DUALITÉ TANNAKIENNE POUR LES QUASI-GROUPOÏDES QUANTIQUES

Alain Bruguières

Université Paris VII, U. F. R. de mathématiques
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT. This paper is the sequel of a previous one [Bru] where we extended the Tannaka-Krein duality results to the non-commutative situation, i.e. to 'quantum groupoids'. Here we extend those results to the quasi-monoidal situation, corresponding to 'quasi-quantum groupoids' as defined in [Bru-Mal] ('quasi-' stands for quasi-associativity à la Drinfeld). More precisely, let B be a commutative algebra over a field k. Given a tensor autonomous category $\mathcal{T}$, we define the notion of a quasi-fibre functor $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ (here, 'quasi-' means without compatibility to associativity constraints). On the other hand, we define the notion of a transitive quasi-quantum groupoid over B. We then show that the category of tensor autonomous categories equipped with a quasi-fibre functor (with suitable morphisms), is equivalent to the category of transitive quasi-quantum groupoids (5.4.2).

Moreover, we classify quasi-fibre functors for a semisimple tensor autonomous category (6.1.2), and give a few examples of quasi-quantum groups. For instance, we define a family of quasi-quantum groups having the same tensor category of representations as Sl_2, but with non-isomorphic underlying coalgebras (6.2.1).

0. Introduction

0.1. La dualité tannakienne est un principe général qui établit, idéalement, un dictionnaire bilingue entre des données de type catégorique, d'une part, et des données de type algébrique de l'autre.

L'exemple fondamental est le suivant. Soit k un corps. Alors la donnée d'une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{C}$, munie d'un foncteur k-linéaire fidèle exact F de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie, est équivalente à la donnée d'une k-cogèbre.

La correspondance associe à une k-cogèbre L la catégorie $\mathsf{comod}\, L$ des L-comodules à droite de dimension finie sur k, munie du foncteur oubli $u_L : \mathsf{comod}\, L \longrightarrow \mathsf{vect}\, k$. La construction inverse consiste à associer au foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{vect}\, k$ la cogèbre $L(F)$ des coendomorphismes de F.

Sur ces 'fondations', on peut 'bâtir les étages'. Dans le dictionnaire tannakien, toute superstructure de la catégorie $\mathcal{C}$ et du foncteur F se traduit, de façon concomitante, par une superstructure de la cogèbre L. Ainsi, munir $\mathcal{C}$ d'une structure tensorielle, et F d'une structure de foncteur monoïdal, revient à faire de L une bigèbre. Si de plus, $\mathcal{C}$ est autonome, L est une bigèbre de Hopf. Que de surcroît $\mathcal{C}$ soit symétrique, ainsi que F, et L devient l'algèbre des fonctions d'un schéma en groupes G sur k. Cette situation correspond à la dualité tannakienne 'classique' : $\mathcal{C}$ est la catégorie des représentations de dimension finie de G, et G est le schéma en groupes des automorphismes monoïdaux du foncteur F.

Les bigèbres de Hopf, ou 'groupes quantiques', sont devenus un objet d'étude à part entière; d'une part, ce sont des objets algébriques intéressants en tant que tels, et d'autre part, leurs catégories de représentations ont été utilisées pour définir des invariants topologiques nouveaux en petite dimension. D'où l'intérêt d'étudier la dualité tannakienne pour ces objets. Drinfeld [Dr] a montré qu'on peut affaiblir l'associativité de la multiplication d'un groupe quantique, de sorte que la catégorie des représentations reste monoïdale; par contre, le foncteur oubli n'est plus compatible aux contraintes d'associativité. (En fait, Drinfeld s'intéresse aux algèbres enveloppantes plutôt qu'aux algèbres de fonctions : pour lui, les représentations sont les modules, et c'est la coassociativité du coproduit qu'il affaiblit; c'est le point de vue dual qu'on adopte ici.)

On peut généraliser l'exemple fondamental en introduisant une k-algèbre B, et en considérant, du côté catégorique, les catégories $\mathcal{C}$ munies d'un foncteur F de $\mathcal{C}$ vers la catégorie des B-modules à droite projectifs de type fini, et du côté algébrique, les cogébroïdes de base B [D1]. Dans [Bru], j'avais formulé une version pour cogébroïdes de la dualité tannakienne, pour ensuite, rajoutant les étages, en donner une version pour 'groupoïdes quantiques'. Le but du présent article est d'étendre ces résultats aux 'quasi-groupoïdes quantiques' (notion introduite dans [Bru-Mal]).

Étant donnée une catégorie tensorielle autonome $\mathcal{T}$, nous définissons la notion de quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur une algèbre commutative B. Il s'agit d'un foncteur k-linéaire exact de $\mathcal{T}$ dans $\mathsf{Mod}\,B$, à valeurs dans $\mathsf{proj}\,B$, muni d'une structure quasi-monoïdale (où 'quasi' signifie sans condition de compatibilité aux contraintes d'associativité, cf. **1.2**), et admettant une structure autonome (i.e. un isomorphisme de compatibilité aux duaux, cf. **1.3**).

D'autre part, nous introduisons la notion de quasi-bigébroïde de Hopf transitif de base B. (Pour k parfait, ce sont les quasi-bigébroïdes de Hopf dont le $B \otimes B$-module sous-jacent est projectif et partout non nul, cf. **5.3.3**). Le théorème **5.4.2** établit alors une équivalence de catégories entre, d'une part, la catégorie QTan_B des catégories tensorielles autonomes munies d'un quasi-foncteur fibre sur B, et d'autre part, la catégorie QBig_B des quasi-bigébroïdes de Hopf transitifs de base B.

Puis, nous classifions les quasi-foncteurs fibres pour une catégorie tensorielle autonome semi-simple (**6.1.2**), et nous passons en revue quelques exemples. En particulier, il existe une famille de quasi-groupes quantiques ayant même catégorie de représentations que Sl_2, bien que les cogèbres sous-jacentes soient deux à deux non isomorphes (**6.2.1**). Il existe aussi des catégories tensorielles autonomes admettant un quasi-foncteur fibre, mais pas de foncteur fibre (**6.2.3**).

0.2. Plan. Dans la section **1,** nous rappelons ce qu'est une catégorie monoïdale, et nous introduisons les notions de foncteur quasi-monoïdal, et de foncteur autonome. Après quelques généralités sur les cogébroïdes, regroupées dans la section **2,** nous construisons dans la section **3** la catégorie Cat_B, dont les objets sont des catégories munies d'un foncteur vers $\mathsf{proj}\, B$, et le foncteur $L : \mathsf{Cat}_B \longrightarrow \mathsf{Cog}_B$, qui associe à un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ le cogébroïde $L(F)$ des coendomorphismes de F; lorsque B est commutative, ce foncteur est monoïdal.

La section **4** introduit la notion de quasi-bigébroïde, qui généralise la notion de bigébroïde (**4.1**); on y montre que si $\mathcal{C}$ est monoïdale et F quasi-monoïdal, $L(F)$ devient un quasi-bigébroïde, noté $\mathcal{L}(F)$ (**4.2**). On définit la catégorie QBig_B des quasi-bigébroïdes de base B, avec pour flèches les quasi-morphismes (notion qui, généralisant la notion naïve de morphisme, prend en compte les 'twists de Drinfeld'). On définit d'autre part une catégorie QMon_B, dont les objets sont les catégories monoïdales $\mathcal{C}$ munies d'un foncteur quasi-monoïdal $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$, de sorte que $F \mapsto \mathcal{L}(F)$ s'interprète comme un foncteur $\mathcal{L} : \mathsf{QMon}_B \longrightarrow \mathsf{QBig}_B$ (**4.3**). On définit la notion d'antipode dans un quasi-bigébroïde, on discute l'unicité de l'antipode (**4.4.4**), et on montre que si $\mathcal{C}$ est autonome et F quasi-monoïdal autonome, $\mathcal{L}(F)$ est un quasi-bigébroïde de Hopf (**4.4.5**).

La section **5** est consacrée à la dualité tannakienne proprement dite; en **5.1,** nous reformulons les résultats de [Bru] sur les cogébroïdes semi-transitifs, sous la forme d'une équivalence de catégories. En **5.2,** nous définissons la notion de quasi-foncteur fibre, et en **5.3,** celle de quasi-bigébroïde de Hopf transitif, pour aboutir au théorème de dualité tannakienne pour les quasi-bigébroïdes en **5.4.**

La section **6** s'intéresse au cas particulier des catégories tensorielles semi-simples : classification des quasi-foncteurs fibre de ces catégories (**6.1**), et étude de quelques exemples (**6.2**).

0.3. Notations. Dans tout ce travail, k désigne un anneau commutatif. On note $\otimes$ le produit tensoriel sur k. Par algèbre, on entend k-algèbre associative. Si k est un corps, on note $\mathsf{Vect}\, k$ (resp. $\mathsf{vect}\, k$) la catégorie des k-espaces vectoriels (resp. des k-espaces vectoriels de dimension finie).

Si B est une algèbre, $\mathsf{Mod}\, B$ (resp. $\mathsf{mod}\, B$, resp. $\mathsf{Proj}\, B$, resp. $\mathsf{proj}\, B$) est la catégorie des B-modules à droite quelconques (resp. de type fini, resp. projectifs, resp. projectifs de type fini); On note B^o l'algèbre opposée à B, de sorte que $\mathsf{Mod}\, B^o$ est la catégorie des B-modules à gauche.

Soient A, B deux algèbres. On note $\mathsf{Bimod}(A, B)$ la catégorie des (A, B)-bimodules, qu'on identifiera à $\mathsf{Mod}(A^o \otimes B)$ en munissant tout (A, B)-bimodule M de la structure de $A^o \otimes B$-module à droite donnée par : $m \cdot (a \otimes b) = a \cdot m \cdot b$. Un tel bimodule M peut aussi être vu comme un (B^o, A^o)-bimodule; on le note alors M^o.

On note B^e l'algèbre enveloppante $B^o \otimes B$, de sorte que $\mathsf{Bimod}(B, B)$ s'identifie à $\mathsf{Mod}\, B^e$.

1. Catégories monoïdales

1.1. Rappel de quelques notions

1.1.1. Une *catégorie monoïdale* est la donnée d'une catégorie $\mathcal{C}$, d'un foncteur $\otimes$ de $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$ (appelé *produit tensoriel*), d'un objet I de $\mathcal{C}$ (*l' objet unité*), et d'isomorphismes fonctoriels $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$ (la *contrainte d'associativité*), $l_X : I \otimes X \xrightarrow{\sim} X$ (la *contrainte d'unité à gauche*) et $r_X : X \otimes I \xrightarrow{\sim} X$ (la *contrainte d'unité à droite*), avec les axiomes suivants :

$$(1_X \otimes a_{Y,Z,T})\, a_{X,Y\otimes Z,T}\, (a_{X,Y,Z} \otimes 1_T) = a_{X,Y,Z\otimes T}\, a_{X\otimes Y,Z,T}$$
$$(1_X \otimes l_Y)\, a_{X,I,Y} = r_X \otimes 1_Y \ .$$

Le premier de ces axiomes s'appelle le *pentagone de MacLane*.

La catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est dite *stricte* lorsque les conditions suivantes sont remplies :
1) le produit tensoriel est associatif sur les objets $[(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)]$;
2) l'objet unité est neutre pour le produit tensoriel $[I \otimes X = X = X \otimes I]$;
3) les contraintes a, l, r sont les identités $[a_{X,Y,Z} = 1_{X\otimes Y\otimes Z}\ ,\ l_X = 1_X = r_X]$.

Il résulte de ces hypothèses que le produit tensoriel est associatif sur les morphismes de $\mathcal{C}$, et que 1_I est neutre pour ce produit.

1.1.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Une *dualité de* $\mathcal{C}$ est une donnée (X, Y, e, h), où X, Y sont des objets de $\mathcal{C}$, e est un morphisme $X \otimes Y \longrightarrow I$, l' *évaluation*, et h un morphisme $I \longrightarrow Y \otimes X$, la *coévaluation*, avec les conditions :

$$l_X(e \otimes 1_X)a^{-1}_{X,Y,X}(1_X \otimes h)r^{-1}_X = 1_X$$
$$r_Y(1_Y \otimes e)a_{Y,X,Y}(h \otimes 1_Y)l^{-1}_Y = 1_Y \quad .$$

On dit alors que (X, e, h) est un *dual à gauche de* Y, et (Y, e, h) un *dual à droite de* X.

Une catégorie monoïdale est dite *autonome à gauche* (resp. *autonome à droite*) lorsque tout objet admet un dual à gauche (resp. à droite), et *autonome* si elle est autonome à gauche et à droite.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale autonome à gauche. On appelle *structure autonome à gauche sur* $\mathcal{C}$ la donnée, pour chaque objet X, d'une dualité $({}^\vee X, X, e_X, h_X)$; une structure autonome à gauche sur $\mathcal{C}$ définit un *foncteur dual à gauche* ${}^\vee ? : \mathcal{C}^o \longrightarrow \mathcal{C}$. C'est une équivalence de catégories si et seulement si $\mathcal{C}$ est autonome. Pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le foncteur ${}^\vee X \otimes ?$ est adjoint à gauche au foncteur $X \otimes ?$, et le foncteur $? \otimes {}^\vee X$ est adjoint à droite au foncteur $? \otimes X$. Autrement dit, on a des *isomorphismes d'adjonction*

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}({}^\vee X \otimes Y, Z) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \otimes Z) \quad \text{et} \quad \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z \otimes {}^\vee X) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes X, Z)\,.$$

Deux structures autonomes à gauche définissent des foncteurs dual à gauche isomorphes.

