Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3

Alain Bruguières

Université Paris 7, Institut de mathématiques de Jussieu
2, place Jussieu, case 7012, 75251 Paris Cedex 05, France
e-mail : bruguier@ math.jussieu.fr

Abstract. An abelian k-linear semisimple category having a finite number of simple objects, and endowed with a ribbon structure, is called premodular. It is modular (in the sense of Turaev) if the so-called S-matrix is invertible. A modular category defines invariants of 3-manifolds and a TQFT ([T]).

When is it possible to construct a modularisation of a given premodular category, i. e. a functor to a modular category preserving the structures and 'dominant' in a certain sense? It turns out (2.3) that this amounts essentially to making 'transparent' objects trivial.

We give a full answer to this problem in the case when k is a field of char. 0 (as well as partial answers in char. p) : under a few obvious hypotheses, a premodular category admits a modularisation, which is unique (th. 3.1, and cor. 3.5 in char. 0) The proof relies on two main ingredients : a new and very simple criterion for the S-matrix to be invertible (1.1) and Deligne's internal characterization of tannakian categories in char. 0 [D].

When simple transparent objects are invertible, the criterion is simpler (4.2) and the modularisation can be described more explicitly (prop. 4.4). We conclude with two examples : the premodular categories associated with quantum SL_N and PGL_N at roots of unity; in the first case, we obtain modular categories which were built independently by C. Blanchet [B]; in the second case, we obtain modularizations in all the cases where Y. Yokota [Y] found Reshetikhin-Turaev invariants of 3-manifolds, thereby improving as well as explaining Yokota's results.

0. Introduction

Motivation. On sait que l'on peut associer à certains types de catégories monoïdales (voire à des n-catégories) des invariants topologiques en petite dimension. Ainsi, V. G. Turaev a introduit dans [T] la notion de catégorie modulaire, et montré comment l'on peut associer à une telle catégorie une TQFT (*Topological Quantum Field Theory*), et en particulier les invariants de 3-variétés de Reshetikhin-Turaev et Turaev-Viro.[1]

Une catégorie *prémodulaire* $\mathcal{C}$ sur un corps k est une 'catégorie rubanée', ou 'tortil', admettant une structure abélienne k-linéaire semi-simple avec un nombre fini d'objets 'simples'; elle est dite *modulaire* si une certaine matrice associée, la S-*matrice*, est inversible. L'inversibilité de la S-matrice est cruciale dans les travaux de Turaev : elle assure qu'une certaine couleur $\Omega_{\mathcal{C}}$ (*i. e.* une combinaison linéaire formelle d'objets simples) a la 'propriété de glissement d'anse locale' et satisfait un certain lemme d'annulation. Une telle couleur définit un invariant d'entrelacs qui permet de construire la TQFT.

Si, dans la pratique, on sait comment construire des catégories prémodulaires à partir de catégories de représentations de groupes quantiques aux racines de l'unité, l'inversibilité de la S-matrice est plus difficile à vérifier. Dans bien des cas, on rencontre des catégories

[1] La TQFT pour SL_2 a été construite dans [B-H-M-V] au moyen du crochet de Kauffman.

prémodulaires non modulaires, et on a pu constater de manière 'expérimentale' que ces catégories définissent souvent des invariants de Reshetikhin-Turaev, voire une TQFT. Par exemple, on sait construire pour $N>0$ et q racine de l'unité d'ordre $l>N$ une famille de catégories prémodulaires $\mathcal{C}_u$ 'de type SL_N' dépendant du choix d'une racine $2N$-ième u de q; $\mathcal{C}_u$ n'est modulaire que lorsque u^{2l} est d'ordre N, mais pour d'autres choix de u, C. Blanchet ([B]) a montré que $\mathcal{C}_u$ définit un invariant de Reshetikhin-Turaev, et qu'il est possible de lui associer une catégorie modulaire, et donc une TQFT. Pour PGL_N, Y. Yokota a obtenu un résultat similaire, sans toutefois construire de TQFT ([Y]).

Cette constatation appelle naturellement les questions suivantes. Quand peut-on associer à une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ un invariant de Reshetikhin-Turaev? Peut-on plonger $\mathcal{C}$ dans une catégorie modulaire $\mathcal{C}'$ qui définisse le même invariant?

Après avoir formalisé le problème de façon adéquate, nous obtiendrons (au moins en caractéristique nulle) une réponse simple à ces questions.

Plan. Dans la section 1, on rappelle ce qu'est une catégorie prémodulaire, et on formule un critère simple, à ma connaissance nouveau, pour l'inversibilité de la S-matrice (1.1). On montre que, même lorsque $\mathcal{C}$ n'est pas modulaire, la couleur $\Omega_{\mathcal{C}}=\sum \mathsf{dim}\, X\,[X]$ a la propriété de glissement d'anse locale, et satisfait un lemme d'annulation qui généralise celui de Turaev (1.4). On en déduit (1.7) l'existence de l'invariant de Reshetikhin-Turaev moyennant une hypothèse plus faible que l'inversibilité de la S-matrice.

Dans la section 2 sont introduites les notions de *modularisation* d'une catégorie prémodulaire, et de catégorie prémodulaire *modularisable*, qui constituent le cadre formel de ce travail, et, utilisant le critère 1.1, on donne une caractérisation des modularisations (2.3); on en déduit quelques conditions nécessaires, assez naturelles, pour qu'une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ soit modularisable.

La section 3 est dédiée au théorème principal de ce travail (3.1), dont le corollaire en caractéristique nulle (3.6) est que les conditions rencontrées au 2 sont suffisantes, et que la modularisation de $\mathcal{C}$, si elle existe, est unique. De plus, la modularisée définit le même invariant de Reshetikhin-Turaev que $\mathcal{C}$ (3.7, 3.8).

Au 4, on traite un cas particulier, incluant les cas SL_N et PGL_N, où l'on peut expliciter complètement la modularisation. On sait alors décrire comment un objet simple de $\mathcal{C}$ se 'casse' dans la modularisation.

Le 5 est consacré à SL_N et PGL_N. Dans ces exemples, les catégories modularisables sont exactement celles qui définissent un invariant de Reshetikhin-Turaev.

Je tiens à remercier C. Blanchet pour les longues discussions que nous avons eues; ses remarques sur les versions préliminaires de ce travail m'ont incité à en améliorer significativement certains résultats.

Dans une prépublication [Mü] diffusée après que le présent article ait été soumis, M. Müger démontre de manière indépendante l'analogue du théorème 3.1. pour les $*$-catégories tensorielles tressées. Ce cadre est plus restreint : $k=\mathbb{C}$, et les dimensions des objets sont réelles positives (dans les exemples de la section 5, il y a en général des objets de dimension négative). Dans ce cadre, M. Müger développe une théorie de Galois qui existe également dans le cadre des catégories prémodulaires ([Br2], article en préparation).

1. Catégories prémodulaires et modulaires

Tortils. Un *tortil*, ou *catégorie rubanée*, est une catégorie monoïdale (a) tressée (b), balancée (c), autonome (i), où la structure balancée est compatible à la dualité (ii). Autrement dit, c'est la donnée :

a) d'une catégorie $\mathcal{C}$ munie d'un bifoncteur associatif[2] $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ (le *produit tensoriel*), d'un objet I neutre pour $\otimes$ (l'*objet unité*);

b) d'un isomorphisme fonctoriel $R_{X,Y} : X\otimes Y \xrightarrow{\sim} Y\otimes X$ (le *tressage*) vérifiant :

$$R_{X,Y\otimes Z} = (1_Y \otimes R_{X,Z})(R_{X,Y}\otimes 1_Z) \quad \text{et} \quad R_{X\otimes Y,Z} = (R_{X,Z}\otimes 1_Y)(1_X\otimes R_{Y,Z})\,;$$

c) d'un isomorphisme fonctoriel $\theta_X : X \xrightarrow{\sim} X$ (la *structure balancée*) vérifiant :

$$\theta_{X\otimes Y} = R_{Y,X}(\theta_Y\otimes\theta_X)R_{X,Y}\,;$$

avec les conditions suivantes :

(i) pour tout objet X, il existe une *dualité* (X,Y,e,h), autrement dit un objet Y et des morphismes $e : X\otimes Y\to I$ (l'*évaluation*), $h : I\to Y\otimes X$ (la *coévaluation*), vérifiant :

$$(e\otimes 1_X)(1_X\otimes h) = 1_X \quad \text{et} \quad (1_Y\otimes e)(h\otimes 1_Y) = 1_Y\,;$$

(ii) pour toute dualité (X,Y,e,h), on a : $e(\theta_X\otimes 1_Y) = e(1_X\otimes\theta_Y)$, ou (de façon équivalente) $(\theta_Y\otimes 1_X)h = (1_Y\otimes\theta_X)h$.

Trace. Soit $\mathcal{C}$ un tortil, et supposons choisi pour tout X une dualité $(X, X^\vee, e_X, h_X)$. Cette donnée définit un *foncteur dual à droite* $?^\vee : \mathcal{C}^o\to\mathcal{C}$, $X\mapsto X^\vee$ (qui ne dépend du choix de duaux qu'à un isomorphisme canonique près). La compatibilité de θ aux duaux se traduit par : $\theta_{X^\vee} = (\theta_X)^\vee$. Posons $\varepsilon_X = e_X R_{X^\vee,X}(1_{X^\vee}\otimes\theta_X) = e_X R^{-1}_{X,X^\vee}(\theta^{-1}_{X^\vee}\otimes 1_X)$ et $\eta_X = (\theta^{-1}_X\otimes 1_{X^\vee})R^{-1}_{X,X^\vee}h_X = (1_X\otimes\theta_{X^\vee})R_{X^\vee,X}h_X$.

Pour X objet de $\mathcal{C}$ et $f\in\mathsf{End}(X)$, la *trace de* f est l'élément de $\mathsf{End}(I)$ défini par :

$$\mathsf{tr}(f) = \varepsilon_X(1_{X^\vee}\otimes f)h_X = e_X(f\otimes 1_{X^\vee})\eta_X\,.$$

La trace vérifie :

— $\mathsf{tr}(fg) = \mathsf{tr}(gf)$ pour $f\in\mathsf{Hom}(X,Y)$ et $g\in\mathsf{Hom}(Y,X)$;

— $\mathsf{tr}(f\otimes g) = \mathsf{tr}(f)\,\mathsf{tr}(g)$ pour $f\in\mathsf{End}(X)$, $g\in\mathsf{End}(Y)$;

— $\mathsf{tr}(u) = u$ pour $u\in\mathsf{End}(I)$;

— $\mathsf{tr}(f^\vee) = \mathsf{tr}(f)$.

En particulier, on appelle *dimension de* X, et on note $\dim X$, la trace de 1_X.

