t. Vu comme endomorphisme de V_t, c'est un scalaire $z \in \mathbb{C}$. On a $\tau^{\mu_N}(\phi) = z \tau^{\mu_N}(1_{V_t}) \in k$, donc $z \in k$ et $\phi = z$, d'où 2).

3) De l'inclusion $\mathsf{Hom}(W_s, W_t) \subset \mathsf{Hom}(V_s, V_t)$ résulte que si s et t sont de forme différente, $\mathsf{Hom}(W_s, W_t) = 0$. Supposons s et t de même forme λ et de degré n. Nous allons montrer que W_s et W_t sont isomorphes en imitant de près une construction de 'matrix units' due à Ram et Wenzl [**12**] (voir aussi [**2**]). On procède par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant évident.

a) Si s' et t' sont de même forme, on a par hypothèse de récurrence un isomorphisme $\phi : W_{s'} \xrightarrow{\sim} W_{t'}$. Alors $\phi \otimes 1_X$ est un isomorphisme $W_{s'} \otimes X \xrightarrow{\sim} W_{t'} \otimes X$ qui commute à θ et donc induit un isomorphisme $W_s \xrightarrow{\sim} W_t$.

b) Si s' et t' ne sont pas de même forme, mais $s'' = t''$, on utilise le lemme suivant.

Lemme. *Soient $s, t \in T_\lambda$, avec $|\lambda| = n \geq 2$, et supposons $s' \neq t'$ et $s'' = t''$. Alors*

$$\pi_s g_{n-1} \pi_t g_{n-1} \pi_s = \frac{[d+1]_s [d-1]_s}{[d]_s^2} \pi_s, \quad \text{où } d = \beta_s - \beta_t \quad .$$

Démonstration.

Soit $r = s'' = t''$. L'image de g_{n-1} dans A_n, vue comme endomorphisme de $X^{\otimes n}$, laisse stable l'objet $V_s \oplus V_t$, qui n'est autre que la composante λ-isotypique de $V_r \otimes X^{\otimes 2}$. Soit

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la matrice de l'endomorphisme de $V_s \oplus V_t$ ainsi défini.

Il s'agit de calculer $bc \in \mathsf{End}(V_t)$. Puisque $g^2 = (s - s^{-1})g + 1$, on a $bc = -a^2 + (s - s^{-1})a + 1$, de sorte qu'il suffit de calculer a. Or a est un scalaire caractérisé par : $\pi_s g_{n-1} \pi_s = a\pi_s$. On a $a_n \pi_s = q^{\beta_s} \pi_s$, et comme $\pi_s = (\pi_{s'} \otimes 1_X)\pi_s$, $a_{n-1}\pi_s = q^{\beta_{s'}}\pi_s = q^{\beta_t}\pi_s$. Par ailleurs, $a_n g_{n-1} = (s - s^{-1})a_n + g_{n-1}a_{n-1}$. Ainsi, $a\pi_s = \pi_s g_{n-1} \pi_s = q^{-\beta_s} \pi_s a_n g_{n-1} \pi_s = q^{-\beta_s}[(s - s^{-1})\pi_s a_n \pi_s + \pi_s g_{n-1} a_{n-1} \pi_s] = (s - s^{-1})\pi_s + q^{\beta_t - \beta_s} \pi_s g_{n-1} \pi_s = q^{\beta_t - \beta_s} a - (s - s^{-1})\pi_s$, de sorte que :

$$a = \frac{s - s^{-1}}{q^{\beta_t - \beta_s} - 1},$$

d'où par un simple calcul :

$$bc = 1 - \frac{1}{[d]_s^2} = \frac{[d+1]_s [d-1]_s}{[d]_s^2}. \quad \square$$

Avec les notations du lemme, on a $|d| + 1 < l$, donc $\frac{[d+1]_s [d-1]_s}{[d]_s^2} \in k^*$. Ainsi, le morphisme $\phi : W_s \to W_t$ correspondant à $\pi_t g_{n-1} \pi_s$ est un isomorphisme.

c) Soient $s, t \in T_\lambda$ quelconques. On peut trouver s_1, $t_1 \in T_\lambda$ tels que $s_1'' = t_1''$ et tels que s et s_1' (resp. t et t_1') soient de même forme. On a donc $W_s \xrightarrow{\sim} W_{s_1}$ (a), $W_{s_1} \xrightarrow{\sim} W_{t_1}$ (b), et $W_{t_1} \xrightarrow{\sim} W_t$ (a), d'où l'assertion 3).

Soit H le foncteur canonique $\widetilde{A(k)} \otimes_k \mathbb{C} \to \widetilde{A}$. Par 1), tout objet de $\widetilde{A(k)} \otimes_k \mathbb{C}$ est facteur direct d'une somme d'objets de la forme W_t ; le foncteur H est pleinement fidèle par 3), et essentiellement surjectif car son image contient les V_t, d'où 4). $\square$

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[**1**] H. H. Andersen, *Tensor products of quantized tilting modules*, Comm. Math. Phys. **149** (1991), pp. 149–159.

[**2**] C. Blanchet, *Hecke Algebras and 3-Dimensional Topology*, preprint (1997); à paraître dans Topology.

[**3**] A. Bruguières, *Dualité tannakienne pour les quasi-groupoïdes quantiques*, Comm. in Algebra, **25(3)** (1997), pp. 737–767.

[**4**] A. Bruguières, *Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension* 3, preprint (1998); à paraître dans Math. Ann.

[**5**] P. Deligne, lettre à D. N. Yetter (1990).

[**6**] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. de France, **90** (1962), pp. 323–448.

[**7**] A. Joyal et R. Street, *Braided Tensor Categories*, Adv. Math. **102** No 1 (1993), pp. 20–78.

[**8**] D. Kazhdan et H. Wenzl, *Reconstructing monoidal categories*, Adv. in Soviet Math. **16** No 2 (1993), pp. 111–136.

[**9**] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math. **5,** Springer Verlag (1971).

[**10**] G. Maltsiniotis, *Traces dans les catégories monoïdales, dualité et catégories monoïdales fibrées*, Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques **36** (**3**) (1995), pp 195–288.

[**11**] G. Masbaum et H. Wenzl, *Integral Modular Categories and Integrality of Quantum Invariants at Roots of Unity of Prime Order*, J. reine angew. Math. **505** (1998), pp 209–235.

[**12**] A. Ram et H. Wenzl, *Matrix Units for Centralizer Algebras*, J. of Alg. **145** (1992), pp. 378–395.

[**13**] M. C. Shum, *Tortile Tensor Categories*, J. of Pure and Appl. Alg. **93**, No 1 (1994), pp. 57-110.

[**14**] V. G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, de Gruyter (1994).

[**15**] D. N. Yetter, *Framed Tangles and a theorem of Deligne on braided deformations of Tannakian categories*, in *Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics,* Contemporary Mathematics **134**, American Mathematical Society (1992), pp. 325–345.