1.1.3. Exemples.

1) Soit B une algèbre; la catégorie $\mathsf{Bimod}(B, B)$ des (B, B)-bimodules, munie du produit tensoriel $\otimes_B$, est une catégorie monoïdale d'objet unité le (B, B)-bimodule B, avec pour contraintes les isomorphismes canoniques

$$(M \otimes_B M') \otimes_B M'' \simeq M \otimes_B (M' \otimes_B M'') \quad \text{et} \quad B \otimes_B M \simeq M \simeq M \otimes_B B\,.$$

Par la suite, on fera systématiquement l'abus consistant à considérer ces isomorphismes canoniques comme des identités, ce qui revient à voir $\mathsf{Bimod}(B, B)$ comme une catégorie monoïdale stricte.

Un (B, B)-bimodule admet un dual à gauche dans $\mathsf{Bimod}(B, B)$ si et seulement s'il est projectif de type fini comme B-module à droite.

Plus généralement, soient A, B deux algèbres, et M un (A, B)-bimodule; supposons M projectif de type fini en tant que B-module à droite. On appelle *dual à gauche de* M le (B, A)-bimodule ${}^*M = \mathsf{Hom}_B(M, B)$. (Il est projectif de type fini en tant que B-module à gauche.) Soit ∂_M l'antécédent de 1_M par l'application (A, A)-linéaire canonique $M \otimes_B {}^*M \longrightarrow \mathsf{End}_B(M)$, qui est bijective; notons coev_M l'application $A \longrightarrow M \otimes_B {}^*M$, $a \mapsto a\partial_M = \partial_M a$, et $\mathsf{ev}_M : {}^*M \otimes_A M \longrightarrow B$ l'évaluation. On a alors $(1_M \otimes_B \mathsf{ev}_M)(\mathsf{coev}_M \otimes_A 1_M) = 1_M$ et $(\mathsf{ev}_M \otimes_B 1_{^*M})(1_{^*M} \otimes_A \mathsf{coev}_M) = 1_{^*M}$ ([Bru], exemple p. 5824).

Dans le cas particulier où $A = B$, $({}^*M, M, \mathsf{ev}_M, \mathsf{coev}_M)$ est une dualité de $\mathsf{Bimod}(B, B)$.

2) Soit B une algèbre commutative. Alors $\mathsf{Mod}\, B$, munie du produit tensoriel $\otimes_B$, est une catégorie monoïdale d'objet unité B, avec les contraintes canoniques. Elle s'identifie à la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathsf{Bimod}(B, B)$ des bimodules dont les deux structures de B-module coïncident. Il résulte donc de l'exemple 1) qu' un B-module N admet un dual à gauche si et seulement s'il est projectif de type fini. De plus, si tel est le cas, N admet un dual à gauche canonique ${}^*N = \mathsf{Hom}_B(N, B)$, l'évaluation étant le morphisme d'évaluation ordinaire $\mathsf{ev}_N : {}^*N \otimes_B N \longrightarrow B$, et la coévaluation, le morphisme $\mathsf{coev}_N : B \longrightarrow N \otimes_B {}^*N$ défini ci-dessus.

Ainsi, la catégorie monoïdale $\mathsf{proj}\, B$ est munie d'une structure autonome à gauche canonique, pour laquelle le foncteur dual à gauche est ${}^*? = \mathsf{Hom}_B(\,?, B)$;

1.2. Foncteurs quasi-monoïdaux

Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales. Soit F un foncteur $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$, et, pour tous X, Y objets de $\mathcal{C}$, donnons-nous un isomorphisme fonctoriel

$$\Phi_{2\,X,Y} : F(X) \otimes' F(Y) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes Y)\,.$$

On peut alors définir deux isomorphismes fonctoriels

$$\Phi_3{}^1{}_{X,Y,Z} = \Phi_{2\,X\otimes Y,Z}(\Phi_{2\,X,Y} \otimes' 1_{F(Z)}) : (F(X) \otimes' F(Y)) \otimes' F(Z) \xrightarrow{\sim} F((X \otimes Y) \otimes Z)\,,$$
$$\Phi_3{}^2{}_{X,Y,Z} = \Phi_{2\,X,Y\otimes Z}(1_{F(X)} \otimes' \Phi_{2\,Y,Z}) : F(X) \otimes' (F(Y) \otimes' F(Z)) \xrightarrow{\sim} F(X \otimes (Y \otimes Z))\,.$$

On considère la condition

(CA) $$F(a_{X,Y,Z})\Phi_3{}^1{}_{X,Y,Z} = \Phi_3{}^2{}_{X,Y,Z}\, a'_{F(X),F(Y),F(Z)}\,,$$

qu'on appelle *compatibilité aux contraintes d'associativité*.

Supposons donné, d'autre part, un isomorphisme $\Phi_0 : I' \xrightarrow{\sim} F(I)$. On peut alors définir deux isomorphismes fonctoriels :

$$L_X = F(l_X)\Phi_{2\,I,X}(\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)}) : I' \otimes' F(X) \xrightarrow{\sim} F(X)\,,$$
$$R_X = F(r_X)\Phi_{2\,X,I}(1_{F(X)} \otimes' \Phi_0) : F(X) \otimes' I' \xrightarrow{\sim} F(X)\,.$$

On considère la condition

$$\text{(CU)} \qquad L_X = {l'}_{F(X)} \quad \text{et} \quad R_X = {r'}_{F(X)}\,,$$

qu'on appelle *compatibilité aux contraintes d'unité.*

1.2.1. Définition. Une telle donnée (F, Φ_2, Φ_0) est appelée *foncteur prémonoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$*. On dit que c'est un *foncteur quasi-monoïdal* (resp. un *foncteur monoïdal*) s'il vérifie la condition (CU) (resp. les conditions (CA) et (CU)). On appelle *équivalence de catégories monoïdales* tout foncteur monoïdal dont le foncteur sous-jacent est une équivalence de catégories.

D'autre part, le foncteur prémonoïdal (F, Φ_2, Φ_0) est dit *strict* s'il vérifie les conditions suivantes : $F(X) \otimes' F(Y) = F(X \otimes Y)$, $I' = F(I)$, et ${\Phi_2}_{X,Y}$ et Φ_0 sont les identités.

On compose les foncteurs prémonoïdaux de la façon évidente; le composé de deux foncteurs quasi-monoïdaux (resp. monoïdaux) est un foncteur quasi-monoïdal (resp. monoïdal).

1.2.2. Définition. Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales, et (F, Φ_2, Φ_0) et (G, Ψ_2, Ψ_0) deux foncteurs prémonoïdaux de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Soit γ un morphisme fonctoriel de F vers G. On dit que γ est *quasi-monoïdal* s'il vérifie

$$\gamma_I \Phi_0 = \Psi_0\,;$$

on dit qu'il est *monoïdal* s'il est quasi-monoïdal, et qu'en outre il vérifie

$$\gamma_{X \otimes Y} {\Phi_2}_{X,Y} = {\Psi_2}_{X,Y} (\gamma_X \otimes' \gamma_Y)\,.$$

1.2.3. Deux catégories monoïdales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont dites *monoïdalement équivalentes* s'il existe une équivalence de catégories monoïdales de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. La donnée d'une telle équivalence identifie essentiellement $\mathcal{C}$ à $\mathcal{C}'$.

Plus précisément, soit (F, Φ_2, Φ_0) une équivalence de catégories monoïdales de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, et soit G un quasi-inverse de F; donnons-nous des isomorphismes fonctoriels $u : FG \xrightarrow{\sim} 1_{\mathcal{C}'}$ et $v : 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} GF$. Alors G admet une unique structure de foncteur monoïdal pour laquelle u et v sont des isomorphismes fonctoriels monoïdaux.

Le théorème de cohérence de MacLane affirme que lorsqu'on travaille dans une catégorie monoïdale, on peut "faire comme si" les contraintes d'associativité et d'unité étaient des identités. On peut formuler ce théorème comme suit : toute catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte (voir [McL]).

1.2.4. Remarque. S'il existe un isomorphisme fonctoriel entre deux foncteurs quasi-monoïdaux, il en existe un qui est quasi-monoïdal. En effet, soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales strictes et (F, Φ_2, Φ_0), (G, Ψ_2, Ψ_0) deux foncteurs quasi-monoïdaux de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Soit γ un isomorphisme fonctoriel de F vers G, et posons $c = {\Phi_0}^{-1} \gamma_I^{-1} \Psi_0$. Alors $\gamma' = c \otimes' \gamma$ est un isomorphisme fonctoriel quasi-monoïdal de F vers G.

1.2.5. Proposition. *Soit* (F,Φ_2,Φ_0) *un foncteur prémonoïdal de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$*, et supposons* $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *strictes pour simplifier les notations, de sorte qu'on a* $L_X = \Phi_{2\,I,X}(\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)})$ *et* $R_X = \Phi_{2\,X,I}(1_{F(X)} \otimes' \Phi_0)$*. Posons* $\Phi_2' = \Phi_2(R^{-1} \otimes' L^{-1})$*, et* $\Phi_0' = \Phi_{2\,I,I}(\Phi_0 \otimes' \Phi_0)$*. Alors :*

1) (Φ_2',Φ_0') *vérifie* (CU)*;*

2) si Φ_2 *vérifie* (CA)*,* Φ_2' *la vérifie aussi.*

Démonstration.

1) Observons qu'on a $\Phi_0' = R_I\Phi_0 = L_I\Phi_0$. On a donc $\Phi'_{2\,I,X}(\Phi_0' \otimes' 1_{F(X)}) = \Phi_{2\,I,X}(R_I^{-1}\Phi_0' \otimes' L_X^{-1}) = \Phi_{2\,I,X}(\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)})(\Phi_0^{-1}R_I^{-1}\Phi_0' \otimes' L_X^{-1}) = L_X L_X^{-1} = 1_{F(X)}$, et $\Phi'_{2\,X,I}(1_{F(X)} \otimes' \Phi_0') = 1_{F(X)}$ par un calcul semblable.

2) On fait l'hypothèse (CA) pour Φ_2, et, procédant par étapes, on la vérifie pour Φ_2'.
(i) R_X et L_X commutent. En effet $R_X L_X = \Phi_{2\,X,I}(1_{F(X)} \otimes' \Phi_0)\Phi_{2\,I,X}(\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)}) = \Phi_{2\,X,I}(\Phi_{2\,I,X} \otimes' 1_{F(I)})(\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)} \otimes' \Phi_0)$; un calcul similaire montre que $L_X R_X$ est égal à $\Phi_{2\,I,X}(1_{F(I)} \otimes' \Phi_{2\,X,I})(\Phi_0 \otimes' 1_{F(X)} \otimes' \Phi_0)$, donc à $R_X L_X$ en vertu de (CA).
(ii) On a $R_{X\otimes Y}\Phi_{2\,X,Y} = \Phi_{2\,X,Y}(1_{F(X)} \otimes' R_Y)$ et $L_{Y\otimes Z}\Phi_{2\,Y,Z} = \Phi_{2\,Y,Z}(L_Y \otimes' 1_{F(Z)})$. En effet, $R_{X\otimes Y}\Phi_{2\,X,Y} = \Phi_{2\,X\otimes Y,I}(\Phi_{2\,X,Y} \otimes' \Phi_0) = \Phi_{2\,X,Y}(1_{F(X)} \otimes' \Phi_{2\,Y,I}(1_{F(Y)} \otimes' \Phi_0)) = \Phi_{2\,X,Y}(1_{F(X)} \otimes' R_Y)$ (par (CA)); et la seconde égalité se vérifie de même.
(iii) Vérifions (CA) pour Φ_2'. Il s'agit de montrer :

$$\Phi_{2\,X\otimes Y,Z}(R^{-1}_{X\otimes Y}\Phi_{2\,X,Y}(R_X^{-1} \otimes' L_Y^{-1}) \otimes' L_Z^{-1}) = \Phi_{2\,X,Y\otimes Z}(R_X^{-1} \otimes' L^{-1}_{Y\otimes Z}\Phi_{2\,Y,Z}(R_Y^{-1} \otimes' L_Z^{-1}))\,.$$

Or, en vertu de (ii), le premier membre vaut $\Phi_{2\,X\otimes Y,Z}(\Phi_{2\,X,Y}(R_X^{-1} \otimes' R_Y^{-1}L_Y^{-1}) \otimes' L_Z^{-1})$, et le second, $\Phi_{2\,X,Y\otimes Z}(R_X^{-1} \otimes' \Phi_{2\,Y,Z}(L_Y^{-1}R_Y^{-1} \otimes' L_Z^{-1}))$. Ces deux termes sont donc égaux en vertu de (i) et de (CA). □

1.2.6. Remarque. La proposition (**1.2.5**) signifie que la condition (CU) est anodine : partant d'un foncteur prémonoïdal (F,Φ_2,Φ_0), on peut toujours, en modifiant Φ_2 et Φ_0, en faire un foncteur quasi-monoïdal. On peut en faire un foncteur monoïdal si le Φ_2 donné vérifie (CA).

Par contre, la condition (CA) est une hypothèse forte : étant donné un foncteur prémonoïdal, il n'existe pas toujours de foncteur monoïdal ayant même foncteur sous-jacent, comme en témoigne l'exemple suivant.