La notion de tortil a été introduite par Joyal et Street [J-S]. L'exemple fondamental en est la catégorie des enchevêtrements (tangles) orientés en rubans colorés par un ensemble Λ : c'est le tortil libre sur Λ; autrement dit, il est universel parmi les tortils munis d'une famille d'objets indexée par Λ (*cf.* Shum [Sh], et Turaev [T]).

[2] Les catégories monoïdales seront supposées strictes pour simplifier les notations.

Catégories prémodulaires. Désormais, on se donne un corps commutatif k.[3]

Définition. Une *catégorie prémodulaire* (sur k) est un tortil muni d'une structure de catégorie abélienne k-linéaire, avec les conditions suivantes :
a) le produit tensoriel est k-linéaire en chaque variable, et $\mathsf{End}(I) = k$;
b) tout objet est somme directe finie d'objets simples;
c) les classes d'isomorphisme d'objets simples forment un ensemble fini, et tout objet simple X est absolument simple (*i. e.* $\mathsf{End}(X) = k$).

Remarques.

1) Il résulte de la condition b) que $\mathcal{C}$ est *semi-simple*, autrement dit tout objet X de $\mathcal{C}$ est *projectif* (le foncteur $\mathsf{Hom}(X, ?)$ est exact).

2) Dans une catégorie prémodulaire, la dimension d'un objet simple est un scalaire inversible. En effet, si X est simple, $\mathsf{Hom}(X \otimes X^\vee, I) \simeq \mathsf{End}(X)$ est de dimension 1, de base e_X; de même, η_X est une base de $\mathsf{Hom}(I, X \otimes X^\vee)$. L'objet I étant facteur direct de $X \otimes X^\vee$, $\dim X = e_X \eta_X$ est inversible.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire. On note $\Lambda_\mathcal{C}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{C}$.

On note $\mathsf{Col}(\mathcal{C})$ la k-algèbre $\mathsf{Gr}(\mathcal{C}) \otimes_\mathbb{Z} k$, où $\mathsf{Gr}(\mathcal{C})$ est l'anneau de Grothendieck de $\mathcal{C}$. C'est un k-espace vectoriel de base $\Lambda_\mathcal{C}$, dont les éléments sont appelés les *couleurs de* $\mathcal{C}$.

Remarque. Étant donnée une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$, il résulte de la propriété universelle de la catégorie des enchevêtrements colorés qu'on peut associer à tout entrelacs L (en rubans, orienté) à composantes numérotées $1, \ldots, n$, une application n-linéaire $\mathsf{Col}(\mathcal{C})^n \longrightarrow k$, $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \langle L(\omega_1, \ldots, \omega_n)\rangle$. Pour $\omega \in \mathsf{Col}(\mathcal{C})$, on définit un invariant d'entrelacs en rubans orientés $\langle L(\omega)\rangle = \langle L(\omega, \ldots, \omega)\rangle$.

Par ailleurs, la k-algèbre des endomorphismes du foncteur identité de $\mathcal{C}$ s'identifie à $k^{\Lambda_\mathcal{C}}$ via l'isomorphisme canonique $\mathsf{End}(1_\mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} k^{\Lambda_\mathcal{C}}$, $\phi \mapsto (\phi_X)_{X \in \Lambda_\mathcal{C}}$.

Pour $X \in \Lambda_\mathcal{C}$, on notera $\pi^{(X)}$ le projecteur isotypique de type X, c'est-à-dire l'élément de $\mathsf{End}(1_\mathcal{C})$ défini, sur Y objet simple de $\mathcal{C}$, par :

$$\pi_Y^{(X)} = \begin{cases} 1_Y & \text{si } Y \simeq X, \\ 0 & \text{si } Y \not\simeq X. \end{cases}$$

Si X, Y sont des objets de $\mathcal{C}$, on note $(\mathcal{S}X)_Y$ l'endomorphisme de Y défini par :

$$(\mathcal{S}X)_Y = (\varepsilon_X \otimes 1_Y)(1_{X^\vee} \otimes R_{Y,X} R_{X,Y})(h_X \otimes 1_Y).$$

Ceci définit pour $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$ un élément $\mathcal{S}X$ de $\mathsf{End}(1_\mathcal{C})$.

Lemme. *L'application k-linéaire $\mathcal{S} : \mathsf{Col}(\mathcal{C}) \to \mathsf{End}(1_\mathcal{C})$, définie sur les classes d'objets simples par $[X] \mapsto \mathcal{S}X$, est un morphisme de k-algèbres.*

[3] Les résultats de cette section restent valables *mutatis mutandis* sur un anneau commutatif, *cf.* [Br1].

DÉMONSTRATION. On vérifie aisément que pour X, $Y \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, on a dans $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$: $\mathcal{S}(X \oplus Y) = \mathcal{S}X + \mathcal{S}Y$, et $\mathcal{S}(X \otimes Y) = \mathcal{S}X \circ \mathcal{S}Y$. De plus $\mathcal{S}I$ est l'identité. □

Définition. On dit que $\mathcal{C}$ est *modulaire* si $\mathcal{S}$ est bijectif.

REMARQUE. Pour X, Y objets de $\mathcal{C}$, on a

$$\mathsf{tr}[(\mathcal{S}X)_Y] = \mathsf{tr}[(\mathcal{S}Y)_X] = \mathsf{tr}(R_{Y,X}R_{X,Y}).$$

Pour X, $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, ce scalaire n'est autre que le coefficient de la 'S-matrice' $s_{X,Y}$, de sorte que $\mathcal{S}$ a pour matrice $(\mathsf{dim}(Y)^{-1}s_{X,Y})_{X,Y\in\Lambda_{\mathcal{C}}}$ dans les bases canoniques. En particulier, la bijectivité de $\mathcal{S}$ équivaut à l'inversibilité de la S-matrice.

Critère d'inversibilité de la S-matrice.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie prémodulaire, posons

$$M_{\mathcal{C}} = \{X \in \Lambda_{\mathcal{C}} \mid \forall Y \in \Lambda_{\mathcal{C}},\, s_{X,Y} = \mathsf{dim}\, X\, \mathsf{dim}\, Y\}.$$

Les éléments de $M_{\mathcal{C}}$ sont les objets simples dont la colonne dans la S-matrice est colinéaire à celle de l'objet unité.

1.1. Proposition.
Une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ est modulaire si et seulement si $M_{\mathcal{C}} = \{I\}$.

Autrement dit, une S-matrice est inversible si et seulement si le vecteur colonne de l'objet unité n'est colinéaire à aucun autre vecteur colonne.

DÉMONSTRATION. Si $\mathcal{C}$ est modulaire, $M_{\mathcal{C}}$ est réduit à $\{I\}$, deux vecteurs colonne d'une matrice inversible n'étant jamais proportionnels. La réciproque résulte des deux lemmes suivants, dont le premier est dû à Turaev.

1.2. Lemme. *Soit $\mathcal{C}$ prémodulaire. Si $\pi^{(I)}$ appartient à l'image de $\mathcal{S}$, $\mathcal{C}$ est modulaire.*

DÉMONSTRATION. Soit $\omega = \sum_{W\in\Lambda_{\mathcal{C}}} \omega_W[W]$ une couleur telle que $\mathcal{S}\omega = \pi^{(I)}$. Soient X, Y deux objets simples de $\mathcal{C}$, et calculons de deux façons différentes le scalaire $t_{X,Y} = \mathsf{tr}[(\mathcal{S}\omega)_{X\otimes Y}]$.

Il résulte du choix de ω que

$$t_{X,Y} = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \simeq X^\vee, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, $t_{X,Y} = \mathsf{tr}(\pi^{(I)}_{X\otimes Y})$. Si $Y \not\simeq X^\vee$, I n'est pas facteur direct de $X \otimes Y$ donc $\pi^{(I)}_{X\otimes Y} = 0$; si par contre $Y = X^\vee$, I figure dans $X \otimes Y$ avec multiplicité 1, donc $\mathsf{tr}(\pi^{(I)}_{X\otimes Y}) = \mathsf{dim}\, I = 1$.

D'autre part, $t_{X,Y} = \sum_W \omega_W\, \mathsf{tr}[(\mathcal{S}W)_{X\otimes Y}]$; or $\mathsf{tr}[(\mathcal{S}W)_{X\otimes Y}] = \mathsf{tr}[\mathcal{S}(X \otimes Y)_W] = \mathsf{tr}[(\mathcal{S}X)_W\circ(\mathcal{S}Y)_W] = (\mathsf{dim}\, W)^{-1}s_{X,W}s_{Y,W}$; d'où $t_{X,Y} = \sum_{W\in\Lambda_{\mathcal{C}}} \omega_W(\mathsf{dim}\, W)^{-1}s_{W,X}s_{W,Y}$. Posant

$$\omega^{(X)} = \sum_W \omega_W(\mathsf{dim}\, W)^{-1}s_{W,X}[W],$$

il vient $t_{X,Y} = \mathsf{tr}[(\mathcal{S}\omega^{(X)})_Y]$.

Ainsi $\mathsf{dim}\, X\, \mathcal{S}\omega^{(X)} = \pi^{(X^\vee)}$, ce qui montre que $\mathcal{S}$ est surjectif, donc bijectif. □

Notons $\mu^{\mathcal{C}}$ l'élément de $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$ défini par :

$$\mu^{\mathcal{C}} = \sum_{X \in M_{\mathcal{C}}} \pi^{(X)} .$$

1.3. Lemme. *Soit $\mathcal{C}$ prémodulaire. Alors $\mu^{\mathcal{C}}$ appartient à l'image de $\mathcal{S}$.*

Démonstration.

Rappelons que $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}})$ s'identifie comme k-algèbre à $k^{\Lambda_{\mathcal{C}}}$. Notons $\mathcal{A}$ l'image du morphisme $\mathcal{S}$, vue comme sous-algèbre de $k^{\Lambda_{\mathcal{C}}}$.

Observons tout d'abord que pour $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, on a :

$$X \in M_{\mathcal{C}} \Longleftrightarrow \forall a \in \mathcal{A},\, a_X = a_I .$$

En effet, soient $X \in M_{\mathcal{C}}$, ω une couleur de $\mathcal{C}$, et $a = \mathcal{S}\omega$. Alors $\mathsf{tr}(a_X) = \mathsf{tr}[\mathcal{S}(\omega)_X] = \sum_{Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}} \omega_Y s_{Y,X} = \sum_Y \omega_Y \,\mathsf{dim}\, X \,\mathsf{dim}\, Y = (\mathcal{S}\omega)_I \,\mathsf{dim}\, X = a_I \,\mathsf{dim}\, X$, d'où $a_X = a_I$ (comme scalaires). D'autre part, si $X \notin M_{\mathcal{C}}$, il existe $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ tel que $s_{X,Y} \neq \mathsf{dim}\, X \,\mathsf{dim}\, Y$, donc posant $a = \mathcal{S}(\mathsf{dim}\, X\, [Y])$, $a_X = s_{X,Y} \neq \mathsf{dim}\, X \,\mathsf{dim}\, Y = a_I$.