1.2.7. Exemple. Il s'agit d'un exemple dû à R. Dijkgraaf, V. Pasquier, et P. Roche ([Di-P-R]). Soit G un groupe, et k un anneau commutatif. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie définie comme suit : les objets de $\mathcal{C}$ sont les éléments de G, et pour g, $h \in G$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}}(g,h) = k$ si $g = h$, 0 sinon; la composition des flèches est la multiplication de k. Soit $\otimes$ le foncteur $\mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ défini sur les objets par la loi de composition interne de G, i. e. $g \otimes h = gh$, et sur les flèches, par la multiplication de k.

Alors $\mathcal{C}$, munie du produit tensoriel $\otimes$, est une catégorie monoïdale stricte d'objet unité l'élément neutre e de G.

Donnons-nous une application $a : G^3 \longrightarrow k^*$, et deux applications l, $r : G \longrightarrow k^*$. On peut voir a (resp. l, r) comme un isomorphisme fonctoriel $g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 \xrightarrow{\sim} g_1 \otimes g_2 \otimes g_3$ (resp. $e \otimes g \xrightarrow{\sim} g$, resp. $g \otimes e \xrightarrow{\sim} g$). Alors $(\mathcal{C},\otimes,e,a,l,r)$ est une catégorie monoïdale si et seulement si les conditions suivantes sont remplies :

$$a(g_2,g_3,g_4)a(g_1,g_2g_3,g_4)a(g_1,g_2,g_3) = a(g_1,g_2,g_3g_4)a(g_1g_2,g_3,g_4)\,,$$
$$l(g_2)a(g_1,e,g_2) = r(g_1)\,.$$

La première condition, traduction du pentagone de McLane, signifie que a est un 3-cocycle de G à valeurs dans k^*. Elle entraîne en particulier $a(g,e,g') = a(g,e,e)a(e,e,g')$.

Ainsi, étant donné un 3-cocycle $a : G^3 \longrightarrow k^*$, les couples r, l vérifiant la seconde condition sont donnés par $r(g) = c\,a(g,e,e)$ et $l(g) = c\,a(e,e,g)^{-1}$ pour un élément c de k^*. Deux valeurs distinctes de c définissent clairement des catégories monoïdalement équivalentes. On note $\mathcal{C}^a$ la catégorie monoïdale obtenue pour $c = 1$.

Soient a et a' deux 3-cocycles de G à valeurs dans k^*. Soit $\phi_2 : G^2 \longrightarrow k^*$ et $\phi_0 \in k^*$. Alors $(1_{\mathcal{C}}, \phi_2, \phi_0)$ est un foncteur quasi-monoïdal de $\mathcal{C}^a$ vers $\mathcal{C}^{a'}$ si et seulement s'il vérifie $a(e,e,g)^{-1}\phi_2(e,g)\phi_0 = a'(e,e,g)^{-1}$ et $a(g,e,e)\phi_2(g,e)\phi_0 = a'(g,e,e)$. Il est monoïdal si et seulement s'il vérifie en outre

$$a(g_1,g_2,g_3)\phi_2(g_1g_2,g_3)\phi_2(g_1,g_2) = \phi_2(g_1,g_2g_3)\phi_2(g_2,g_3)a'(g_1,g_2,g_3)\,,$$

ce qui signifie que aa'^{-1} est le bord de ϕ_2.

Par conséquent, le foncteur identité admet toujours une structure de foncteur quasi-monoïdal de $\mathcal{C}^a$ vers $\mathcal{C}^{a'}$, mais il admet une structure de foncteur monoïdal si et seulement si a et a' définissent la même classe dans $\mathsf{H}^3(G,k^*)$, par **1.2.6.**

1.3. Foncteurs autonomes

1.3.1. Définition. Donnons-nous deux catégories monoïdales autonomes à gauche $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, munies de structures autonomes à gauche. On note respectivement ${}^\vee?$ et ${}^*?$ les foncteurs dual à gauche de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$.

Soit F un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. On appelle *structure autonome à gauche sur* F tout isomorphisme fonctoriel $\Phi_1 : {}^*? \circ F \tilde{\to} F \circ {}^\vee?$.

Le foncteur F est dit *autonome à gauche* si, étant données des structures autonomes à gauche sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, il existe une structure autonome à gauche sur F; cette condition est indépendante du choix des structures autonomes à gauche sur $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, en raison de l'unicité des foncteurs dual à gauche à isomorphisme près.

1.3.2. Remarque. Soit (F,Φ_2,Φ_0) un foncteur prémonoïdal de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Pour X objet de $\mathcal{C}$, on a choisi une dualité $({}^\vee X, X, e_X, h_X)$ de $\mathcal{C}$. On pose $E_X = {\Phi_0}^{-1}F(e_X){\Phi_2}_{{}^\vee X,X} : F({}^\vee X)\otimes' F(X) \longrightarrow I'$ et $H_X = {\Phi_2}^{-1}_{X,{}^\vee X}F(h_X)\Phi_0 : I' \longrightarrow F(X)\otimes' F({}^\vee X)$.

1) Dans le cas où (F,Φ_2,Φ_0) est monoïdal, $(F({}^\vee X), F(X), E_X, H_X)$ est une dualité de $\mathcal{C}'$; d'où un isomorphisme fonctoriel ${}^*F(X) \tilde{\to} F({}^\vee X)$. Autrement dit, tout foncteur monoïdal d'une catégorie monoïdale autonome à gauche dans une autre est autonome à gauche.

2) Dans le cas général, supposons donnée une structure autonome à gauche Φ_1 sur F. On peut alors voir $F({}^\vee X)$ comme un dual à gauche de $F(X)$ via l'isomorphisme ${\Phi_1}_X$. La donnée de Φ_1 définit deux endomorphismes du foncteur F, α et β : α_X et β_X sont les images respectives de E_X et de H_X dans les isomorphismes d'adjonction $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(F({}^\vee X)\otimes' F(X), I') \tilde{\to} \mathsf{End}_{\mathcal{C}'}(F(X))$ et $\mathsf{Hom}_{\mathcal{C}'}(I', F(X)\otimes' F({}^\vee X)) \tilde{\to} \mathsf{End}_{\mathcal{C}'}(F(X))$ (cf. **1.1.2**).

2. Généralités sur les cogébroïdes

2.1. Définitions et rappels

2.1.1. Soit B une algèbre. Un *cogébroïde de base* B est une cogèbre dans la catégorie monoïdale $\mathsf{Bimod}(B,B)$. Autrement dit, c'est un (B,B)-bimodule L muni de morphismes de (B,B)-bimodules $\Delta : L \longrightarrow L \otimes_B L$ et $\varepsilon : L \longrightarrow B$, appelés respectivement *coproduit* et *coünité*, vérifiant les axiomes suivants :

$$(1_L \otimes_B \Delta)\Delta = (\Delta \otimes_B 1_L)\Delta \ ,$$
$$(1_L \otimes_B \varepsilon)\Delta = 1_L = (\varepsilon \otimes_B 1_L)\Delta \ .$$

Un *morphisme de cogébroïdes de base* B est un morphisme de cogèbres dans la catégorie $\mathsf{Bimod}(B,B)$, autrement dit un morphisme de (B,B)-bimodules compatible aux coproduits et aux coünités. On note Cog_B la catégorie des cogébroïdes de base B.

Le (B,B)-bimodule B^e est muni d'une structure de cogébroïde, dont le coproduit est donné par $\Delta(x \otimes y) = (x \otimes 1) \otimes_B (1 \otimes y)$ et la coünité par $\varepsilon(x \otimes y) = xy$.

Si L est un cogébroïde de base B, L^o est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base B^o.

2.1.2. Soit L un cogébroïde de base B. Un L*-comodule à droite* est un B-module à droite V muni d'une *coaction à droite de* L, c'est-à-dire un morphisme de B-modules à droite $\delta : V \longrightarrow V \otimes_B L$ vérifiant les axiomes suivants :

$$(\delta \otimes_B 1_L)\delta = (1_V \otimes_B \Delta)\delta \ ,$$
$$(1_V \otimes_B \varepsilon)\delta = 1_V \ .$$

Un *morphisme de* L*-comodules à droite* est un morphisme de B-modules à droite compatible aux coactions. On note $\mathsf{Comod}\, L$ la catégorie des L-comodules à droite, $\mathsf{comod}\, L$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Comod}\, L$ des comodules dont le B-module sous-jacent est de type fini, et U_L le foncteur oubli $\mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Mod}\, B$.

Tout morphisme $f : L \longrightarrow L'$ de cogébroïdes de base B induit un foncteur image directe

$$f_* : \mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Comod}\, L'$$
$$(V,\delta) \mapsto (V, (1_V \otimes_B f)\delta) \, .$$

On définit de même les notions de *coaction à gauche* et de *comodule à gauche*. Se donner une coaction à gauche de L sur un B-module à gauche V revient à se donner une coaction à droite de L^o sur le B^o-module à droite V^o.

2.1.3. Remarque. Soit $X = (V,\delta)$ un L-comodule à droite, et supposons V projectif de type fini comme B-module. Soit ${}^*V = \mathsf{Hom}_B(V,B)$: si l'on considère V comme un (k,B)-bimodule, ${}^*V$ n'est autre que le dual à gauche de V tel qu'il est défini en **1.1.3.** Alors ${}^*V$ est naturellement muni d'une structure de L-comodule à gauche, ou, si l'on préfère, de L^o-comodule à droite, la coaction de L étant le composé des morphismes

$${}^*V \xrightarrow{1_{{}^*V} \otimes \mathsf{coev}_V} {}^*V \otimes V \otimes_B {}^*V \xrightarrow{1_{{}^*V} \otimes \delta \otimes_B 1_{{}^*V}} {}^*V \otimes V \otimes_B L \otimes_B {}^*V \xrightarrow{\mathsf{ev}_V \otimes_B 1_{L \otimes_B {}^*V}} L \otimes_B {}^*V \, .$$

2.1.4. Soient $\phi : B \longrightarrow C$ un morphisme d'algèbres, et L un cogébroïde de base B. Alors $C \otimes_B L \otimes_B C$ est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base C, qu'on note $\phi_* L$. Ceci définit un foncteur image directe $\phi_* : \mathsf{Cog}_B \longrightarrow \mathsf{Cog}_C$.

De même, si $X = (V, \delta)$ est un L-comodule à droite, $V \otimes_B C$ est naturellement muni d'une coaction à droite de $\phi_* L$; d'où un foncteur image directe, noté encore $\phi_* : \mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Comod}\, \phi_* L$.

Si, pour $i = 1, 2$, L_i est un cogébroïde de base B_i, de coproduit Δ_i et de coünité ε_i, $L_1 \otimes L_2$ est naturellement muni d'une structure de cogébroïde de base $B_1 \otimes B_2$.

De plus, si $X_i = (V_i, \delta_i)$ est un L_i-comodule à droite pour $i = 1,\ 2$, alors $V_1 \otimes V_2$ admet une structure naturelle de $L_1 \otimes L_2$-comodule à droite, qu'on note $X_1 \otimes X_2$; d'où un foncteur $\otimes : \mathsf{Comod}\, L_1 \times \mathsf{Comod}\, L_2 \longrightarrow \mathsf{Comod}(L_1 \otimes L_2)$.

2.1.5. Supposons B commutatif. La multiplication de B, notée μ_B, est un morphisme d'algèbres $B \otimes B \longrightarrow B$. Si L_1 et L_2 sont deux cogébroïdes de base B, $L = \mu_{B*}(L_1 \otimes L_2)$ est un cogébroïde de base B qu'on note $L_1 \otimes_{B^e} L_2$. (Cette notation se justifie par le fait qu'en tant que B^e-module, L s'identifie canoniquement au produit tensoriel de L_1 et L_2 sur B^e.)

Le produit tensoriel $\otimes_{B^e}$ ainsi défini fait de Cog_B une catégorie monoïdale stricte,[1] d'objet unité B^e.

Pour $i = 1, 2$, soit L_i un cogébroïde de base B et $X_i = (V_i, \delta_i)$ un L_i-comodule à droite. Alors $\mu_{B*}(X_1 \otimes X_2)$ est un $L_1 \otimes_{B^e} L_2$-comodule à droite, de B-module sous-jacent $V_1 \otimes_B V_2$, et qu'on notera $X_1 \otimes_B X_2$.

2.2. Produit de convolution

2.2.1. Définition. Soient B une algèbre, et L un cogébroïde de base B. Si M est un (B, B)-bimodule, on note $C(L, M)$ le module des applications (B, B)-linéaires de L vers M.

Soient M et N deux (B, B)-bimodules. Si $\varphi \in C(L, M)$ et $\psi \in C(L, N)$, l'application $(\varphi \otimes_B \psi)\Delta : L \longrightarrow M \otimes_B N$ est un élément de $C(L, M \otimes_B N)$ appelé *produit de convolution de* φ *et* ψ et noté $\varphi * \psi$.

Le produit de convolution est associatif, et admet pour élément neutre $\varepsilon \in C(L, B)$. En particulier, il fait de $C(L, B)$ une algèbre, et de $C(L, M)$ un $(C(L, B), C(L, B))$-bimodule.

Soient $X = (V, \delta)$ un L-comodule à droite, et M un (B, B)-bimodule. Si $\varphi \in C(L, M)$, on note φ_X l'application B-linéaire à droite $(1_V \otimes_B \varphi)\delta : V \longrightarrow V \otimes_B M$. Lorsque $M = B$, on définit ainsi sur V une structure de $C(L, B)$-module *à gauche*.