Cette observation signifie que les éléments de $M_{\mathcal{C}}$ sont exactement les éléments de $\Lambda_{\mathcal{C}}$ qui ne sont pas distingués de l'élément I par l'algèbre $\mathcal{A}$. Il existe donc $a \in \mathcal{A}$ tel que

$$a_X = \begin{cases} 1 & \text{si } X \in M_{\mathcal{C}}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit, $a = \mu^{\mathcal{C}} \in \mathcal{A}$. $\square$

En particulier, si $M_{\mathcal{C}} = \{I\}$, $\mu^{\mathcal{C}} = \pi^{(I)}$ appartient à l'image de $\mathcal{S}$, et $\mathcal{C}$ est modulaire par 1.2. $\square$

La couleur $\Omega_{\mathcal{C}}$.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire. Considérons les couleurs

$$\Omega_{\mathcal{C}} = \sum_{X \in \Lambda_{\mathcal{C}}} \mathsf{dim}\, X\, [X], \quad \Omega_{\mathcal{C}}^{\pm} = \sum_{X \in \Lambda_{\mathcal{C}}} \theta_X{}^{\pm 1}\, \mathsf{dim}\, X\, [X] ,$$

et posons $\Delta_{\mathcal{C}} = (\mathcal{S}\Omega_{\mathcal{C}})_I = \sum_{X \in \Lambda_{\mathcal{C}}} (\mathsf{dim}\, X)^2$, $\Delta_{\mathcal{C}}^{\pm} = (\mathcal{S}\Omega_{\mathcal{C}}^{\pm})_I = \sum_{X \in \Lambda_{\mathcal{C}}} \theta_X{}^{\pm 1} (\mathsf{dim}\, X)^2$.

On omettra l'indice $\mathcal{C}$ dans ces notations lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur la catégorie prémodulaire considérée.

Notant respectivement U, $U^{\pm}$ les nœuds triviaux d'auto-enlacements respectifs 0 et ± 1, on a $\Delta = \langle U(\Omega) \rangle$ et $\Delta^{\pm} = \langle U^{\pm}(\Omega) \rangle$.

1.4. Lemme. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire. On a :*

1) pour tout $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, $[X]\Omega = \mathsf{dim}\, X\, \Omega$;

2) $\mathcal{S}\Omega = \Delta\, \mu^{\mathcal{C}}$ ('lemme d'annulation généralisé');

3) $\mathcal{S}\Omega^{+} = \Delta^{+}\, \theta^{-1}$ et $\mathcal{S}\Omega^{-} = \Delta^{-}\, \theta$ ('propriété de glissement d'anse locale').

Démonstration.

1) Pour $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ et $Y \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$, notons $\mu_{X,Y}$ la multiplicité de X dans Y. Si X, Y, Z sont simples, $\mu_{Z,X\otimes Y} = \mathsf{dim}\,\mathsf{Hom}(X \otimes Y, Z) = \mathsf{dim}\,\mathsf{Hom}(Y, X^\vee \otimes Z)$ (par adjonction) $= \mu_{Y,X^\vee\otimes Z}$. On a $[X]\Omega = \sum_Y \mathsf{dim}\,Y\,[X][Y] = \sum_{Y,Z} \mathsf{dim}\,Y\,\mu_{Z,X\otimes Y}\,[Z] = \sum_{Y,Z} \mathsf{dim}\,Y\,\mu_{Y,X^\vee\otimes Z}\,[Z] = \sum_Z \mathsf{dim}(X^\vee \otimes Z)\,[Z] = \mathsf{dim}\,X^\vee\,\Omega = \mathsf{dim}\,X\,\Omega$.

2) Soit $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$. Alors $(\mathcal{S}\Omega)_X = \Delta$ si $X \in M_{\mathcal{C}}$. D'autre part, pour tout $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ on a $\mathsf{dim}\,Y\,(\mathcal{S}\Omega)_X = \mathcal{S}([Y]\Omega)_X = \mathcal{S}[Y]_X\,(\mathcal{S}\Omega)_X$. Si $X \notin M_{\mathcal{C}}$, on peut trouver Y tel que $\mathcal{S}[Y]_X \neq \mathsf{dim}\,Y$, donc $(\mathcal{S}\Omega)_X = 0$.

3) Montrons par exemple la première identité. Le scalaire $\langle U^+([X]\Omega)\rangle$ est égal à $\mathsf{tr}[\theta_X(\mathcal{S}\Omega^+)_X] = \theta_X\,\mathsf{dim}\,X\,(\mathcal{S}\Omega^+)_X$, et, par (1), il vaut aussi $\mathsf{dim}\,X\,\Delta^+$. □

1.5. Remarques. Les faits suivants résultent du lemme.

1) Si Δ est inversible, $\mathcal{S}(\Delta^{-1}\Omega) = \mu^{\mathcal{C}}$; toutefois, il existe des catégories prémodulaires pour lesquelles Δ est nul.

2) On a toujours

$$\Delta^+\Delta^- = \Delta \sum_{X\in M_{\mathcal{C}}} \theta_X(\mathsf{dim}\,X)^2\,;$$

En effet, calculons $H = \sum_{X,Y\in\Lambda_{\mathcal{C}}} \mathsf{dim}\,X\ \mathsf{dim}\,Y\,\theta_Y\,s_{X,Y}$ de deux façons. D'une part,

$$H = \sum_Y \theta_Y\,\mathsf{dim}\,Y\,\mathsf{tr}[(\mathcal{S}\Omega)_Y] = \Delta \sum_{Y\in M_{\mathcal{C}}} (\mathsf{dim}\,Y)^2\theta_Y$$

d'après l'assertion (2) du lemme, et d'autre part,

$$H = \sum_X \mathsf{dim}\,X\ \mathsf{tr}[(\mathcal{S}\Omega^+)_X] = \Delta^+\Delta^-$$

d'après l'assertion (3).

3) Si $\mathcal{C}$ est modulaire, Δ est inversible d'après l'assertion (2) du lemme (car $\Omega \neq 0$ et $\mathcal{S}$ est injectif), et, $M_{\mathcal{C}}$ étant réduit à $\{I\}$, $\Delta^+\Delta^- = \Delta$ donc Δ^+ et Δ^- sont inversibles.

Invariants associés à certaines catégories prémodulaires. On sait que toute 3-variété orientée compacte connexe sans bord M est isomorphe à la variété S^3_L obtenue à partir de la sphère S^3 par chirurgie le long d'un entrelacs en rubans $L \subset S^3$. Deux tels entrelacs définissent des variétés isomorphes si et seulement si on peut passer de l'un à l'autre par un nombre fini de mouvements de Kirby de type $K^\pm$ ou leurs inverses. Un mouvement de Kirby de type $K^\pm$ est une transformation locale consistant, lorsqu'un entrelacs en rubans présente un faisceau de n brins parallèles formant une torsade de signe $\mp$, à remplacer cette partie de l'entrelacs par un faisceau de n brins parallèles non torsadés traversant une composante $U^\pm$.

Si L est un entrelacs en rubans, et ε un signe $(0,+,-)$, on note $b_\varepsilon(L)$ le nombre de valeurs propres de signe ε de la matrice d'enlacement de L. Si $M = S^3_L$, $b_0(L)$ n'est autre que le premier nombre de Betti de M, qu'on notera $h_1(M)$.

1.6. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire telle que Δ^+ et Δ^- soient inversibles. Alors l'invariant d'entrelacs en rubans :*

$$L \mapsto \frac{\langle L(\Omega)\rangle}{\Delta^{+b_+(L)}\Delta^{-b_-(L)}}$$

est invariant par les mouvements de Kirby.

Démonstration. L'invariant d'entrelacs en rubans $L \mapsto \langle L(\Omega_{\mathcal{C}})\rangle$ ne dépend pas de l'orientation car $\mathsf{dim}\, X^\vee = \mathsf{dim}\, X$ pour $X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$. Un mouvement de Kirby de type $K^\pm$ augmente $b_\pm$ de 1 en laissant $b_\mp$ inchangé. En effet, il se décompose en l'adjonction d'une composante $U^\pm$, suivie d'un glissement d'anses qui ne change pas la signature de la matrice d'enlacement. La proposition résulte alors immédiatement de l'assertion (3) du lemme 1.4. □

1.7. Corollaire. *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie prémodulaire pour laquelle Δ^+ et Δ^- sont inversibles, on définit un invariant de variétés de dimension 3 en posant pour $M \simeq {S^3}_L$:*

$$I'_{\mathcal{C}}(M) = \frac{\langle L(\Omega_{\mathcal{C}})\rangle}{\Delta^{+b_+(L)}\Delta^{-b_-(L)}}. \qquad \square$$

1.8. Remarque. L'invariant de Reshetikhin-Turaev proprement dit, $I_{\mathcal{C}}$, correspond à une normalisation légèrement différente : $I_{\mathcal{C}}(M) = D^{-h_1(M)} I'_{\mathcal{C}}(M)$, où D est une racine carrée de $\widetilde{\Delta} = \Delta^+\Delta^-$ ($\widetilde{\Delta} = \Delta$ si $\mathcal{C}$ est modulaire.) Enfin, l'invariant de Turaev-Viro de M est :

$$TV_{\mathcal{C}}(M) = I_{\mathcal{C}}(M \# \overline{M}) = \widetilde{\Delta}^{-h_1(M)} I'_{\mathcal{C}}(M \# \overline{M}).$$

Observons que s'il est nécessaire de se donner une racine carrée de $\widetilde{\Delta}$ dans k pour définir $I_{\mathcal{C}}$, ce n'est le cas ni pour $I'_{\mathcal{C}}$, ni pour $TV_{\mathcal{C}}$.

2. Foncteurs entre catégories prémodulaires et modularisations

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire; une modularisation de $\mathcal{C}$ sera un foncteur de $\mathcal{C}$ vers une catégorie modulaire $\mathcal{C}'$ ayant des propriétés 'raisonnables'. D'une part, F doit être compatible aux structures : c'est un k-foncteur tortil. D'autre part, $\mathcal{C}'$ ne doit pas être beaucoup plus grande que $\mathcal{C}$: F est dominant. Précisons ces notions.

Définition. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories prémodulaires. Un *k-foncteur tortil* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est un foncteur monoïdal k-linéaire compatible aux tressages et aux structures balancées.