2.2.2. Notations. Supposons B commutatif. Si L est un cogébroïde de base B, on pose $L^{(n)} = L \otimes_{B^e} L \otimes_{B^e} \cdots \otimes_{B^e} L$ (n fois) pour $n \in \mathbb{N}$; on note $\varepsilon^{(n)}$ la coünité de $L^{(n)}$. Si M est un (B, B)-bimodule, on pose $C^n(L, M) = C(L^{(n)}, M)$. Notons que $C^n(L, M)$ s'identifie à l'ensemble des applications de L^n dans M qui sont B-linéaires à gauche et à droite en chaque variable. Nous utiliserons indifféremment ces deux points de vue.

[1] Dans la mesure où on considère $\mathsf{Mod}\, B^e$ comme stricte.

Si, pour $i = 1, \ldots, n$, $X_i = (V_i, \delta_i)$ est un L-comodule à droite, $X_1 \otimes_B \cdots \otimes_B X_n$ est un $L^{(n)}$-comodule à droite; pour tout (B,B)-bimodule M et tout $\varphi \in C^n(L,M)$, on notera $\varphi_{X_1,\ldots,X_n}$ l'application $\varphi_{X_1 \otimes_B \cdots \otimes_B X_n} : V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n \longrightarrow V_1 \otimes_B \cdots \otimes_B V_n \otimes_B M$.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\psi \in C^n(L,M)$ on note ψ_σ, ou $\psi_{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)}$, l'élément de $C^n(L,M)$ défini par la formule :

$$\psi_\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) .$$

Soit j une injection de $\{1, \ldots, m\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$. Pour $\Psi \in C^m(L,B)$, on définit un élément de $C^n(L,B)$, noté Ψ_j, ou $\Psi_{j(1),\ldots,j(m)}$, par la formule :

$$\Psi_j(x_1, \ldots, x_n) = \Psi(x_{j(1)}, \ldots, x_{j(n)}) \prod_{i \in \{1,\ldots,n\} \setminus \mathsf{Im}(j)} \varepsilon(x_i) .$$

3. Cogébroïdes de coendomorphismes

3.1. Définitions

3.1.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, B une algèbre, et F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{proj}\, B$. Si M est un (B,B)-bimodule, on entend par *morphisme fonctoriel de F vers $F \otimes_B M$* la donnée pour chaque objet X de $\mathcal{C}$ d'une application B-linéaire à droite $\varphi_X : F(X) \longrightarrow F(X) \otimes_B M$ de telle sorte que, pour tout morphisme $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$, on ait :

$$(F(f) \otimes_B 1_M)\varphi_X = \varphi_Y F(f) .$$

On note $C(F,M)$ l'ensemble des morphismes fonctoriels de F vers $F \otimes_B M$. Si N est un second (B,B)-bimodule, on définit un produit de composition

$$\begin{gathered} C(F,M) \times C(F,N) \longrightarrow C(F, M \otimes_B N) \\ (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \circ \psi = (\varphi \otimes_B 1_N)\psi . \end{gathered}$$

Ce produit est associatif, et admet pour élément neutre $1_F \in C(F,B)$.

Le foncteur

$$\begin{gathered} \mathsf{Bimod}(B,B) \longrightarrow \mathcal{E}ns \\ M \mapsto C(F,M) \end{gathered}$$

est représentable. Autrement dit, il existe un (B,B)-bimodule, noté $L(F)$, équipé d'un élément $\delta_0 \in C(F, L(F))$, et tel que pour tout (B,B)-bimodule M et tout $\varphi \in C(F,M)$, il existe un unique morphisme de (B,B)-bimodules $\widetilde{\varphi} : L(F) \longrightarrow M$ vérifiant $\varphi = (1_F \otimes_B \widetilde{\varphi})\delta_0$.

En particulier, les élément $\delta_0 \circ \delta_0 \in C(F, L(F) \otimes_B L(F))$ et $1_F \in C(F,B)$ correspondent à des application (B,B)-linéaires $\Delta : L(F) \longrightarrow L(F) \otimes_B L(F)$ et $\varepsilon : L(F) \longrightarrow B$; et $(L(F), \Delta, \varepsilon)$ est un cogébroïde de base B, appelé *cogébroïde des coendomorphismes de F*.

3.1.2. Étant donné un cogébroïde L de base B, on appelle *coaction à droite de L sur F* un morphisme fonctoriel $\delta : F \longrightarrow F \otimes_B L$ tel que, pour chaque objet X de $\mathcal{C}$, δ_X soit une coaction à droite de L sur $F(X)$.

Lorsqu'on munit $L(F)$ de la structure de cogébroïde de base B définie ci-dessus, δ_0 est une coaction à droite de $L(F)$ sur F, la *coaction universelle*, et $L(F)$ représente le foncteur

$$\begin{gathered}\mathsf{Cog}_B \longrightarrow \mathcal{E}ns \\ L \longrightarrow \{\text{coactions à droite de } L \text{ sur } F\}\,.\end{gathered}$$

Pour tout (B,B)-bimodule M, la propriété universelle du bimodule $L(F)$ définit une bijection canonique de $C(L(F),M)$ sur $C(F,M)$; dans cette bijection, le produit de convolution correspond à la composition des morphismes fonctoriels définie ci-dessus. Désormais nous identifierons $C(F,M)$ à $C(L(F),M)$.

3.1.3. La coaction universelle définit un foncteur

$$\begin{gathered}\widetilde{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Comod}\, L(F) \\ X \mapsto (F(X), {\delta_0}_X)\end{gathered}$$

rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Comod}\, L(F) \arrow[d, "U_L(F)"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathsf{Mod}\, B\,. \end{tikzcd}$$

3.1.4. Remarque. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, et F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{proj}\, B$. Notons $F^{\%}$ le foncteur $\mathcal{C}^o \longrightarrow \mathsf{proj}\, B^o$, $X \longmapsto \mathsf{Hom}_B(F(X),B)$. En vertu de la remarque **2.1.3,** pour tout cogébroïde L de base B, la donnée d'une coaction à droite de L sur $F^{\%}$ équivaut à la donnée d'une coaction à gauche de L sur F; d'où un isomorphisme canonique $L(F^{\%}) \xrightarrow{\sim} L(F)^o$.

3.2. Fonctorialités

3.2.1. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, et F, F' deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}\, B$. Alors tout isomorphisme fonctoriel $\gamma : F \xrightarrow{\sim} F'$ définit un isomorphisme de cogébroïdes $\mathsf{ad}(\gamma) : L(F) \xrightarrow{\sim} L(F')$, correspondant à la coaction à droite de $L(F')$ sur F via γ. D'autre part, tout foncteur $H : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$ définit un morphisme de cogébroïdes $L(H) : L(FH) \longrightarrow L(F)$, correspondant à la coaction à droite de $L(F)$ sur FH.

3.2.2. On se propose de construire une catégorie Cat_B, dont les objets seront les foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$, de sorte que les fonctorialités ci-dessus s'expriment par l'existence d'un foncteur $L : \mathsf{Cat}_B \longrightarrow \mathsf{Cog}_B$. Idéalement, on aimerait faire de L une équivalence de catégories; cet aspect de la question fera l'objet du théorème **5.1.4.**

Soit Cat_B^0 la catégorie suivante. Les objets de Cat_B^0 sont les foncteurs $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie essentiellement petite. Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ et $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ sont deux objets de Cat_B^0, les flèches de F vers F' dans Cat_B^0 sont les couples (H, γ), où H est un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, et γ un isomorphisme fonctoriel $F \xrightarrow{\sim} F'H$. Si $F'' : \mathcal{C}'' \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ est un troisième objet de Cat_B et (H', γ') une flèche de F' vers F'', alors la composée $(H', \gamma') \circ (H, \gamma)$ est $(H'H, \gamma' H \circ \gamma)$. L'identité de F est $(1_{\mathcal{C}}, 1_F)$.

On définit un foncteur $L^0 : \mathsf{Cat}_B^0 \longrightarrow \mathsf{Cog}_B$, sur les objets, par $F \mapsto L(F)$, et sur les flèches, par $(H, \gamma) \mapsto L(H) \circ \mathsf{ad}(\gamma)$.

On considère sur Cat_B^0 la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie comme suit. Si (H, γ) et (H', γ') sont deux flèches de Cat_B^0, de source F et de but F', alors $(H, \gamma)\ \mathcal{R}\ (H', \gamma')$ si et seulement s'il existe un isomorphisme fonctoriel $g : H \xrightarrow{\sim} H'$ tel que $\gamma' = F'(g)\gamma$. On observe que deux flèches équivalentes ont même image par L^0.

On note Cat_B la catégorie quotient de Cat_B^0 par $\mathcal{R}$, et L le foncteur $\mathsf{Cat}_B \longrightarrow \mathsf{Cog}_B$ obtenu par passage au quotient de L^0. On note $[H, \gamma]$ l'image dans Cat_B d'une flèche (H, γ) de Cat_B^0 ; c'est un isomorphisme de Cat_B si et seulement si H est une équivalence de catégories.

3.2.3. Proposition. *Soit $[H, \gamma]$ un morphisme de Cat_B de source $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ et de but $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$. Soient M un (B, B)-bimodule, et Ψ un élément de $C(L(F'), M)$, qu'on voit comme un morphisme fonctoriel de F' vers $F' \otimes_B M$ (cf.* **3.1.2***). Alors l'élément $\Psi \circ L(H, \gamma) \in C(L(F), M)$ correspond au morphisme fonctoriel $(\gamma^{-1} \otimes_B 1_M) \circ \Psi H \circ \gamma : F \longrightarrow F \otimes_B M$.* $\square$

3.2.4. Supposons B commutatif. Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ et $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ sont deux objets de Cat_B, on définit $F \otimes_B F' : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ par $F \otimes_B F' = \otimes_B \circ (F \times F')$ (autrement dit $(F \otimes_B F')(X, Y) = F(X) \otimes_B F'(Y)$).

D'autre part, notons $*$ la catégorie réduite à un seul objet et un seul morphisme, et si X est un objet d'une catégorie $\mathcal{A}$, notons X_* l'unique foncteur de $*$ vers $\mathcal{A}$ prenant la valeur X sur l'unique objet de $*$. En particulier, B_* est un foncteur de $*$ vers $\mathsf{proj}\, B$.

Le produit tensoriel défini ci-dessus fait de Cat_B une catégorie monoïdale d'objet unité le foncteur B_* (avec les contraintes évidentes).

De plus, on a des isomorphismes naturels $L(F) \otimes_{B^e} L(F') \simeq L(F \otimes_B F')$ et $B^e \simeq L(B_*)$, faisant de L un foncteur monoïdal de Cat_B vers Cog_B.

4. Bigébroïdes et quasi-bigébroïdes

Dans toute la section **4,** B désigne une algèbre commutative.

4.1. Définitions

4.1.1. Définition. Un *bigébroïde de base B* est une algèbre dans la catégorie monoïdale des cogébroïdes de base B.

De façon équivalente, c'est un cogébroïde L de base B, muni d'éléments $\mu \in C^2(L, L)$ et $\eta \in C^0(L, L)$ vérifiant :

(B1) $\mu : L\otimes_{B^e} L \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B;
(B2) $\eta : B^e \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B;
(B3) η est neutre à gauche et à droite pour μ [on a $\mu\circ(\eta\otimes_{B^e} 1_L) = 1_L = \mu\circ(1_L\otimes_{B^e}\eta)$];
(B4) μ est associatif [on a $\mu\circ(\mu\otimes_{B^e} 1_L) = \mu\circ(1_L\otimes_{B^e}\mu)$].

4.1.2. Définition. Un *quasi-bigébroïde de base* B est un cogébroïde L de base B muni d'éléments $\mu\in C^2(L,L)$, $\eta\in C^0(L,L)$ et $\Phi\in C^3(L,B)$, vérifiant les axiomes suivants :
(QB1) $\mu : L\otimes_{B^e} L \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B;
(QB2) $\eta : B^e \longrightarrow L$ est un morphisme de cogébroïdes de base B;
(QB3) η est neutre à droite et à gauche pour μ;
(QB4) $\Phi * (\mu\circ(\mu\otimes_{B^e} 1_L)) = (\mu\circ(1_L\otimes_{B^e}\mu)) * \Phi$ dans $C^3(L,L)$;
(QB5) $(\Phi\circ(1_L\otimes_{B^e} 1_L\otimes_{B^e}\mu))*(\Phi\circ(\mu\otimes_{B^e} 1_L\otimes_{B^e} 1_L)) = \Phi_{234}*(\Phi\circ(1_L\otimes_{B^e}\mu\otimes_{B^e} 1_L))*\Phi_{123}$ dans $C^4(L,B)$;
(QB6) $\Phi\circ(1_L\otimes_{B^e}\eta\otimes_{B^e} 1_L) = \varepsilon^{(2)}$ dans $C^2(L,B)$;
(QB7) Φ est inversible dans $C^3(L,B)$ pour le produit de convolution.

4.1.3. Remarques.

1) La notion de bigébroïde a été introduite par G. Maltsiniotis dans [Mal] (la définition donnée dans [Mal] est différente, mais équivalente), et celle de quasi-bigébroïde, dans [Bru-Mal].

2) Soit (L,μ,η,Φ) un quasi-bigébroïde de base B. On définit deux applications s , $b : B \longrightarrow L$, appelées respectivement *source* et *but*, par $s(x) = \eta(1\otimes x)$ et $b(x) = \eta(x\otimes 1)$.