Un k-foncteur tortil $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ est fidèle et exact. (Tout objet de $\mathcal{C}$ est somme directe finie d'objets simples, et pour X objet simple de $\mathcal{C}$, $F(X)$ est non nul car $\mathsf{dim}\, F(X) = \mathsf{dim}\, X \neq 0$.)

D'autre part, F induit un morphisme de k-algèbres $F_! : \mathsf{Col}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathsf{Col}(\mathcal{C}')$ défini comme suit : pour $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, $F(X)$ s'écrit $\bigoplus_{Y \in \Lambda_{\mathcal{C}'}} Y^{\nu_{Y,X}}$, les $\nu_{Y,X}$ étant des entiers naturels; et on pose $F_![X] = \sum_Y \nu_{Y,X}[Y]$.

2.1. Remarques.

1) Si L est un entrelacs à composantes numérotées $1,\dots,n$, et $\omega_1,\dots,\omega_n$ sont des couleurs de $\mathcal{C}$, alors $\langle L(F_!\omega_1,\dots,F_!\omega_n)\rangle = \langle L(\omega_1,\dots,\omega_n)\rangle$.

2) Pour tout $\omega \in \mathsf{Col}(\mathcal{C})$ et tout X objet de $\mathcal{C}$, on a : $F(\mathcal{S}(\omega)_X) = \mathcal{S}(F_!\omega)_{F(X)}$.

Définitions. Soient X, Y deux objets d'une catégorie. On dit que X *est un rétracte de* Y s'il existe des morphismes $i : X \to Y$, $p : Y \to X$ tels que $p\,i = 1_X$. On dit qu'un foncteur F est *dominant* si tout objet de la catégorie but est un rétracte de l'image par F d'un objet de la catégorie source.

Définitions. Soit $\mathcal{C}$ prémodulaire. Nous appellerons *modularisation de* $\mathcal{C}$ un k-foncteur tortil dominant $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, avec $\mathcal{C}'$ modulaire. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est *modularisable* si elle admet une modularisation.

Afin de caractériser les catégories prémodulaires modularisables, il convient d'abord de caractériser les modularisations. Nous aurons pour cela besoin de la notion d'objet transparent.

Définition. Un objet X d'une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ est *transparent* si pour tout objet Y de $\mathcal{C}$, $R_{Y,X} = R^{-1}_{X,Y}$.

Dans une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$, une somme finie d'objets transparents, un facteur direct d'un objet transparent, sont encore transparents. On note $T_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples transparents de $\mathcal{C}$. Si $X \in T_{\mathcal{C}}$, on a $X \in M_{\mathcal{C}}$, et $\theta_X = \pm\, 1_X$.

2.2. Lemme. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories prémodulaires et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un k-foncteur tortil dominant.*

Soit X un objet simple de $\mathcal{C}$, et Y un facteur direct simple de $F(X)$. Alors :

1) si $X \in T_{\mathcal{C}}$, $Y \in T_{\mathcal{C}'}$;

2) si $Y \in M_{\mathcal{C}'}$, $X \in M_{\mathcal{C}}$.

En particulier, si $M_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}}$, $M_{\mathcal{C}'} = T_{\mathcal{C}'}$.

Démonstration.

1) Supposons X transparent. Puisque F est tressé, on a dans $\mathcal{C}'$: $R'_{F(X),Z} = R'^{-1}_{Z,F(X)}$ pour $Z \in \mathsf{Im}(F)$, donc pour Z quelconque puisque F est dominant; autrement dit, $F(X)$ est transparent, ainsi que ses facteurs directs.

2) Soit X' un objet simple quelconque de $\mathcal{C}$; on a d'après 2.1 (2) : $F(\mathcal{S}[X']_X) = (\mathcal{S}\,F_![X'])_{F(X)}$, donc les scalaires $(\mathcal{S}[X'])_X$ et $(\mathcal{S}F_![X'])_Y$ coïncident; si $Y \in M_{\mathcal{C}'}$, on a $(\mathcal{S}F_![X'])_Y = (\mathcal{S}F_![X'])_{I'} = \mathsf{dim}\,X'$. Ainsi, $\mathcal{S}[X']_X = \mathsf{dim}\,X'$, d'où $s_{X,X'} = \mathsf{dim}\,X\,\mathsf{dim}\,X'$, ce qui montre que $X \in M_{\mathcal{C}}$.

En particulier, si $M_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}}$, tout $Y \in M_{\mathcal{C}'}$ est facteur direct de l'image de $F(X)$ pour un certain $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, qui appartient à $M_{\mathcal{C}}$ par (2); X est donc transparent par hypothèse, et il en va de même de Y par (1). Ainsi, $M_{\mathcal{C}'} = T_{\mathcal{C}'}$. $\square$

Définition. Un objet d'une catégorie prémodulaire est dit *trivial* s'il est isomorphe à une somme de copies de l'objet unité.

2.3. Proposition. *Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories prémodulaires, et $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un k-foncteur tortil dominant. Considérons les assertions suivantes :*

(i) F est une modularisation;

(ii) pour tout $X \in T_{\mathcal{C}}$, $F(X)$ est trivial;

(ii') pour tout $X \in M_{\mathcal{C}}$, $F(X)$ est trivial.

Alors :

1) (i) implique (ii);

2) (ii') implique (i);

3) si $\mathsf{car}\, k = 0$, (i) implique $M_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}}$, donc (i) équivaut à (ii').

2.4. Remarque. En particulier si $\mathcal{C}$ est modularisable, alors pour tout objet transparent X de $\mathcal{C}$, $\theta_X = 1_X$, et $\mathsf{dim}\, X$ est l'image dans k d'un entier naturel.

Démonstration.

Supposons que F soit une modularisation. Si $X \in T_{\mathcal{C}}$, tous les facteurs simples de $F(X)$ sont transparents, donc isomorphes à I' puisque $\mathcal{C}'$ est modulaire; d'où (1).

Supposons : $X \in M_{\mathcal{C}}$ implique $F(X)$ trivial; montrons que $\mathcal{C}'$ est alors modulaire. Soit $Y \in M_{\mathcal{C}'}$. D'après le lemme 2.2, tout $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ tel que Y soit facteur direct de $F(X)$ appartient à $M_{\mathcal{C}}$. Pour un tel X, $F(X)$ est trivial donc $Y = I'$, et $\mathcal{C}'$ est modulaire par 1.1. D'où (2).

Reste à vérifier qu'en caractéristique nulle, (i) implique $M_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}}$. Soit $X \in M_{\mathcal{C}}$, et posons $\omega = [X] - \mathsf{dim}\, X[I] \in \mathsf{Col}(\mathcal{C})$. Alors pour $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, $(\mathcal{S}\omega)_Y = (\mathsf{dim}\, Y)^{-1} s_{X,Y} - \mathsf{dim}\, X = 0$. Il s'ensuit $(\mathcal{S}F_!\omega)_{F(Y)} = 0$, donc, F étant dominant, $\mathcal{S}F_!\omega = 0$ dans $\mathsf{End}(1_{\mathcal{C}'})$. Si $\mathcal{C}'$ est modulaire, ceci implique $F_!\omega = 0$, soit $F_![X] = \mathsf{dim}\, X\, F_![I] = \mathsf{dim}\, X\, [I']$. Pour tout $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}'}$, on a alors dans k : $\nu_{Y,X} = 0$ si $Y \not\simeq I'$ et $\nu_{I',X} = \mathsf{dim}\, X$. En caractéristique nulle, ceci implique que $F(X)$ est trivial; il est donc transparent, ainsi que X. D'où (3). □

Définitions. Une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ est dite *tannakienne neutre* s'il existe une modularisation de $\mathcal{C}$ à valeurs dans la catégorie $\mathsf{vect}\, k$ des k-espaces vectoriels de dimension finie. Elle est dite *tannakienne* s'il existe une extension algébrique L de k telle que $\mathcal{C} \otimes_k L$ soit tannakienne neutre sur L.

2.5. Remarques.

1) Supposons $\mathsf{car}\, k = 0$, et soit G un groupe fini. Soit $\mathsf{rep}\, G$ la catégorie des représentations k-linéaires de dimension finie de G, munie de sa structure monoïdale symétrique standard, et de la structure balancée triviale ($\theta = 1$) : $\mathsf{rep}\, G$ est une catégorie prémodulaire tannakienne neutre, admettant pour modularisation le foncteur oubli.

Ceci reste encore vrai en caractéristique $p > 0$ si l'ordre de G est premier à p.

2) Si $\mathsf{car}\, k = 0$, toute catégorie prémodulaire tannakienne neutre est de ce type. En effet, soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire admettant une modularisation $F : \mathcal{C} \to \mathsf{vect}\, k$. Alors $\mathcal{C}$ est symétrique, θ est l'identité, et F est un foncteur fibre. On sait qu'alors $\mathcal{C}$ est équivalente à la catégorie des représentations de dimension finie du groupe G des automorphismes du foncteur fibre, qui est *a priori* un groupe algébrique affine sur k (voir [D-M], [D]). Puisque $\mathcal{C}$ est semi-simple avec un nombre fini d'objets simples, la k-algèbre des fonctions sur G est de dimension finie égale à la somme des carrés des dimensions des

objets simples de $\mathcal{C}$, c'est-à-dire $\Delta_{\mathcal{C}}$. Le groupe G est donc un groupe fini discret (d'ordre $\Delta_{\mathcal{C}}$) si $\operatorname{car} k = 0$; c'est vrai plus généralement chaque fois que $\Delta_{\mathcal{C}}$ est inversible dans k.

3) Si $\operatorname{car} k = 0$, $\mathcal{C}$ est tannakienne si et seulement si pour tout $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}, \theta_X = 1$ et $\dim X \in \mathbb{N}$. C'est un cas particulier de la caractérisation interne des catégories tannakiennes due à Deligne ([D], théorème 7.1). (La condition $\theta = 1$ entraine que $\mathcal{C}$ est symétrique).

4) Si tout $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ est inversible,[4] $\Lambda_{\mathcal{C}}$ est un groupe pour le produit tensoriel. En ce cas, $\mathcal{C}$ est tannakienne si et seulement si $\forall X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, $\theta_X = 1$ et $\dim X = 1$ (*cf.* 4.3).

3. Le théorème principal : critère de modularisabilité

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie prémodulaire, notons $\mathcal{C}_T$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ des objets transparents, qui ne sont autres que les sommes directes finies d'éléments de $T_{\mathcal{C}}$. C'est une sous-catégorie prémodulaire symétrique de $\mathcal{C}$.

3.1. Théorème. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire, et faisons les hypothèses suivantes :*

1) tout $X \in M_{\mathcal{C}}$ est transparent;

2) $\mathcal{C}_T$ est tannakienne;

3) $\Delta_{\mathcal{C}_T}$ est inversible dans k.

Alors on peut construire une modularisation $H : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$, minimale en ce sens que toute modularisation de $\mathcal{C}$ se factorise à travers H.

Remarque. Si $\operatorname{car} k = 0$, la condition (3) est conséquence de (2) puisque $\Delta_{\mathcal{C}_T} = \sum_{X \in T_{\mathcal{C}}} (\dim X)^2$ est alors un entier > 0.

Démonstration. Compte tenu de la proposition 2.3, le théorème résultera immédiatement de la proposition suivante (prenant $\widetilde{\mathcal{C}} = \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ pour $\mathcal{A} = \mathcal{C}_T$).

3.2. Proposition. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire, et $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_T$ une sous-catégorie prémodulaire pleine tannakienne telle que $\Delta_{\mathcal{A}}$ soit inversible dans k.*

Il existe une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ munie d'un k-foncteur tortil $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$ tel que, pour tout $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{A}$, $F(X)$ soit trivial, et minimale en ce sens que tout k-foncteur tortil $F' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ayant la même propriété se factorise à travers F.

De plus, le foncteur F est dominant.

Démonstration. La catégorie prémodulaire $\mathcal{A}$ admet par hypothèse une modularisation (ou foncteur fibre) $\omega : \mathcal{A} \to \operatorname{vect} k$, qu'il s'agit en quelque sorte d'épaissir en un k-foncteur tortil $\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{A}}$. Notons qu'on a $\theta_X = 1_X$ pour X objet de $\mathcal{A}$.

D'après la remarque 2.5 (2), $\mathcal{A}$ est équivalente à $\operatorname{rep} G$ pour un certain groupe fini G. L'image dans k de l'ordre de G est le scalaire inversible $\Delta_{\mathcal{A}}$.

Il existe dans $\mathcal{A}$ une algèbre A, de produit $\mu : A \otimes A \to A$ et d'unité $\eta : I \to A$, ayant les propriétés suivantes :

— A est commutative ($\mu R_{A,A} = \mu$);

[4] Un objet X est dit *inversible* s'il existe un objet Y tel que $X \otimes Y \simeq I$.

— A est trivialisante : pour tout objet X de $\mathcal{A}$, il existe un isomorphisme de A-modules $A \otimes X \xrightarrow{\sim} A^n$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$;

— $\mathsf{Hom}(I, A)$ est un k-espace vectoriel de dimension 1 engendré par η.

Dans l'équivalence $\mathsf{rep}\, G \simeq \mathcal{A}$, A correspond à l'algèbre k^G, munie de l'action de G définie par $g \cdot \phi = \phi \circ R_g$ (où R_g est la translation à droite).

De plus, il existe un morphisme $\gamma : I \to A \otimes A$ vérifiant :

$$(\mu \otimes 1_A)(1_A \otimes \gamma) = (1_A \otimes \mu)(\gamma \otimes 1_A) \quad \text{et} \quad \mu\gamma = \eta .$$

Dans $\mathsf{rep}\, G$, γ correspond à l'application G-équivariante $k \to k^{G\times G}$ qui envoie 1 sur la fonction caractéristique de la diagonale.

Soit $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ la catégorie des objets de $\mathcal{C}$ munis d'une structure de A-module à gauche. On notera Hom (resp. Hom_A) les espaces de morphismes dans $\mathcal{C}$ (resp. $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$).

3.3. Lemme. *La catégorie $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ est prémodulaire, et le foncteur $F : \mathcal{C} \to A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$, $X \mapsto A \otimes X$, est un k-foncteur tortil dominant.*

Démonstration. Rappelons que $\mathcal{C}$ est abélienne k-linéaire semi-simple. La catégorie $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ est abélienne k-linéaire, et le foncteur oubli $U : A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}$ est exact. Le foncteur F est k-linéaire exact, adjoint à gauche à U : si $X \in \mathsf{Ob}(\mathcal{C})$, $\mathsf{Hom}_A(A \otimes X, ?) \simeq \mathsf{Hom}(X, U(?))$. Il en résulte que $F(X)$ est un objet projectif de $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$.

Par ailleurs, le fait que A soit commutative et transparente permet (exactement comme en algèbre commutative) de munir la catégorie $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ et le foncteur F de structures monoïdales tressées (produit tensoriel $\otimes_A$, objet unité A; le tressage $N \otimes_A N' \simeq N' \otimes_A N$ provient du tressage $N \otimes N' \xrightarrow{\sim} N' \otimes N$ par passage au quotient). L'anneau des endomorphismes de l'objet unité est $\mathsf{Hom}_A(A, A) \simeq \mathsf{Hom}(I, A) = k$.

De plus, le fait que $\theta_A = 1_A$ permet de munir $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ d'une structure balancée, définie sur un module N par $\theta_N = \theta_{N^0}$, N^0 étant l'objet de $\mathcal{C}$ sous-jacent à N. Le foncteur F est compatible aux structures balancées.

Supposons démontré que F est dominant. Soit N un objet de $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$; il existe un objet X de $\mathcal{C}$ et un projecteur π de $F(X)$ tel que $N \simeq \mathsf{Im}(\pi)$.

Alors, F étant monoïdal, $F(X^\vee)$ est un dual de $F(X)$, donc N admet pour dual $\mathsf{Im}(\pi^\vee)$. De plus, $\theta_{N^\vee} = (\theta_N)^\vee$ (car c'est vrai pour $N = F(X)$). Ceci montre que $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ est un tortil. D'autre part, N est projectif, ce qui montre que $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ est semi-simple. Puisque les Hom_A sont de dimension finie, tout objet est somme directe finie d'objets simples. Les objets simples de $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ sont absolument simples car k est algébriquement clos, et en nombre fini (à isomorphisme près) car ce sont les facteurs simples des images par F des objets simples de $\mathcal{C}$, eux-mêmes en nombre fini.

Ainsi, $A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$ est prémodulaire et F est un k-foncteur tortil. Reste à démontrer que F est dominant, ce qui résultera immédiatement du lemme suivant appliqué à $B = A$ et $\mathcal{T} = \mathcal{C}$.

3.4. Lemme. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie monoïdale, et (B, μ, η) une algèbre de $\mathcal{T}$.*

On suppose qu'il existe un morphisme $\gamma : I \longrightarrow B \otimes B$ vérifiant :

1) $(\mu \otimes 1_B)(1_B \otimes \gamma) = (1_B \otimes \mu)(\gamma \otimes 1_B)$;

2) $\mu\gamma = \eta$.

Alors tout B-module à gauche N est un rétracte du module $B \otimes N^0$ (où N^0 est l'objet de $\mathcal{T}$ sous-jacent à N).

Démonstration.

Soit μ_N la multiplication $B \otimes N^0 \to N$, qui est B-linéaire, et i_N le morphisme $(1_B \otimes \mu_N)(\gamma \otimes 1_{N^0}) : N^0 \to B \otimes N$, dont l'hypothèse (1) assure la B-linéarité. L'hypothèse (2) implique : $\mu_N i_N = 1_N$. □ □

On pose donc $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}}$, et seule la propriété de minimalité reste à démontrer. Soit $H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un k-foncteur tortil tel que $H(X)$ soit trivial pour $X \in \mathsf{Ob}\,\mathcal{A}$. Le foncteur H induit un foncteur monoïdal tressé $H_1 : \mathcal{C}^{\mathcal{A}} = A - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}} \longrightarrow H(A) - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}'}$.

Or $H(A)$ est une algèbre commutative de $\mathcal{C}'$ d'objet sous-jacent trivial. La sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}'$ des objets triviaux s'identifie à $\mathsf{vect}\,k$ via le foncteur $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(I', ?)$, et dans cette identification $H(A)$ correspond à une k-algèbre commutative non nulle. Il existe donc un morphisme d'algèbres $H(A) \to I'$. Un tel morphisme induit un foncteur monoïdal tressé $H_2 = I' \otimes_{H(A)} ? : H(A) - \mathsf{mod}_{\mathcal{C}'} \to \mathcal{C}'$.

D'où un foncteur k-linéaire monoïdal tressé $\widetilde{H} = H_2 \circ H_1 : \mathcal{C}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{C}'$. On vérifie aisément que H_2 est compatible aux structures balancées et pour X objet de $\mathcal{C}$, $\widetilde{H}(F(X)) = I' \otimes_{H(A)} H(A) \otimes H(X)$ est canoniquement isomorphe à $H(X)$. Ceci achève la démonstration de 3.2, et donc de 3.1. □ □

3.5. Corollaire. *Supposons k algébriquement clos, de caractéristique nulle.*

Une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}$ est modularisable si et seulement si tout $X \in M_{\mathcal{C}}$ vérifie $X \in T_{\mathcal{C}}$, $\theta_X = 1_X$ et $\dim X \in \mathbb{N}$.

De plus, si $\mathcal{C}$ est modularisable, sa modularisation est unique à équivalence près.

Démonstration. Compte tenu de 3.1, de 2.3, et de la remarque 2.5 (3), seule l'unicité reste à démontrer. D'après 3.1, $\mathcal{C}$ admet une modularisation minimale $H : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$. Si $H' : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ est une autre modularisation, il existe un k-foncteur tortil dominant $H'' : \widetilde{\mathcal{C}} \to \mathcal{C}'$ tel que $H''H \simeq H'$; H'' est une équivalence en vertu de la proposition suivante.

3.6. Proposition. *Supposons $\mathsf{car}\,k = 0$, et soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ un k-foncteur tortil dominant. Si $\mathcal{C}$ est modulaire, F est une équivalence.*

Démonstration. Nous utiliserons la proposition suivante.

3.7. Proposition. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire admettant une modularisation $H : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$. Supposons $M_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}}$ (c'est toujours le cas si $\mathsf{car}\,k = 0$). Alors :*

1) $\Delta_{\mathcal{C}} = \Delta_{\mathcal{C}_T} \Delta_{\mathcal{C}'}$ et $H_! \Omega_{\mathcal{C}} = \Delta_{\mathcal{C}_T} \Omega_{\mathcal{C}'}$;

2) pour Y objet simple de $\mathcal{C}'$, on a : $\Delta_{\mathcal{C}_T} \dim Y = \sum_{X \in \Lambda_{\mathcal{C}}} \nu_{Y,X} \dim X$.