Il résulte de (QB2) que $\varepsilon\eta$ est la multiplication de B, donc on a $\varepsilon s = \varepsilon b = 1_B$; en particulier si $B\neq 0$, on a $\mathcal{L}\neq 0$.

3) Si (L,μ,η) est un bigébroïde de base B, $(L,\mu,\eta,\varepsilon^{(3)})$ est un quasi-bigébroïde de base B. Inversement, si (L,μ,η,Φ) est un quasi-bigébroïde tel que $\Phi=\varepsilon^{(3)}$, (L,μ,η) est un bigébroïde.

On identifie le bigébroïde (L,μ,η) au quasi-bigébroïde $(L,\mu,\eta,\varepsilon^{(3)})$; ainsi la notion de quasi-bigébroïde généralise la notion de bigébroïde.

4) Soit $\mathcal{L} = (L,\mu,\eta,\Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. Si M est un (B,B)-bimodule et $\varphi\in C^n(L,M)$, notons φ^o l'élément de $C^n(L^o,M^o)$ défini par $\varphi^o(x_1,\ldots,x_n) = \varphi(x_n,\ldots,x_1)$. Alors $\mathcal{L}^o = (L^o,\mu^o,\eta^o,\Phi^o)$ est un quasi-bigébroïde de base $B^o = B$.

5) Soient $\mathcal{L} = (L,\mu,\eta,\Phi)$ et $\mathcal{L}' = (L',\mu',\eta',\Phi')$ deux quasi-bigébroïdes, de bases respectives B et B'. Alors $L\otimes L'$ est naturellement muni d'une structure de quasi-bigébroïde de base $B\otimes B'$, qu'on note $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}'$. Plus précisément, si M est un (B,B)-bimodule, M' un (B',B')-bimodule, $\varphi\in C^n(L,M)$ et $\varphi'\in C^n(L',M')$, notons $\varphi\otimes_c\varphi'$ l'élément de $C^n(L\otimes L',M\otimes M')$ défini par $(\varphi\otimes_c\varphi')(x_1\otimes y_1,\ldots,x_n\otimes y_n) = \varphi(x_1,\ldots,x_n)\otimes\varphi'(y_1,\ldots,y_n)$. Alors $\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}' = (L\otimes L',\mu\otimes_c\mu',\eta\otimes_c\eta',\Phi\otimes_c\Phi')$.

6) De même, si $\mathcal{L}$ est un quasi-bigébroïde de base B, de cogébroïde sous-jacent L, et si $f : B\longrightarrow C$ est un morphisme d'algèbres commutatives, f_*L est naturellement muni d'une structure de quasi-bigébroïde de base C, qu'on note $f_*\mathcal{L}$.

7) Drinfeld a introduit dans [Dr] la notion de quasi-bigèbre. Dans ce travail, nous appellerons *quasi-bigèbre* la notion, duale à celle de Drinfeld, introduite par Majid [M] et Yetter [Y] (de sorte que le dual restreint d'une quasi-bigèbre au sens de Drinfeld sera pour nous une quasi-bigèbre). Avec cette terminologie, une quasi-bigèbre n'est autre qu'un quasi-bigébroïde de base $B = k$.

4.2. Quasi-bigébroïdes et foncteurs quasi-monoïdaux

4.2.1. Théorème. *Soit B une algèbre commutative.*

1) *Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. Alors il existe sur la catégorie $\mathsf{Comod}\, L$ une structure monoïdale naturelle; on note $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L}$ la catégorie monoïdale ainsi définie. En outre, le foncteur oubli $\mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Mod}\, B$ est un foncteur quasi-monoïdal strict de $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L}$ vers $\mathsf{Mod}\, B$, qu'on notera $U_{\mathcal{L}}$.*
   Si $\mathcal{L}$ est un bigébroïde, $U_{\mathcal{L}}$ est monoïdal strict.
2) *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale essentiellement petite, et F un foncteur quasi-monoïdal de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{proj}\, B$. Alors $L(F)$ est muni d'une structure naturelle de quasi-bigébroïde de base B, qu'on note $\mathcal{L}(F)$. En outre, le foncteur $\widetilde{F} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Comod}\, L(F)$ admet une structure naturelle de foncteur monoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L}(F)$, et le diagramme :*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Rep}\, \mathcal{L}(F) \arrow[d, "U_{\mathcal{L}(F)}"] \\ \mathcal{C} \arrow[ur, "\widetilde{F}"] \arrow[r, "F"'] & \mathsf{Mod}\, B \end{tikzcd}$$

   est un diagramme commutatif de foncteurs quasi-monoïdaux.
   Si F est monoïdal, et seulement dans ce cas, $\mathcal{L}(F)$ est un bigébroïde.

Si $\mathcal{L}$ est un quasi-bigébroïde, on appellera *catégorie des représentations de $\mathcal{L}$* la catégorie monoïdale $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L}$; une représentation de $\mathcal{L}$ sera dite *de type fini* si son B-module sous-jacent est de type fini, et on notera $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$ la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L}$ ayant pour objets les représentations de type fini.

Démonstration. (Voir aussi [Dr] et [Y] pour le cas $B = k$).

L'assertion 1) est démontrée dans [Bru-Mal]. Rappelons la construction de la structure monoïdale sur $\mathsf{Comod}\, L$.

On définit un produit tensoriel $\otimes_{\mathcal{L}} : \mathsf{Comod}\, L \times \mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Comod}\, L$ comme suit. Si $X_1 = (V_1, \delta_1)$ et $X_2 = (V_2, \delta_2)$ sont des L-comodules à droite, on définit un L-comodule à droite $X_1 \otimes_{\mathcal{L}} X_2 = (V_1 \otimes_B V_2, \delta)$, où $\delta = \mu_{X_1, X_2} : V_1 \otimes_B V_2 \longrightarrow V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B L$ (cf. **2.2.2**). Que δ soit une coaction à droite résulte par un simple calcul de la condition (QB1). Cette construction est clairement fonctorielle.

L'application η est un morphisme de cogébroïdes de B^e dans L par (QB2), donc définit une coaction à droite s de L sur B par $s(x) = \eta(1 \otimes x)$. On pose $I_{\mathcal{L}} = (B, s)$. La condition (QB3) signifie que $I_{\mathcal{L}}$ est neutre à droite et à gauche pour le produit tensoriel. Pour X objet de $\mathsf{Comod}\, L$, posons $r_X = l_X = 1_X$.

Soient trois L-comodules à droite $X_i = (V_i, \delta_i)$, pour $i = 1, 2, 3$. Posons $a_{X_1, X_2, X_3} = \Phi_{X_1, X_2, X_3} : V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B V_3 \longrightarrow V_1 \otimes_B V_2 \otimes_B V_3$. Il résulte de (QB4) que a_{X_1, X_2, X_3} est un morphisme de comodules de $(X_1 \otimes_{\mathcal{L}} X_2) \otimes_{\mathcal{L}} X_3$ vers $X_1 \otimes_{\mathcal{L}} (X_2 \otimes_{\mathcal{L}} X_3)$. De plus, a est clairement fonctoriel. Des axiomes (QB5) et (QB6) résultent respectivement le pentagone de MacLane et la condition de compatibilité entre a, l et r. Enfin, (QB7) exprime que a est un isomorphisme.

Ainsi, $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L} = (\mathsf{Comod}\, L, \otimes_{\mathcal{L}}, I_{\mathcal{L}}, a, l, r)$ est une catégorie monoïdale. En outre, le foncteur oubli $U = U_L : \mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Mod}\, B$ vérifie $U(X_1) \otimes_B U(X_2) = V_1 \otimes_B V_2 =$

$U(X_1 \otimes_{\mathcal{L}} X_2)$, et $U(I_{\mathcal{L}}) = B$, donc c'est un foncteur quasi-monoïdal strict de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ vers $\mathsf{Mod}\,B$. Si $\Phi = \varepsilon^{(3)}$, a est l'identité, donc U est monoïdal.

Démontrons l'assertion 2), et supposons $\mathcal{C}$ stricte pour simplifier. Notons $\otimes^3$ le foncteur $\mathcal{C}^3 \longrightarrow \mathcal{C}$, $(X, Y, Z) \mapsto X \otimes Y \otimes Z$. Soit (F, Φ_2, Φ_0) un foncteur quasi-monoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}\,B$. Posons $L = L(F)$. Par définition, Φ_2 est un isomorphisme de $F \otimes_B F$ vers $F\otimes$; autrement dit, $M = [\otimes, \Phi_2]$ est un morphisme de $F \otimes_B F$ vers F dans Cat_B (cf. **3.2.2**). De même, Φ_0 est un isomorphisme de B vers $F(I)$, donc, avec nos notations (**3.2.4**), $E = [I_*, \Phi_0]$ est un morphisme de B_* vers F dans Cat_B. On peut donc poser

$$\mu = L(M) : L \otimes_{B^e} L \longrightarrow L \quad \text{et} \quad \eta = L(E) : B^e \longrightarrow L\,.$$

Notons que si (F, Φ_2, Φ_0) est monoïdal, (F, M, E) est une algèbre de Cat_B; et comme L est un foncteur monoïdal de Cat_B vers Cog_B, $(L(F), \mu, \eta)$ est une algèbre de Cog_B, c'est-à-dire un bigébroïde de base B.

Revenons au cas général. Soient ${\Phi_3}^1{}_{X,Y,Z}$ et ${\Phi_3}^2{}_{X,Y,Z}$ les deux isomorphismes fonctoriels de $F(X) \otimes_B F(Y) \otimes_B F(Z)$ vers $F(X \otimes Y \otimes Z)$ définis par :

$${\Phi_3}^1{}_{X,Y,Z} = \Phi_{2\,X\otimes Y,Z}(\Phi_{2\,X,Y} \otimes_B 1_{F(Z)}) \quad \text{et} \quad {\Phi_3}^2{}_{X,Y,Z} = \Phi_{2\,X,Y\otimes Z}(1_{F(X)} \otimes_B \Phi_{2\,Y,Z})\,.$$

Posons $\Phi = ({\Phi_3}^2)^{-1}{\Phi_3}^1$; c'est un automorphisme de $F \otimes_B F \otimes_B F$; on peut donc le considérer comme un élément de $C^3(L, B)$. On a

$$\Phi = \varepsilon^{(3)} \quad \text{dans} \quad C^3(L, B) \Longleftrightarrow {\Phi_3}^1 = {\Phi_3}^2 \Longleftrightarrow F \quad \text{est monoïdal}\,.$$

Vérifions maintenant les axiomes (QB1)—(QB7).

Par définition, μ et η sont des morphismes de cogébroïdes; d'autre part, les identités

$$\Phi_{2\,I,X}(\Phi_0 \otimes_B 1_{F(X)}) = 1_{F(X)} = \Phi_{2\,X,I}(1_{F(X)} \otimes_B \Phi_0)$$

se traduisent par $M(E \otimes_B 1_F) = 1_F = M(1_F \otimes_B E)$ dans Cat_B, d'où

$$\mu \circ (\eta \otimes_{B^e} 1_L) = 1_L = \mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \eta)\,;$$

ainsi, les axiomes (QB1), (QB2) et (QB3) sont satisfaits.

L'élément Φ de $C^3(L, B)$ est inversible, car il correspond à un automorphisme fonctoriel, d'où l'axiome (QB7).

D'autre part, on a dans Cat_B les relations $M(M \otimes_B 1_F) = [\otimes^3, {\Phi_3}^1]$ et $M(1_F \otimes_B M) = [\otimes^3, {\Phi_3}^2]$, donc $M(M \otimes_B 1_F) = M(1_F \otimes_B M) \circ [1_{\mathcal{C}^3}, \Phi]$; appliquant à cette identité le foncteur L, et utilisant **3.2.3,** on obtient $\mu(\mu \otimes_{B^e} 1_L) = \Phi^{-1} * \mu(1_L \otimes_{B^e} \mu) * \Phi$, d'où (QB4).

Considérons les cinq isomorphismes fonctoriels de $F(X)\otimes_B F(Y)\otimes_B F(Z)\otimes_B F(T)$ vers $F(X\otimes Y\otimes Z\otimes T)$ définis par :

$$\begin{aligned}
{\Phi_4}^1{}_{X,Y,Z,T} &= \Phi_{2\,X\otimes Y\otimes Z,T}({\Phi_3}^1{}_{X,Y,Z}\otimes_B 1_{F(T)})\\
&= {\Phi_3}^1{}_{X\otimes Y,Z,T}(\Phi_{2\,X,Y}\otimes_B 1_{F(Z)}\otimes_B 1_{F(T)}),\\
{\Phi_4}^2{}_{X,Y,Z,T} &= \Phi_{2\,X\otimes Y\otimes Z,T}({\Phi_3}^2{}_{X,Y,Z}\otimes_B 1_{F(T)})\\
&= {\Phi_3}^1{}_{X,Y\otimes Z,T}(1_{F(X)}\otimes_B\Phi_{2\,Y,Z}\otimes_B 1_{F(T)}),\\
{\Phi_4}^3{}_{X,Y,Z,T} &= \Phi_{2\,X,Y\otimes Z\otimes T}(1_{F(X)}\otimes_B{\Phi_3}^1{}_{Y,Z,T})\\
&= {\Phi_3}^2{}_{X,Y\otimes Z,T}(1_{F(X)}\otimes_B\Phi_{2\,Y,Z}\otimes_B 1_{F(T)}),\\
{\Phi_4}^4{}_{X,Y,Z,T} &= \Phi_{2\,X,Y\otimes Z\otimes T}(1_{F(X)}\otimes_B{\Phi_3}^2{}_{Y,Z,T})\\
&= {\Phi_3}^2{}_{X,Y,Z\otimes T}(1_{F(X)}\otimes_B 1_{F(Y)}\otimes_B\Phi_{2\,Z,T}),\\
{\Phi_4}^5{}_{X,Y,Z,T} &= {\Phi_3}^1{}_{X,Y,Z\otimes T}(1_{F(X)}\otimes_B 1_{F(Y)}\otimes_B\Phi_{2\,Z,T})\\
&= {\Phi_3}^2{}_{X\otimes Y,Z,T}(\Phi_{2\,X,Y}\otimes_B 1_{F(Z)}\otimes_B 1_{F(T)}).
\end{aligned}$$

On a $({\Phi_4}^2)^{-1}{\Phi_4}^1 = \Phi\otimes_B 1_F$, autrement dit, on a dans $C^4(L,B)$: $({\Phi_4}^2)^{-1}{\Phi_4}^1 = \Phi_{123}$, et de même : $({\Phi_4}^4)^{-1}{\Phi_4}^3 = \Phi_{234}$.