3.8. Remarque. Il résulte de 1.5 (2) que, sous les hypothèses de la proposition, on a :

$$\Delta^+_{\mathcal{C}} \Delta^-_{\mathcal{C}} = (\Delta_{\mathcal{C}_T})^2 \Delta_{\mathcal{C}'} ,$$

de sorte que $\Delta^+_{\mathcal{C}}$ et $\Delta^-_{\mathcal{C}}$ sont inversibles si et seulement si $\Delta_{\mathcal{C}_T}$ est inversible (c'est donc toujours le cas en caractéristique nulle). On peut alors définir les invariants de 3-variétés associés à $\mathcal{C}$, et on a :

$$I'_{\mathcal{C}}(M) = \Delta_{\mathcal{C}_T}^{h_1(M)} I'_{\mathcal{C}'}(M), \quad TV_{\mathcal{C}} = TV_{\mathcal{C}'} \quad \text{et} \quad I_{\mathcal{C}} = I_{\mathcal{C}'} ;$$

la dernière identité suppose des choix compatibles de racines carrées ($\sqrt{\Delta'} = \Delta_{\mathcal{C}_T}^{-1} \sqrt{\widetilde{\Delta}}$).

DÉMONSTRATION.

Afin d'alléger les notations, posons $\Delta = \Delta_{\mathcal{C}}$, $\Delta' = \Delta_{\mathcal{C}'}$, $\Omega = \Omega_{\mathcal{C}}$ et $\Omega' = \Omega_{\mathcal{C}'}$.

D'après 1.4, on a $\mathcal{S}\Omega = \Delta\mu^{\mathcal{C}}$. Il en résulte :

$$\mathcal{S}H_!\Omega = \Delta\pi^{(I')} .$$

En effet, soit $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}'}$, et soit $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ tel que Y soit facteur direct de $H(X)$. On a alors $(\mathcal{S}H_!\Omega)_Y = (\mathcal{S}\Omega)_X$ par 2.1 (2). Si $Y = I'$, $X = I$ convient, donc $(\mathcal{S}H_!\Omega)_Y = \Delta$; sinon, $H(X)$ n'est pas trivial, donc $X \notin M_{\mathcal{C}}$ et $(\mathcal{S}H_!\Omega)_Y = 0$.

Par ailleurs, $\mathcal{C}'$ est modulaire, donc $\mathcal{S}\Omega' = \Delta'\pi^{(I')}$; il en résulte : $H_!\Omega = \Delta\Delta'^{-1}\Omega'$. Autrement dit, on a pour $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}'}$: $\sum_{X\in\Lambda_{\mathcal{C}}} \nu_{Y,X} \operatorname{dim} X = \Delta\Delta'^{-1} \operatorname{dim} Y$. Appliquant ceci à $Y = I'$, il vient : $\Delta\Delta'^{-1} = \sum_X \nu_{I',X} \operatorname{dim} X = \sum_{X\in T_{\mathcal{C}}} (\operatorname{dim} X)^2 = \Delta_{\mathcal{C}_T}$, d'où les assertions (1) et (2). □

Revenons à la démonstration de 3.6. La catégorie $\mathcal{C}'$ est modulaire. En effet, soit $Y \in M_{\mathcal{C}'}$, et soit $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ tel que Y soit facteur direct de $F(X)$. Alors $X \in M_{\mathcal{C}}$ par 2.2, donc $X = I$ et $Y = I'$. On peut donc appliquer 3.7. Puisque $T_{\mathcal{C}} = \{I\}$, $\Delta_{\mathcal{C}_T} = 1$ donc $H_!\Omega = \Omega'$, et pour $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}'}$, on a :

$$\operatorname{dim} Y = \sum_{X\in\Lambda_{\mathcal{C}}} \nu_{Y,X} \operatorname{dim} X .$$

Soit $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ tel que $\operatorname{Hom}(I', F(X)) \neq 0$. Alors $(\mathcal{S}\Omega')_{F(X)} \neq 0$, donc $(\mathcal{S}\Omega)_X \neq 0$, d'où $X = I$. Soient maintenant $X, X' \in \Lambda_{\mathcal{C}}$. Si $\operatorname{Hom}(F(X), F(X')) \neq 0$, alors $X' = X$. (En effet, $\operatorname{Hom}(I', F(X' \otimes X^\vee)) \neq 0$, donc I est facteur direct de $X' \otimes X^\vee$, d'où $X' = X$.)

Pour montrer que F est une équivalence, il suffit donc de vérifier que pour X simple, $F(X)$ est simple. Or, pour $Y \in \Lambda_{\mathcal{C}'}$, il existe $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$ *unique* tel que $\nu_{Y,X} \neq 0$. On a donc $\operatorname{dim} Y = \nu_{Y,X} \operatorname{dim} X$, d'où $\operatorname{dim} X = \sum_Y \nu_{Y,X} \operatorname{dim} Y = \sum_Y {\nu_{Y,X}}^2 \operatorname{dim} X$. Ainsi, $\sum_Y {\nu_{Y,X}}^2 = 1$ dans k; en caractéristique nulle, il en résulte que $F(X)$ est simple. □

Ceci achève la démonstration de 3.5. □

4. Un cas particulier

À présent, nous allons nous intéresser au cas particulier où tous les éléments de $M_{\mathcal{C}}$ sont inversibles. Pour $X \in M_{\mathcal{C}}$, on a alors $\operatorname{dim} X = \pm 1$ et $\theta_X = \pm 1$.

De plus, le produit tensoriel fait de $M_{\mathcal{C}}$ un groupe qui opère sur l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{C}}$.

4.1. REMARQUES.

1) Si $X \in M_{\mathcal{C}}$ est inversible, il est transparent. En effet, soit X inversible et Y simple ; $X \otimes Y$ est simple donc $R_{Y,X}R_{X,Y} = 1_{X,Y} \iff s_{X,Y} = \operatorname{tr}(R_{Y,X}R_{X,Y}) = \operatorname{dim} X \operatorname{dim} Y$. J'ignore si $M_{\mathcal{C}} = T_{\mathcal{C}}$ en général.

2) Si tout élément de $M_{\mathcal{C}}$ est inversible, $\Delta^+\Delta^- = \Delta|M_{\mathcal{C}}|$ si $\theta_X = 1$ pour tout $X \in M_{\mathcal{C}}$, et $\Delta^+\Delta^- = 0$ sinon (remarque 1.5 (2). Ainsi, l'invariant $I'_{\mathcal{C}}$ est bien défini si et seulement si $|M_{\mathcal{C}}|$ et Δ sont inversibles dans k, et $\theta_X = 1$ pour tout $X \in M_{\mathcal{C}}$.

4.2. Proposition. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire telle que tout $X \in M_{\mathcal{C}}$ soit inversible. Supposons en outre $|M_{\mathcal{C}}|$ inversible dans k.*

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathcal{C}$ est modularisable;

(ii) $\mathcal{C}$ admet une modularisation minimale;

(iii) pour tout $X \in M_{\mathcal{C}}$, $\theta_X = 1$ et $\mathsf{dim}\, X = 1$.

Démonstration.

Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ une modularisation. Pour $X \in M_{\mathcal{C}}$, X est transparent par 4.1 (1), et $F(X)$ est inversible et trivial (2.3), donc isomorphe à I'. Ainsi, $\mathsf{dim}\, X = 1$ et $\theta_X = 1$. D'où (i) $\Longrightarrow$ (iii). Puisque (ii) $\Longrightarrow$ (i) est évident, il reste à démontrer (iii) $\Longrightarrow$ (ii); cela résultera immédiatement du lemme suivant (appliqué à ? $= M_{\mathcal{C}}$). Ce lemme améliore et précise la proposition 3.2 dans le type de situation qui nous intéresse.

4.3. Lemme. *Supposons k algébriquement clos. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire, et ? un ensemble de classes d'objets inversibles de $\mathcal{C}$ formant un groupe pour le produit tensoriel, tel que $|?|$ soit inversible dans k, et pour tout $X \in$?, $\mathsf{dim}\, X = 1$ et $\theta_X = 1$.*

Alors il existe une catégorie prémodulaire $\mathcal{C}/?$ munie d'un k-foncteur tortil $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/?$ tel que pour tout $X \in$?, $F(X)$ soit isomorphe à l'objet unité, et minimale pour cette propriété. De plus :

1) pour X, $X' \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, $F(X) \simeq F(X')$ si $X' \in ? \cdot X$, et $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\Gamma}(F(X), F(X')) = 0$ sinon;

2) pour $X \in \Lambda_{\mathcal{C}}$, $\mathsf{End}_{\mathcal{C}/\Gamma}(F(X))$ est une k-algèbre de dimension $d = |\mathsf{Stab}_\Gamma X|$, et si $\mathsf{Stab}_\Gamma X$ cyclique, $F(X)$ est somme de d objets simples de $\mathcal{C}/?$ deux à deux non isomorphes.

Démonstration.

Soit $\mathcal{A}_\Gamma$ la sous-catégorie prémodulaire pleine de $\mathcal{C}_T$ ayant pour objets les sommes d'éléments de ?. Nous allons montrer que $\mathcal{A}_\Gamma$ est tannakienne en construisant l'algèbre trivialisante A de manière explicite. Le foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}^{\mathcal{A}_\Gamma} = \mathcal{C}/?$ de la proposition 3.2 sera alors solution minimale du problème posé, puisque $\Delta_{\mathcal{A}_\Gamma} = |?|$ dans k.

Soit X un élément de ? d'ordre δ, et ϕ un isomorphisme $\otimes^\delta X \xrightarrow{\sim} I$. On a :

$$(\mathcal{F}) \qquad R_{X,X} = 1_{X \otimes X} \quad \text{et} \quad \phi \otimes 1_X = 1_X \otimes \phi .$$

En effet, $\mathsf{tr}(R_{X,X}) = \theta_X\, \mathsf{dim}\, X = 1$, et $X \otimes X$ est simple de dimension 1, d'où la première identité. La seconde en résulte : $\phi \otimes 1_X = (1_X \otimes \phi) R_{\otimes^\delta X, X} = 1_X \otimes \phi$.

On dâfinit dans $\mathcal{A}_\Gamma$ une algèbre commutative $\mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$-graduée $A_{X,\phi}$. Comme objet gradué, $A_{X,\phi} = \sum_{l=0}^{\delta-1} \otimes^l X$. Pour $l, m, n \in \{0, \ldots, \delta - 1\}$ avec $n \equiv l + m \,\mathsf{mod}\, \delta$, le produit $(\otimes^l X) \otimes (\otimes^m X) \to \otimes^n X$ est l'identité si $l + m = n$, et $\phi \otimes 1_{\otimes^n X}$ si $l + m = n + \delta$. Il résulte de $(\mathcal{F})$ que ce produit est associatif et commutatif, avec pour unité l'inclusion $I \hookrightarrow A_{X,\phi}$. En outre, $A_{X,\phi} \otimes X$ est isomorphe à $A_{X,\phi}$ comme $A_{X,\phi}$-module.

Choisissons un système minimal $X_1, \ldots X_r$ de générateurs de ?, d'ordres respectifs $\delta_1, \ldots, \delta_r$, ainsi que des isomorphismes $\phi_i : \otimes^{\delta_i} X_i \simeq I$, $1 \leq i \leq r$. Alors $A_\Gamma = \bigotimes_{1 \leq i \leq r} A_{X_i, \phi_i}$ est une algèbre commutative ?-graduée de $\mathcal{A}_\Gamma$, d'objet sous-jacent $\sum_{X \in \Gamma} X$.

Pour tout $X \in ?$, $A \otimes X \simeq A$ comme A-module, et $\mathsf{Hom}(I, A_\Gamma) = k$. Le foncteur $F : \mathcal{A}_\Gamma \to \mathsf{vect}\, k$, $X \mapsto \mathsf{Hom}(I, A_\Gamma \otimes X)$ est un foncteur fibre pour $\mathcal{A}_\Gamma$, qui est donc tannakienne neutre.

L'assertion (1) résulte du fait que, pour X, X' objets de $\mathcal{C}$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}/\Gamma}(F(X), F(Y)) = \mathsf{Hom}(X, A \otimes Y) \simeq \sum_{W \in \Gamma} \mathsf{Hom}(X, W \otimes X')$.

Soient $X \in \Lambda_\mathcal{C}$, $?_X = \mathsf{Stab}_\Gamma(X)$, et $d = |?_X|$. Soit $\mathcal{E} = \mathsf{End}_{\mathcal{C}/\Gamma}(F(X)) = \sum_{W\in\Gamma} \mathcal{E}_W$, où $\mathcal{E}_W = \mathsf{Hom}(X, W \otimes X)$. C'est une k-algèbre semi-simple $?_X$-graduée, de dimension d car $\dim \mathcal{E}_W = 1$. Il résulte de la semi-simplicité de $\mathcal{E}$ que tout $u \in \mathcal{E}_W$ non nul est inversible. Supposons $?_X$ cyclique, engendré par $W \in ?_X$. Alors tout $u \in \mathcal{E}_W$ non nul engendre $\mathcal{E}$ comme k-algèbre, donc $\mathcal{E}$ est commutative, isomorphe à k^d, d'où (2). □ □

4.4. Proposition. *On suppose k algébriquement clos. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie prémodulaire modularisable, telle que tout élément de $M_\mathcal{C}$ soit inversible, et supposons $|M_\mathcal{C}|$ inversible dans k. Soit $H : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$ la modularisation minimale. Alors :*

1) pour X, $X' \in \Lambda_\mathcal{C}$, on a $H(X) \simeq H(X')$ si $X' \in M_\mathcal{C}\cdot X$, et $\mathsf{Hom}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(H(X), H(X')) = 0$ sinon;

2) pour $X \in \Lambda_\mathcal{C}$, $\mathsf{End}_{\widetilde{\mathcal{C}}}(H(X))$ est une k-algèbre de dimension $|\mathsf{Stab}_{M_\mathcal{C}} X|$, et pour tout $Z \in \Lambda_{\widetilde{\mathcal{C}}}$ figurant dans la décomposition de $H(X)$ avec multiplicité $\nu_{Z,X} > 0$, on a :

$$\dim Z = \frac{\nu_{Z,X}}{|\mathsf{Stab}_{M_\mathcal{C}} X|} \dim X ;$$

de plus si $\mathsf{Stab}_{M_\mathcal{C}}(X)$ est cyclique d'ordre d, $H(X)$ est somme de d objets simples de $\widetilde{\mathcal{C}}$, deux à deux non isomorphes, de dimension $d^{-1}\dim(X)$.

Démonstration.

Cet énoncé résulte immédiatement de 3.7 et du lemme 4.3. □

4.5. Remarques.

1) En particulier, si $M_\mathcal{C}$ est un groupe cyclique, pour tout $X \in \Lambda_\mathcal{C}$, $H(X)$ est somme de $d = |\mathsf{Stab}_{M_\mathcal{C}}|$ objets simples de $\widetilde{\mathcal{C}}$ de dimension $d^{-1}\dim X$, deux à deux non isomorphes.

2) Dans un travail en préparation ([Br2]), nous montrerons ($\mathsf{car}\, k = 0$) que si $\mathcal{C}$ est une catégorie prémodulaire modularisable, de modularisation $H : \mathcal{C} \to \widetilde{\mathcal{C}}$, un certain groupe fini G (le groupe de Galois de H) opère sur $\widetilde{\mathcal{C}}$ en fixant $\mathcal{C}$. Pour X objet simple de $\mathcal{C}$, G permute transitivement les facteurs simples de $H(X)$ (à isomorphisme près); en particulier ces facteurs ont même dimension et même multiplicité dans $H(X)$.

5. Exemples

Le cas SL_N

On suppose $k = \mathbb{C}$. Soient N, K deux entiers ≥ 1, appelés respectivement *rang* et *niveau*. Soit $l = N + K$, q une racine de l'unité d'ordre l, et s une racine carrée de q d'ordre $2l$. On sait définir une catégorie monoïdale abélienne $\mathbb{C}$-linéaire $\mathcal{C}_{(s)}$ dont les objets simples à isomorphisme près sont en bijection naturelle avec l'ensemble Λ des diagrammes de Young contenus dans le rectangle à $N-1$ lignes et K colonnes; pour $\lambda \in \Lambda$, on note V_λ l'objet simple de $\mathcal{C}_{(s)}$ correspondant.

Il est utile d'introduire l'ensemble Λ' des 'diagrammes élargis', c'est-à-dire les diagrammes de Young à N lignes $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ vérifiant $\lambda_1 - \lambda_N \leq K$. À tout diagramme élargi $\lambda \in \Lambda'$, on associe le diagramme $\widetilde{\lambda} = (\lambda_1 - \lambda_N, \dots, \lambda_{N-1} - \lambda_N) \in \Lambda$, et on pose $V_\lambda = V_{\widetilde{\lambda}}$.

Le nombre de cellules d'un diagramme λ (éventuellement élargi) est appelé *degré de* λ, et noté $|\lambda|$; le *contenu de* λ est l'entier relatif $\mathsf{cn}(\lambda) = \sum_{c \in \lambda} \mathsf{cn}(c)$, où pour une cellule $c = (i,j)$, $\mathsf{cn}(c) = j - i$.

On a pour tout $\lambda \in \Lambda'$:

$$(\mathcal{E}) \qquad V_\lambda \otimes V_1 = \sum_{\substack{\mu \in \Lambda' \\ \lambda \subset \mu, |\mu| = |\lambda|+1}} V_\mu \,.$$

Par ailleurs, notons Σ l'objet simple V_K correspondant au diagramme réduit à une ligne 'pleine' (de longueur K).

5.1. Lemme. *Le groupe des objets inversibles de $\mathcal{C}_{(s)}$ est cyclique d'ordre N, engendré par Σ.*

Démonstration.

On peut décrire simplement la tensorisation par Σ. La donnée de $\lambda \in \Lambda$ équivaut à la donnée d'une suite d'entiers naturels $a_1, a_2, \dots, a_N$, de somme K, définie par $a_i = \lambda_{i-1} - \lambda_i$ (en convenant que $\lambda_0 = K$ et $\lambda_N = 0$). Posant $\lambda = \langle a_1, \dots, a_N \rangle$, on a :

$$V_{\langle a_1, \dots, a_N \rangle} \otimes \Sigma = V_{\langle a_N, a_1, \dots, a_{N-1} \rangle}$$

En particulier, Σ est inversible d'ordre N. Si X est un objet inversible, $X \otimes V_1$ est simple. Il en résulte que X est une puissance de Σ, car d'après $(\mathcal{E})$, $V_\lambda \otimes V_1$ n'est simple que pour $\lambda \in \Lambda$ rectangulaire de largeur K. $\square$

Pour tout complexe u tel que $u^N = s$, on sait munir $\mathcal{C}_{(s)}$ d'une structure de tortil qui en fait une catégorie prémodulaire notée $\mathcal{C}_u$ (*cf.* [Br1], par exemple).

Dans $\mathcal{C}_u$, la valeur de θ sur V_λ ($\lambda \in \Lambda'$) est donnée par la formule :

$$\theta_{V_\lambda} = u^{|\lambda|(N^2 - |\lambda|)} q^{\mathsf{cn}(\lambda)} \,.$$

La dimension de V_λ s'exprime par une formule faisant intervenir les s-*entiers* $[n] = \frac{s^n - s^{-n}}{s - s^{-1}}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Pour $c = (i,j)$ cellule de λ, on note $\mathsf{hl}_\lambda(c)$ la 'longueur du crochet' $\lambda_i + \lambda^j - i - j + 1$ (où λ^j est la longueur de la colonne j dans λ); on a alors pour $\lambda \in \Lambda$:

$$\mathsf{dim}\, V_\lambda = \prod_{c \in \lambda} \frac{[N + \mathsf{cn}(c)]}{[\mathsf{hl}_\lambda(c)]} \,.$$

En particulier, $\mathsf{dim}\, V_1 = [N]$, $\theta_{V_1} = u^{N^2 - 1}$, et $\mathsf{dim}\, \Sigma = 1$.

5.2. Remarque. Pour $\lambda \in \Lambda'$, θ_{V_λ} est un complexe de module 1 qui ne dépend que de u, $|\lambda|$ et de la classe de $\mathsf{cn}(\lambda)$ modulo l. D'autre part, $\mathsf{dim}\, V_\lambda$ est un réel non nul (positif si $s = e^{i\pi/l}$); vu comme fonction de s, c'est une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{Q}$, impaire si $|\lambda|$ est impair et N pair, paire sinon.

5.3. Lemme. *Soient X, Y deux objets simples de $\mathcal{C}_u$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\theta_{X\otimes Y}$ est un scalaire;

(ii) $|s_{X,Y}| = |\mathsf{dim}\, X||\mathsf{dim}\, Y|$.

Démonstration.

(i) $\Longrightarrow$ (ii). On a $s_{X,Y} = \theta_X^{-1}\theta_Y^{-1}\,\mathsf{tr}(\theta_{X\otimes Y})$. Si $\theta_{X\otimes Y}$ est un scalaire, il est de module 1 (remarque 5.2), donc $|s_{X,Y}| = |\mathsf{dim}\, X||\mathsf{dim}\, Y|$.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Soit $X = V_\lambda$ et $Y = V_{\lambda'}$; le scalaire $\frac{s_{X,Y}}{\mathsf{dim}\, X\, \mathsf{dim}\, Y}$ dépendant de la structure de tortil, donc de u, on le note $Q(u)$. L'objet $X\otimes Y$ se décompose sous la forme $X\otimes Y = \bigoplus_{i=1}^n V_{\mu_i}$, les μ_i étant des diagrammes élargis que l'on peut choisir de degré $d = |\lambda| + |\lambda'|$. Puisque $\theta_{V_{\mu_i}} = u^{d(N^2-d)} q^{\mathsf{cn}(\mu_i)}$,

$$|Q(u)|^2 = \frac{|\sum_i q^{\mathsf{cn}(\mu_i)}\,\mathsf{dim}\, V_{\mu_i}|^2}{|\sum_i \mathsf{dim}\, V_{\mu_i}|^2}\,.$$

Or les dimensions des V_{μ_i} sont des fractions rationnelles en $s = u^N$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$, et toutes de même parité (remarque 5.2), de sorte que $|Q(u)|^2$ est une fraction rationnelle en $q = s^2 = u^{2N}$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$; notons-la $R(q)$.