D'autre part, calculons $({\Phi_4}^5)^{-1}{\Phi_4}^1$. On a :

$$(({\Phi_4}^5)^{-1}{\Phi_4}^1)_{X,Y,Z,T} = (\Phi_{2\,X,Y}\otimes_B 1_{F(Z)}\otimes_B 1_{F(T)})^{-1}\Phi_{X\otimes Y,Z,T}(\Phi_{2\,X,Y}\otimes_B 1_{F(Z)}\otimes_B 1_{F(T)});$$

d'où $({\Phi_4}^5)^{-1}{\Phi_4}^1 = \Phi\circ L(M\otimes_B 1_F\otimes_B 1_F) = \Phi\circ(\mu\otimes_{B^e}1_L\otimes_{B^e}1_L)$ par **3.2.3.**

Par un calcul semblable, il vient : $({\Phi_4}^4)^{-1}{\Phi_4}^5 = \Phi\circ(1_L\otimes_{B^e}1_L\otimes_{B^e}\mu)$, et $({\Phi_4}^3)^{-1}{\Phi_4}^2 = \Phi\circ(1_L\otimes_{B^e}\mu\otimes_{B^e}1_L)$.

Dans $C^4(L,B)$, $({\Phi_4}^4)^{-1}*{\Phi_4}^1$ est égal d'une part à :

$$({\Phi_4}^4)^{-1}*{\Phi_4}^3*({\Phi_4}^3)^{-1}*{\Phi_4}^2*({\Phi_4}^2)^{-1}*{\Phi_4}^1 = \Phi_{234}*(\Phi\circ(1_L\otimes_{B^e}\mu\otimes_{B^e}1_L))*\Phi_{123},$$

et d'autre part, à :

$$({\Phi_4}^4)^{-1}*{\Phi_4}^5*({\Phi_4}^5)^{-1}*{\Phi_4}^1 = (\Phi\circ(1_L\otimes_{B^e}1_L\otimes_{B^e}\mu))*(\Phi\circ(\mu\otimes_{B^e}1_L\otimes_{B^e}1_L)),$$

d'où l'axiome (QB5).

Enfin, on a pour X et Y objets de $\mathcal{C}$, $\Phi_{X,I,Y} = 1_{F(X)}\otimes_B 1_{F(Y)}$. Il en résulte dans $C^2(L,B)$ la relation : $\Phi(1_L\otimes_{B^e}\eta\otimes_{B^e}1_L) = \varepsilon^{(2)}$, c'est-à-dire (QB6).

Ainsi, $\mathcal{L} = (L,\mu,\eta,\Phi)$ est un quasi-bigébroïde de base B.

On a vu en 1) comment munir la catégorie $\mathsf{Comod}\,L$ d'une structure monoïdale, notée $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$, faisant du foncteur oubli un foncteur quasi-monoïdal strict $U_{\mathcal{L}}$. Reste à munir le foncteur $\widetilde{F}:\mathcal{C}\longrightarrow\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ d'une structure monoïdale, de sorte que F soit, en tant que foncteur quasi-monoïdal, le composé de $U_{\mathcal{L}}$ et de $\widetilde{F}$. Cette dernière condition ne nous laisse pas le choix : $\widetilde{F}$ doit être muni des mêmes isomorphismes Φ_2 et Φ_0 que F. Il se trouve que, pour X, $Y\in\mathsf{Ob}\,\mathcal{C}$, $\Phi_{2\,X,Y}:F(X)\otimes_B F(Y)\longrightarrow F(X\otimes Y)$ est un morphisme de comodules de $\widetilde{F}(X)\otimes_{\mathcal{L}}\widetilde{F}(Y)$ vers $\widetilde{F}(X\otimes Y)$ par définition de μ, et que $\Phi_0:B\longrightarrow F(I)$ est un morphisme de comodules de (B,s) vers $\widetilde{F}(I)$ par définition de η. La condition (CU) est automatique; quant à la condition (CA), elle est vraie par définition de Φ. $\square$

4.2.2. Remarque. Soient $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de base B, et $I_{\mathcal{L}} = (B, s)$ la représentation unité de $\mathcal{L}$. Alors $\mathsf{End}_{\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}}(I_{\mathcal{L}}) = \{x \in B \mid s(x) = b(x)\}$, où s (resp. b) dénote le morphisme source (resp. but) de $\mathcal{L}$.

4.3. Morphismes de quasi-bigébroïdes et "twists de Drinfeld"

4.3.1. Définition. Soient $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ et $\mathcal{L}' = (L', \mu', \eta', \Phi')$ deux quasi-bigébroïdes de base B. Un *morphisme de quasi-bigébroïdes de* $\mathcal{L}$ *vers* $\mathcal{L}'$ est un morphisme de cogébroïdes $f : L \longrightarrow L'$ vérifiant $f \circ \mu = \mu' \circ (f \otimes_{B^e} f)$, $f \circ \eta = \eta'$, et $\Phi = \Phi' \circ (f \otimes_{B^e} f \otimes_{B^e} f)$.

On note QBig'_B la catégorie ayant pour objets les quasi-bigébroïdes de base B, et pour flèches les morphismes de quasi-bigébroïdes.

La proposition suivante résulte directement des constructions données dans la démonstration du théorème **4.2.1.**

4.3.2. Proposition.

1) Soient $\mathcal{L}$ *et* $\mathcal{L}'$ *deux quasi-bigébroïdes de base* B*, et* f *un morphisme de quasi-bigébroïdes de* $\mathcal{L}$ *vers* $\mathcal{L}'$.

Alors le foncteur $f_* : \mathsf{Comod}\,L \longrightarrow \mathsf{Comod}\,L'$ *est un foncteur monoïdal strict de* $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ *vers* $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}'$ *rendant commutatif le diagramme de foncteurs quasi-monoïdaux :*

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Rep}\,\mathcal{L}' \arrow[d, "U_{\mathcal{L}'}"] \\ \mathsf{Rep}\,\mathcal{L} \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "U_{\mathcal{L}}"'] & \mathsf{Mod}\,B \end{tikzcd}$$

2) Soient $\mathcal{C}$ *et* $\mathcal{C}'$ *deux catégories monoïdales,* $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ *un foncteur quasi-monoïdal, et* H *un foncteur monoïdal* $\mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$*. Alors* $L(H)$ *est un morphisme de quasi-bigébroïdes de* $\mathcal{L}(FH)$ *vers* $\mathcal{L}(F)$.

3) Soient $\mathcal{L}$ *un quasi-bigébroïde de base* B*, et* $\mathcal{V}$ *la sous-catégorie monoïdale pleine de* $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ *dont les objets sont les représentations de* $\mathcal{L}$ *dont le* B*-module sous-jacent est projectif de type fini. Soit* $u_{\mathcal{L}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ *le foncteur oubli. Le morphisme de cogébroïdes défini par la coaction à droite de* $\mathcal{L}$ *sur* $u_{\mathcal{L}}$ *est un morphisme de quasi-bigébroïdes* $\mathcal{L}(u_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathcal{L}$. $\square$

4.3.3. Définition. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. Notons $\mathsf{Tw}(\mathcal{L})$ l'ensemble des $t \in C^2(L, B)$ inversibles vérifiant la condition

$$(\mathsf{Tw}) \qquad t \circ (\eta \otimes_{B^e} 1_L) = \varepsilon = t \circ (1_L \otimes_{B^e} \eta).$$

Pour tout $t \in \mathsf{Tw}(\mathcal{L})$, posons

$$\mu^t = t^{-1} * \mu * t, \quad \Phi^t = (\varepsilon \otimes_{B^e} t^{-1}) * (t^{-1} \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu)) * \Phi * (t \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L)) * (t \otimes_{B^e} \varepsilon).$$

Alors (L, μ^t, η, Φ^t) est un quasi-bigébroïde de base B, qu'on appelle *twist de Drinfeld de* $\mathcal{L}$ *par* t, et qu'on note $\mathcal{L}^t$.

4.3.4. Proposition.

1) Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de base B, de cogébroïde sous-jacent L, et soit $t \in$ $\mathsf{Tw}(\mathcal{L})$*. Alors l'identité de* $\mathsf{Comod}\, L$*, munie de $\Phi_{2X,Y} = t_{X,Y}$ et de $\Phi_0 = 1_B$, est une équivalence de catégories monoïdales de* $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ *vers* $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}^t$*.*

2) Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, et F, G deux foncteurs quasi-monoïdaux de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}\, B$*. Alors tout isomorphisme fonctoriel quasi-monoïdal $\gamma : F \longrightarrow G$ définit un élément $t_\gamma \in$* $\mathsf{Tw}(\mathcal{L}(F))$ *tel que* $\mathsf{ad}(\gamma)$ *soit un isomorphisme de quasi-bigébroïdes de $\mathcal{L}(F)^{t_\gamma}$ sur $\mathcal{L}(G)$.*

Démonstration.

1) Soient X, Y deux L-comodules à droite, et V, W les B-modules sous-jacents. Par définition de μ^t, $t_{X,Y} : V \otimes_B W \longrightarrow V \otimes_B W$ est un isomorphisme de comodules de $X \otimes_{\mathcal{L}^t} Y$ vers $X \otimes_{\mathcal{L}} Y$. Ainsi $(1_{\mathsf{Comod}\, L}, \Phi_2, \Phi_0)$ est un foncteur prémonoïdal de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ vers $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}^t$. Les conditions (CA) et (CU) résultent respectivement de la définition de Φ^t et du fait que t vérifie (Tw).

2) Les foncteurs quasi-monoïdaux F et G sont en réalité des données (F, Φ_2, Φ_0) et (G, Ψ_2, Ψ_0). Soit t l'automorphisme de $F \otimes_B F$ défini par

$$t_{X,Y} = {\Phi_2}^{-1}_{X,Y} \gamma^{-1}_{X \otimes Y} \Psi_{2X,Y} (\gamma_X \otimes_B \gamma_Y).$$

On a $\gamma_I \Phi_0 = \Psi_0$, donc $t_{X,I} = {\Phi_2}^{-1}_{X,I} \gamma^{-1}_X \Psi_{2X,I} (\gamma_X \otimes_B \Psi_0 \Phi_0^{-1}) = {\Phi_2}^{-1}_{X,I} (1_{F(X)} \otimes_B \Phi_0^{-1}) = 1_{F(X)} \otimes_B 1_{F(I)}$; et de même, $t_{I,X} = 1_{F(I)} \otimes_B 1_{F(X)}$. Ainsi t s'identifie à un élément inversible de $C^2(L(F), B)$ vérifiant (Tw); c'est donc un élément de $\mathsf{Tw}(\mathcal{L}(F))$.

Montrons à présent que le morphisme de cogébroïdes $\mathsf{ad}(\gamma) : L(F) \longrightarrow L(G)$ est un morphisme de bigébroïdes de $\mathcal{L}(F)^t$ vers $\mathcal{L}(G)$. Soit (F, Φ'_2, Φ_0) l'unique structure quasi-monoïdale sur F telle que γ soit monoïdal de (F, Φ'_2, Φ_0) vers (G, Ψ_2, Ψ_0). Alors $\mathsf{ad}(\gamma)$ est un isomorphisme de quasi-bigébroïdes de $\mathcal{L}(F, \Phi'_2, \Phi_0)$ sur $\mathcal{L}(G)$. Or on a $t = {\Phi_2}^{-1} \Phi'_2$, et par construction $\mathcal{L}(F, \Phi'_2, \Phi_0) = \mathcal{L}(F, \Phi_2, \Phi_0)^t$. Ainsi $t_\gamma = t$ convient. $\square$

Les considérations précédentes amènent à considérer un nouveau type de morphismes entre quasi-bigébroïdes.

4.3.5. Définition. Soient $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ deux quasi-bigébroïdes de base B. Un *quasi-morphisme de quasi-bigébroïdes de source $\mathcal{L}$ et de but $\mathcal{L}'$* est un couple (f, t), où $t \in \mathsf{Tw}(\mathcal{L})$ et f est un morphisme de quasi-bigébroïdes de $\mathcal{L}^t$ vers $\mathcal{L}'$.

On note QBig_B la catégorie ayant pour objets les quasi-bigébroïdes de base B et pour flèches les quasi-morphismes. (Si $(f, t) : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ et $(f', t') : \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}''$ sont deux flèches de QBig_B, leur composée est $(f'f, t * (f^* t'))$, où $f^* t' = t' \circ (f \otimes_{B^e} f)$; l' identité de $\mathcal{L}$ est $(1_{\mathcal{L}}, \varepsilon^{(2)})$.)