Si $R(q) = 1$ pour une racine primitive l-ième de 1, c'est vrai pour toutes, et donc pour $q_0 = e^{2i\pi/l}$, $s = e^{i\pi/l}$. Pour cette valeur de s, les dimensions des objets simples de $\mathcal{C}_u$ sont des réels positifs; la condition $|Q(u)| = 1$ ($u^N = s$) implique alors que les $q^{\mathsf{cn}(\mu_i)}$ sont égaux, donc les $\theta_{V_{\mu_i}}$ aussi. □

Il résulte du lemme que les éléments de $M_{\mathcal{C}_u}$ sont inversibles. En effet, si $X \in M_{\mathcal{C}_u}$, $\theta_{X\otimes V_1}$ est scalaire. Ceci entraine que $X\otimes V_1$ est simple, car les V_μ figurant dans la formule $(\mathcal{E})$ sont de contenus différents modulo l; et si $X\otimes V_1$ est simple, X est inversible (*cf.* démonstration de 5.1).

Pour $\mu \in \Lambda'$, on a :

$$R_{V_\mu,\Sigma} R_{\Sigma,V_\mu} = u^{2l|\mu|}\, 1_{\Sigma\otimes V_\mu}\,.$$

Ainsi, $M_{\mathcal{C}_u}$ est le groupe engendré par $\otimes^n \Sigma$, où n est l'ordre de u^{2l}. En particulier, $\mathcal{C}_u$ est modulaire si et seulement si u^{2l} est une racine de l'unité d'ordre N.

5.3. Proposition. *La catégorie prémodulaire $\mathcal{C}_u$ est modularisable sauf dans le cas suivant : N pair, K impair, et l'ordre de u est congru à 2 mod. 4.*

Démonstration. La catégorie $\mathcal{C}_u$ est modularisable si et seulement si $\theta_{\otimes^n\Sigma} = 1$. Or ce scalaire vaut $u^{lKn(N-n)} = \varepsilon^{K(N-n)}$, où $\varepsilon = u^{ln} = \pm 1$. Ainsi pour que $\mathcal{C}_u$ ne soit pas modularisable, il faut et il suffit que N soit pair et n impair (car $N-n$ doit être impair, et $n \mid N$) l impair (car $K = l - N$ doit être impair), et l'ordre de u divise $2ln$, mais pas ln; il est donc de la forme 2α, α impair. □

Remarques.

1) Si $\mathcal{C}_u$ n'est pas modularisable, $\mathcal{C}_{-u}$ est modularisable.

2) L'action de $M_{\mathcal{C}_u}$ sur Λ est toujours libre (car N/n est toujours premier à $N \wedge K$ ([Br1]). Nous allons voir qu'il en va différemment dans le cas PGL.

Le cas PGL_N

Pour X objet simple de $\mathcal{C}_u$, on appelle *degré de* X, et on note $|X|$, la classe modulo N du degré du diagramme correspondant. Pour X, Y simples, les facteurs simples de $X \otimes Y$ sont de degré $|X| + |Y|$.

Soit $\mathcal{D}_u$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}_u$ des sommes d'objets simples de $\mathcal{C}_u$ de degré nul. C'est une catégorie prémodulaire 'de type PGL_N'.

Les éléments de $M_{\mathcal{D}_u}$ sont inversibles. En effet, soit $X \in M_{\mathcal{D}_u}$. Notons ? l'objet simple $V_{2,1^{N-2}}$; puisque $|?| = 0$, on a $s_{X,\Gamma} = \mathsf{dim}\, X\ \mathsf{dim}\, ?$, donc $\theta_{X\otimes\Gamma}$ est scalaire (5.2). D'après $(\mathcal{E})$, $V_1 \otimes V_{1^{N-1}} = I \oplus ?$, d'où $V_1{}^\vee = V_{1^{N-1}}$. Supposons $X \otimes V_1$ non simple, et soit Z un facteur simple de $X \otimes V_1$. Soit Y un facteur simple de $Z \otimes V_1{}^\vee$. On a $\mathsf{Hom}(Y, X) \oplus \mathsf{Hom}(Y, X \otimes ?) = \mathsf{Hom}(Y, X \otimes V_1 \otimes V_1{}^\vee) \simeq \mathsf{Hom}(Y \otimes V_1, X \otimes V_1)$, qui est de dimension ≥ 1 (et ≥ 2 si $Y \simeq X$). Ainsi Y figure dans $X \otimes ?$; θ est donc scalaire sur $Z \otimes V_1{}^\vee$, donc aussi sur $Z^\vee \otimes V_1$; par conséquent $Z^\vee$ est inversible. D'où $X \simeq Z \otimes V_1{}^\vee$; mais alors $X \otimes V_1 \simeq Z \oplus (Z \otimes ?)$ admet un facteur non inversible, ce qu'on a exclu. Donc $X \otimes V_1$ est simple, et X est inversible.

Par ailleurs, $R_{\Sigma,X} = R^{-1}{}_{X,\Sigma}$ si $|X| = 0$. Ainsi $M_{\mathcal{D}_u}$ est le groupe cyclique d'ordre $K \wedge N$ engendré par $\otimes^{\frac{N}{K \wedge N}} \Sigma$. En particulier, on retrouve un résultat de Masbaum-Wenzl ([M-W]) : $\mathcal{D}_u$ est modulaire si et seulement si K et N sont premiers entre eux (indépendamment de u). Toutefois, ce n'est pas le seul cas où l'on peut définir une TQFT de type PGL_N.

5.4. Proposition. *La catégorie prémodulaire $\mathcal{D}_u$ est toujours modularisable sauf dans le cas suivant : $h = N \wedge K$ est pair, et N/h, K/h sont impairs.*

Remarque. Ce sont précisément les cas où Yokota [Y] a démontré que l'on peut définir des invariants de 3-variétés (mais l'existence d'une modularisation, et donc d'une TQFT dans ces cas est un résultat nouveau).

Démonstration.

Posons $n = N/h$, $k = K/h$. Alors $\mathcal{D}_u$ est non modularisable si et seulement si $\theta_{\otimes^n \Sigma} = -1$; ce scalaire vaut $u^{lKn(N-n)} = u^{lNk(N-n)} = (-1)^{(N-n)k}$. La condition équivaut donc à : $N-n$ et k impairs. Puisque $n \mid N$, ceci implique : N pair, n impair, donc $h = N/n$ pair. Inversement si n, k sont impairs et N pair, $N - n$ est impair donc $\theta_{\otimes^n \Sigma} = -1$, et D_u n'est pas modularisable. $\square$

Remarque. Lorsque $\mathcal{D}_u$ est modularisable, l'action de $M_{\mathcal{D}_u}$ sur $\Lambda_{\mathcal{D}_u}$ admet un point fixe. En effet, soit λ le diagramme de Young $\langle a_0, \ldots, a_{N-1} \rangle$, les a_i étant définis comme suit. Soit $r = k - 1$ si h est impair ou k pair, $r = n/2$ sinon (n est alors pair). On pose :

$$a_i = \begin{cases} k-1 & \text{si } i \equiv 0 \,\mathsf{mod}\, n, \\ 1 & \text{si } i \equiv r \,\mathsf{mod}\, n, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

L'objet simple V_λ est de degré zéro, et son stabilisateur est engendré par $\otimes^n\Sigma$.

5.5. Exemple. Soit $N = 2$, $K = 4$. Alors s est une racine de l'unité d'ordre 12, et $\mathcal{D} = \mathcal{D}_u$ est modularisable; soit $H : \mathcal{D} \to \widetilde{\mathcal{D}}$ la modularisation.

Les objets simples de $\mathcal{D}$ sont I, V_2 et $V_4 = \Sigma$, et $M_{\mathcal{D}} = \{I, \Sigma\}$. L'objet V_2 est de dimension 2, et $\theta_{V_2} = s^4 = j$.

On a $\Sigma \otimes V_2 \simeq V_2$, donc $H(V_2)$ est somme de deux objets simples, V' et V'', de dimension 1. De la décomposition $V_2 \otimes V_2 \simeq I \oplus V_2 \oplus \Sigma$ résulte : $V' \otimes V'' \simeq \widetilde{I}$, $V' \otimes V' \simeq V''$, $V'' \otimes V'' \simeq V'$. On en déduit que $\widetilde{\mathcal{D}}$ a pour S-matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix}.$$

Références bibliographiques

[B] C. Blanchet, *Hecke Algebras, Modular Categories and 3-Manifolds Quantum Invariants*, preprint (1997).

[B-H-M-V] C. Blanchet, N. Habbeger, G. Masbaum et P. Vogel, *Topological quantum field theories derived from the Kauffman Bracket*, Topology **34**, pp. 883–927 (1995).

[Br1] A. Bruguières, *Tresses et structure entière sur la catégorie des représentations de* SL_N *quantique*, Prépub. de l'Institut de Mathématiques de Jussieu **188** (1998).

[Br2] A. Bruguières, *Galois Theory for Tensor Categories*, en préparation.

[D] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, in *The Grothendieck Festschrift*, II, Progress in Mathematics **87,** Birkhäuser, pp. 111–195 (1990).

[J-S] A. Joyal et R. Street, *Braided Tensor Categories*, Adv. Math. **102**, No. 1, pp. 20–78 (1993).

[M-W] G. Masbaum, H. Wenzl, *Integral modular categories and integrality of quantum invariants at roots of unity of prime order*, J. reine angew. Math. **505**, pp. 209–235 (1998).

[Mü] M. Müger, *Galois Theory for Braided Tensor Categories and the Modular Closure*, preprint (1998).

[Sh] M. C. Shum, *Tortile Tensor Categories*, J. of Pure and Appl. Alg. **93**, No. 1, pp. 57–110 (1994).

[T] V. G. Turaev, *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*, de Gruyter (1994).

[Y] Y. Yokota, *Skeins and Quantum* $\mathsf{SU}(N)$ *invariants of* 3*-manifolds*, Math. Ann. **307**, No. 1, pp. 109–138 (1997).