La catégorie QBig'_B apparaît comme une sous-catégorie de QBig_B lorsqu'on identifie tout morphisme de quasi-bigébroïdes $f : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ au quasi-morphisme $(f, \varepsilon^{(2)})$.

Soit $\phi = (f, t) : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}'$ un quasi-morphisme de quasi-bigébroïdes de base B. Alors t définit une équivalence de catégories monoïdales $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L} \longrightarrow \mathsf{Rep}\,\mathcal{L}^t$ (**4.3.4**), et f définit un foncteur monoïdal $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}^t \longrightarrow \mathsf{Rep}\,\mathcal{L}'$ (**4.3.2**); donc, par composition, ϕ définit un foncteur monoïdal $\phi_* : \mathsf{Rep}\,\mathcal{L} \longrightarrow \mathsf{Rep}\,\mathcal{L}'$.

Le diagramme de foncteurs quasi-monoïdaux

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{Rep}\,\mathcal{L}' \arrow[d, "U_{\mathcal{L}'}"] \\ \mathsf{Rep}\,\mathcal{L} \arrow[ur, "\phi_*"] \arrow[r, "U_{\mathcal{L}}"'] & \mathsf{Mod}\,B \end{tikzcd}$$

est commutatif lorsque ϕ est un morphisme de quasi-bigébroïdes. En général, les foncteurs sous-jacents à $U_{\mathcal{L}}$ et à $U_{\mathcal{L}'}\phi_*$ sont égaux, et l'identité est un isomorphisme fonctoriel quasi-monoïdal (mais non nécéssairement monoïdal) de $U_{\mathcal{L}}$ vers $U_{\mathcal{L}'}\phi_*$.

4.3.6. On se propose maintenant de construire une catégorie QMon_B, dont les objets seront les foncteurs quasi-monoïdaux $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$, $\mathcal{C}$ étant une catégorie monoïdale, de sorte que les propriétés de fonctorialité de $\mathcal{L}$ s'expriment par l'existence d'un foncteur $\mathcal{L} : \mathsf{QMon}_B \longrightarrow \mathsf{QBig}_B$. On s'inspire pour cela du travail fait en (**3.2.2**).

Soit QMon_B^0 la catégorie suivante. Les objets de QMon_B^0 sont les foncteurs quasi-monoïdaux $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale essentiellement petite. Si $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ et $F' : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ sont deux objets de QMon_B^0, les morphismes de F vers F' dans QMon_B^0 sont les couples (H, γ), où H est un foncteur monoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$, et γ un isomorphisme fonctoriel quasi-monoïdal $F \stackrel{\sim}{\to} F'H$.

Si (H, γ) est une telle flèche, H définit un morphisme de quasi-bigébroïdes $L(H) : \mathcal{L}(F'H) \longrightarrow \mathcal{L}(F')$ (**4.3.2**), et γ définit un quasi-isomorphisme de quasi-bigébroïdes $(\mathsf{ad}(\gamma), t_\gamma) : \mathcal{L}(F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'H)$ (**4.3.4**) qu'on note $\mathsf{Ad}(\gamma)$. On définit un foncteur $\mathcal{L}^0 : \mathsf{QMon}_B^0 \longrightarrow \mathsf{QBig}_B$, sur les objets, par $F \mapsto \mathcal{L}(F)$, et sur les flèches, par $(H, \gamma) \mapsto L(H) \circ \mathsf{Ad}(\gamma)$.

On considère sur QMon_B^0 la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie comme suit. Si (H, γ) et (H', γ') sont deux flèches de QMon_B^0, de source F et de but F', alors $(H, \gamma)\ \mathcal{R}\ (H', \gamma')$ si et seulement s'il existe un isomorphisme fonctoriel monoïdal $g : H \stackrel{\sim}{\to} H'$ tel que $\gamma' = F'(g)\gamma$. On observe que deux flèches équivalentes ont même image par $\mathcal{L}^0$.

On note QMon_B la catégorie quotient de QMon_B^0 par $\mathcal{R}$, et $\mathcal{L}$ le foncteur de QMon_B vers QBig_B obtenu par passage au quotient de $\mathcal{L}^0$. On note $[H, \gamma]$ l'image dans QMon_B d'une flèche (H, γ) de QMon_B^0. C'est un isomorphisme de QMon_B si et seulement si H est une équivalence de catégories monoïdales.

On notera QMon'_B la sous-catégorie de QMon_B ayant mêmes objets, et dont les flèches sont les $[H, \gamma]$ avec γ monoïdal. L'image de QMon'_B par $\mathcal{L}$ est contenue dans QBig'_B (**4.3.2**).

4.4. Antipode

4.4.1. Conventions. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. On note s le morphisme source, et b le morphisme but (cf. **4.1.3,** 2)).

On note ${}_sL_s$ (resp. ${}_bL_s$, resp. ${}_sL_b$, resp. ${}_bL_b$) la structure de (B, B)-bimodule sur L définie en posant, pour x, $y \in B$ et $m \in L$, $x \cdot m \cdot y = mxy$ (resp. xmy, resp. ymx, resp. xym). On a donc ${}_bL_s = L$ et ${}_sL_b = L^o$.

D'autre part, on fera l'abus consistant à noter encore μ les composées de μ avec les surjections canoniques $L \otimes_B L^o \longrightarrow L^{(2)}$ et $L^o \otimes_B L \longrightarrow L^{(2)}$; de même on notera Φ

(resp. Φ^{-1}) la composée de Φ (resp. Φ^{-1}) avec la surjection canonique de $L \otimes_B L^o \otimes_B L$ (resp. $L^o \otimes_B L \otimes_B L^o$) sur $L^{(3)}$.

4.4.2. Définition. Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B. On appelle *antipode de* $\mathcal{L}$ la donnée d'un élément S de $C^1(L, L^o)$ et de deux éléments α, β de $C^1(L, B)$ vérifiant :

(A1) $S : L \longrightarrow L^o$ est un morphisme de cogébroïdes;
(A2) $s \circ \alpha = \mu \circ (S * \alpha * 1_L)$ dans $C^1(L, {}_sL_s)$;
(A3) $b \circ \beta = \mu \circ (1_L * \beta * S)$ dans $C^1(L, {}_bL_b)$;
(A4) $\Phi \circ (1_L * \beta * S * \alpha * 1_L) = \varepsilon = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S)$ dans $C^1(L, B)$.

On dit que $\mathcal{L}$ est un *quasi-bigébroïde de Hopf* s'il possède un antipode (S, α, β) avec S bijectif.

4.4.3. Remarque. Si $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}'$) est un quasi-bigébroïde de base B (resp. B'), et si (S, α, β) (resp. (S', α', β')) est un antipode de $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}'$), alors $(S \otimes_c S', \alpha \otimes_c \alpha', \beta \otimes_c \beta')$ est un antipode de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$. En particulier, si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont des quasi-bigébroïdes de Hopf, il en va de même de $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$.

De même, si $\mathcal{L}$ est un quasi-bigébroïde de Hopf, et (S, α, β) un antipode de $\mathcal{L}$, alors (S^o, β^o, α^o) est un antipode de $\mathcal{L}^o$. En particulier, si $\mathcal{L}$ est un quasi-bigébroïde de Hopf, il en va de même de $\mathcal{L}^o$.

4.4.4. Proposition. *Soit $\mathcal{L} = (L, \mu, \eta, \Phi)$ un quasi-bigébroïde de base B.*

1) *Soit u un élément inversible de $C^1(L, B)$; si (S, α, β) est un antipode de $\mathcal{L}$, il en va de même de $(u^{-1} * S * u, u^{-1} * \alpha, \beta * u)$.*
2) *Soient (S, α, β) et (S', α', β') deux antipodes de $\mathcal{L}$. Alors il existe un unique élément inversible u de $C^1(L, B)$ vérifiant $S' = u^{-1} * S * u$, $\alpha' = u^{-1} * \alpha$, $\beta' = \beta * u$.*

Démonstration.

L'assertion 1) résulte d'un simple calcul. Vérifions l'assertion 2). La démonstration est essentiellement la même que celle du résultat analogue pour les quasi-bigèbres ([Dr], proposition **1.1**). Si u vérifie les conditions indiquées, on a $u = \varepsilon * u = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S) * u = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S * u) = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta' * S')$, d'où l'unicité.

Soit $u = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta' * S')$. Dans $C^3(L, L)$, l'identité (QB4) peut s'écrire

$$(\mu \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L)) * \Phi^{-1} = \Phi^{-1} * (\mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu)).$$

Or un calcul fastidieux à écrire, mais sans réelle difficulté, utilisant le fait que S et S' sont des morphismes de cogébroïdes de L vers L^o, ainsi que l'égalité $\mu(S * \alpha * 1_L) = s\alpha$, montre que $\{(\mu \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L)) * \Phi^{-1}\} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta' * S')$ est égal à $u * S'$; et de même, utilisant cette fois l'égalité $\mu(1_L * \beta' * S') = b\beta'$, on montre que $\{\Phi^{-1} * (\mu \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu))\} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta' * S')$ est égal à $S * u$, d'où $u * S' = S * u$.

Considérons maintenant dans $C^4(L, B)$ l'identité (QB5), qu'on écrit sous la forme

$$\Phi_{234} * (\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} \mu \otimes_{B^e} 1_L)) = (\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} \mu)) * (\Phi \circ (\mu \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} 1_L)) * \Phi_{123}^{-1}.$$

Lorsqu'on compose le premier membre de cette identité avec l'élément $U = S * \alpha * 1_L * \beta' * S' * \alpha' * 1_L$ de $C(L, L^o \otimes_B L \otimes_B L^o \otimes_B L)$, on obtient un élément de $C(L, B)$ qui, par un calcul du même type que le précédent, est égal à α. D'autre part, lorsqu'on compose le second membre de l'identité avec le même élément U, on obtient $u * \alpha'$ (par un calcul utilisant entre autres l'identité $\Phi \circ (1_L \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} \eta) = \varepsilon^{(2)}$, qui résulte de (QB1)—(QB7)). On a donc $\alpha = u * \alpha'$, et, par raison de symétrie, $\beta * u = \beta'$. En particulier, $u * S' * \alpha' = S * \alpha$, et $S * \beta * u = S' * \beta'$.

Pour conclure, montrons que u est inversible. Soit $v = \Phi^{-1} \circ (S' * \alpha' * 1_L * \beta * S)$; alors $u * v = \Phi^{-1} \circ (u * S' * \alpha' * 1_L * \beta * S) = \Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S) = \varepsilon$, et, de même, $v * u = \varepsilon$. □

4.4.5. Théorème. *Soit B une algèbre commutative.*

1) *Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de base B, et soit $\mathcal{V}$ la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$ ayant pour objets les représentations de $\mathcal{L}$ dont le B-module sous-jacent est projectif de type fini. La donnée d'un antipode (S, α, β) de $\mathcal{L}$ définit sur la catégorie $\mathcal{V}$ une structure autonome à gauche, pour laquelle le foncteur oubli $u_{\mathcal{L}} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ est autonome à gauche.*

   Si on suppose de plus S bijectif, $\mathcal{V}$ est autonome.
2) *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale munie d'une structure autonome à gauche ${}^{\vee}?$ et soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ un foncteur quasi-monoïdal. Alors la donnée d'une structure autonome à gauche Φ_1 sur F définit un antipode (S, α, β) de $\mathcal{L}(F)$.*

   Si de plus $\mathcal{C}$ est autonome, S est bijectif.

DÉMONSTRATION.

L'assertion 1) est démontrée dans [Bru-Mal]. Rappelons la construction de la structure autonome à gauche sur $\mathcal{V}$ associée à un antipode (S, α, β).

On peut voir S comme un morphisme de cogébroïdes de L^o vers L, qu'on note S^o. Soit $X = (V, \delta)$ un L-comodule à droite tel que V soit un B-module projectif de type fini; soit $({}^*V, V, \mathsf{ev}_V, \mathsf{coev}_V)$ la dualité canonique (voir **1.1.3,** exemple 2)). Alors ${}^*V$ est naturellement muni d'une structure de L^o-comodule à droite (cf. **2.1.3**). Soit ${}^{\vee}X$ le L-comodule à droite image directe de ${}^*V$ par S^o.

Posons $e_X = \mathsf{ev}_V \circ (1_{V^*} \otimes_B \alpha_X)$ et $h_X = (\beta_X \otimes_B 1_{V^*}) \circ \mathsf{coev}_V$. Il résulte de (A2) et (A3) respectivement que e_X est un morphisme de comodules de ${}^{\vee}X \otimes_{\mathcal{L}} X$ vers $I_{\mathcal{L}}$, et h, de $I_{\mathcal{L}}$ vers $X \otimes_{\mathcal{L}} {}^{\vee}X$. Il résulte de (A4) que $({}^{\vee}X, X, e_X, h_X)$ est une dualité de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$. On vérifie que ${}^*? \circ u_{\mathcal{L}} = u_{\mathcal{L}} \circ {}^{\vee}?$, donc l'identité est une structure autonome à gauche sur $u_{\mathcal{L}}$.

Démontrons l'assertion 2).

Posons $L = L(F)$. L'isomorphisme fonctoriel $\Phi_{1X} : {}^*F(X) \xrightarrow{\sim} F({}^{\vee}X)$ définit un morphisme $[{}^{\vee}?, \Phi_1]$ de $F^{\%}$ vers F dans Cat_B; alors $L({}^{\vee}?, \Phi_1)$ est un morphisme de cogébroïdes de $L(F^{\%})$, qui s'identifie à L^o par **3.1.4,** vers L; on peut aussi le voir comme un morphisme de cogébroïdes $S : L \longrightarrow L^o$. La catégorie $\mathcal{C}$ est autonome si et seulement si ${}^{\vee}?$ est une équivalence de catégories, ce qui implique la bijectivité de S.

Soit X un objet de $\mathcal{C}$. Puisque $F(X)$ est muni d'une coaction à droite de L, ${}^*F(X)$ est muni, par **2.1.3,** d'une coaction à droite de L^o. Ainsi, $F({}^{\vee}X)$ est muni d'une coaction à droite de L, et, par transport de structure via l'isomorphisme $\Phi_{1X} : {}^*F(X) \xrightarrow{\sim} F({}^{\vee}X)$, d'une coaction à droite de L^o. Par construction de S, la structure de L-comodule à droite de $F({}^{\vee}X)$ est l'image directe par $S^o : L^o \longrightarrow L$ de sa structure de L^o-comodule à droite. Soient $e'_X = \mathsf{ev}_{F(X)}(\Phi_{1X}^{-1} \otimes_B 1_{F(X)})$ et $h'_X = (1_{F(X)} \otimes_B \Phi_{1X})\,\mathsf{coev}_{F(X)}$. Alors

$(F(^\vee X), F(X), e'_X, h'_X)$ est une dualité de $\mathsf{proj}\, B$. Par définition de S, on a pour tout (B,B)-bimodule M et tout $\psi \in C^3(L, M)$ l'identité :

$$(*) \qquad \{\psi \circ (1_L * S * 1_L)\}_X = (1_{F(X)} \otimes_B e'_X \otimes_B 1_M) \circ \psi_{X, ^\vee X, X} \circ (h'_X \otimes_B 1_{F(X)}) .$$

Posons $E_X = {\Phi_0}^{-1} F(e_X) \Phi_{2\, ^\vee X, X}$ et $H_X = \Phi_2^{-1}{}_{X, ^\vee X} F(h_X) \Phi_0$, et soient α et β les deux endomorphismes fonctoriels de F construits en **1.3.2** et caractérisés par

$$E_X = e'_X (1_{F(^\vee X)} \otimes_B \alpha_X) \quad \text{et} \quad H_X = (\beta_X \otimes_B 1_{F(^\vee X)}) .$$

On observe que E_X est un morphisme de L-comodules de $F(^\vee X) \otimes_B F(X)$ vers (B, s); ceci se traduit par l'identité $s \circ E_X = (E_X \otimes_B 1_L) \mu_{^\vee X, X}$ dans $\mathsf{Hom}_B(F(^\vee X) \otimes_B F(X), L)$. Dans l'isomorphisme naturel $\mathsf{Hom}_B(F(^\vee X) \otimes_B F(X), L) \xrightarrow{\sim} \mathsf{Hom}_B(F(X), F(X) \otimes_B L)$, cette équation se lit

$$(s \circ \alpha)_X = (1_{F(X)} \otimes_B e'_X \otimes_B 1_M) \circ \psi_{X, ^\vee X, X} \circ (h'_X \otimes_B 1_{F(X)}) ,$$

où $\psi = \varepsilon \otimes_{B^e} \mu((1_L * \alpha) \otimes_{B^e} 1_L)$; donc par $(*)$, $(s \circ \alpha)_X = \{\mu \circ (S * \alpha * 1_L)\}_X$, d'où la relation (A2). De même, la relation (A3) traduit le fait que H_X est un morphisme de L-comodules de (B, s) vers $F(X) \otimes_B F(^\vee X)$.

Enfin, on a $1_X = (1_X \otimes e_X)(h_X \otimes 1_X)$, donc $1_{F(X)} = F((1_X \otimes e_X)(h_X \otimes 1_X))$. Or $F(h_X \otimes 1_X) = {\Phi_3}^1{}_{X, ^\vee X, X}(H_X \otimes_B 1_{F(X)})$ et $F(1_X \otimes e_X) = (1_{F(X)} \otimes_B E_X)(\Phi_3^2)^{-1}_{X, ^\vee X, X}$; donc $1_{F(X)} = (1_{F(X)} \otimes_B E_X) \Phi_{X, ^\vee X, X}(H_X \otimes_B 1_{F(X)}) = \{\Phi(1_L * \beta * S * \alpha * 1_L)\}_X$ par $(*)$ appliquée à $\psi = \Phi((1_L * \beta) \otimes_{B^e} 1_L \otimes_{B^e} (\alpha * 1_L))$; d'où la première identité de (A4). De même, $(e_X \otimes 1_{^\vee X})(1_{^\vee X} \otimes h_X) = 1_{^\vee X}$, donc $1_{F(^\vee X)} = F((e_X \otimes 1_{^\vee X})(1_{^\vee X} \otimes h_X))$; et on constate que, dans l'isomorphisme canonique $\mathsf{End}_B(F(^\vee X)) \simeq \mathsf{End}_B(F(X))$, cette relation se lit $1_{F(X)} = \{\Phi^{-1} \circ (S * \alpha * 1_L * \beta * S)\}_X$, d'où la seconde identité de (A4). $\square$

4.4.6. Remarque. En raison de la non-unicité de l'antipode, mise en évidence dans la proposition **4.4.4,** il peut se révéler utile de définir la notion de quasi-bigébroïde 'localement de Hopf', correspondant à la situation où l'antipode existe seulement localement par rapport à la base B. Conjointement, on peut définir la notion de foncteur 'localement autonome' (pour lequel Φ_1 existe seulement localement par rapport à la base). Le théorème **4.4.5** admet évidemment une version locale. Cependant, dans les situations qui nous intéresseront, on pourra se limiter au cas où la base est un corps, et dans ce cadre, les notions globales coïncident avec les notions locales.

5. Dualité tannakienne

Dans toute la section **5,** k désigne un corps commutatif.

5.1. Cogébroïdes semi-transitifs

Définition. Une catégorie k-linéaire $\mathcal{A}$ est dite *localement de type fini* si
1) pour tous objets X, Y de $\mathcal{A}$, $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ est de dimension finie sur k;
2) tout objet de $\mathcal{A}$ est de longeur finie.

5.1.1. Définition. Soit B une algèbre. Un k-cogébroïde L de base B est dit *semi-transitif* s'il vérifie les trois conditions suivantes :
ST1 tout objet de $\mathsf{comod}\, L$ est projectif en tant que B-module;
ST2 tout objet de $\mathsf{Comod}\, L$ est limite inductive filtrante d'objets de $\mathsf{comod}\, L$;
ST3 la catégorie k-linéaire $\mathsf{comod}\, L$ est localement de type fini.

5.1.2. Remarques.

1) Une cogèbre, vue comme cogébroïde de base $B = k$, est toujours semi-transitive.

2) Soit L un cogébroïde semi-transitif de base B. Alors (i) les catégories $\mathsf{comod}\, L$ et $\mathsf{Comod}\, L$ sont abéliennes, l'inclusion $\mathsf{comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Comod}\, L$ et le foncteur oubli U_L : $\mathsf{Comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Mod}\, B$ sont exacts; (ii) U_L est à valeurs dans $\mathsf{Proj}\, B$; (iii) $\mathsf{Comod}\, L$ est équivalente à la catégorie des Ind-objets de $\mathsf{comod}\, L$ ([Bru], **5.1**).

3) Si un cogébroïde L, de base B, est projectif en tant que B^e-module et vérifie ST3, il est semi-transitif. La réciproque est vraie lorsque k est parfait ([Bru], théorème **6.1**).

5.1.3. Notons Ab_B la sous-catégorie pleine de Cat_B dont les objets sont les foncteurs $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ vérifiant les conditions suivantes :
— $\mathcal{A}$ est une catégorie abélienne k-linéaire, localement de type fini;
— le composé de F avec le foncteur d'inclusion $\mathsf{proj}\, B \hookrightarrow \mathsf{Mod}\, B$ est k-linéaire, fidèle et exact (ce qui détermine la structure k-linéaire de $\mathcal{A}$).

Notons d'autre part $\mathsf{Cog}_B^{\mathsf{str}}$ la sous-catégorie pleine de Cog_B dont les objets sont les cogébroïdes semi-transitifs de base B. On a alors le théorème suivant.

5.1.4. Théorème.

Soit B une algèbre. La restriction à Ab_B du foncteur $L : \mathsf{Cat}_B \longrightarrow \mathsf{Cog}_B$ est à valeurs dans $\mathsf{Cog}_B^{\mathsf{str}}$; le foncteur

$$\underline{L} : \mathsf{Ab}_B \longrightarrow \mathsf{Cog}_B^{\mathsf{str}}$$

ainsi défini est une équivalence de catégories.

Plus précisément, pour L objet de $\mathsf{Cog}_B^{\mathsf{str}}$, le foncteur oubli $u_L : \mathsf{comod}\, L \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ est un objet de Ab_B, d'où un foncteur $\underline{u} : \mathsf{Cog}_B^{\mathsf{str}} \longrightarrow \mathsf{Ab}_B$ qui est un quasi-inverse de $\underline{L}$.

Démonstration. Le théorème **5.2** de [Bru] affirme que si $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ est un objet de Cat_B, $L(F)$ est un cogébroïde semi-transitif, et le foncteur $\widetilde{F}$ induit une équivalence de catégories $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{comod}\, L(F)$ au-dessus de $\mathsf{proj}\, B$. D'autre part, si L est un cogébroïde semi-transitif de base B, la catégorie $\mathsf{comod}\, L$ est abélienne localement de type fini, et le foncteur oubli u_L : $\mathsf{comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Mod}\, B$ est exact et prend ses valeurs dans $\mathsf{proj}\, B$ (cf **5.1.2**); c'est donc un objet de Ab_B. En outre, le morphisme naturel de cogébroïdes $L(u_L) \longrightarrow L$ est un isomorphisme ([Bru], **5.8**).

Les foncteurs $\underline{L}$ et $\underline{u}$ sont donc bien définis, et on a des isomorphismes naturels $F \xrightarrow{\sim} \underline{u} \circ \underline{L}(F)$ et $\underline{L} \circ \underline{u}(L) \xrightarrow{\sim} L$. $\square$

5.2. Quasi-foncteurs fibre

Rappelons que k est un corps commutatif. On appelle *catégorie tensorielle sur k*, ou simplement *catégorie tensorielle*, une catégorie abélienne k-linéaire $\mathcal{T}$ munie d'une structure monoïdale telle que le produit tensoriel $\otimes$ soit k-linéaire en chaque variable, et l'objet unité I vérifie $\mathsf{End}(I) = k$.

5.2.1. Définition. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle autonome, et B une algèbre commutative. On appelle *quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur B* tout foncteur quasi-monoïdal autonome $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ dont le foncteur sous-jacent, vu comme un foncteur à valeurs dans $\mathsf{Mod}\, B$, est k-linéaire exact à droite.

Si B est non nulle, on dit que le quasi-foncteur fibre ω est *non trivial*.

5.2.2. Proposition. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle autonome, et ω un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur B. Alors :*

(i) le foncteur sous-jacent à ω est exact de $\mathcal{T}$ vers $\mathsf{Mod}\, B$, et si $B \neq 0$, il est fidèle;

(ii) pour tout morphisme d'algèbres commutatives $B \longrightarrow C$, $\omega \otimes_B C$ est un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur C;

(iii) pour tout objet X de $\mathcal{T}$, l'application canonique

$$\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(I, X) \otimes B \longrightarrow \mathsf{Hom}_B(\omega(I), \omega(X))$$
$$f \otimes x \mapsto \omega(f)x$$

est injective;

(iv) en particulier, si $\mathcal{T}$ admet un quasi-foncteur fibre non trivial, elle est localement de type fini.

Démonstration.

(i) On voit ω comme un foncteur de $\mathcal{T}$ dans $\mathsf{Mod}\, B$. Montrons son exactitude. Puisque $\mathcal{T}$ est autonome, le foncteur ${}^{\vee}?$ est une équivalence de catégories de $\mathcal{T}^o$ dans $\mathcal{T}$ (en particulier, il est exact); il suffit donc de vérifier que $\omega \circ {}^{\vee}?$ est exact. Soit

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0$$

une suite exacte courte de $\mathcal{T}$. Le foncteur ω étant par hypothèse exact à droite, on a les suites exactes

$$\omega(Y') \longrightarrow \omega(Y) \longrightarrow \omega(Y'') \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad \omega({}^{\vee}Y'') \longrightarrow \omega({}^{\vee}Y) \longrightarrow \omega({}^{\vee}Y') \longrightarrow 0\,;$$

le foncteur $\mathsf{Hom}_B(?, B)$ étant exact à gauche, on a donc la suite exacte

$$0 \longrightarrow {}^*\omega(Y'') \longrightarrow {}^*\omega(Y) \longrightarrow {}^*\omega(Y')\,,$$

et en vertu de l'existence d'un isomorphisme fonctoriel $\omega({}^{\vee}X) \simeq {}^*\omega(X)$,

$$0 \longrightarrow \omega({}^{\vee}Y'') \longrightarrow \omega({}^{\vee}Y) \longrightarrow \omega({}^{\vee}Y') \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

Montrons que ω est fidèle si $B \neq 0$. Soit X un objet non nul de $\mathcal{A}$, et montrons que $\omega(X)$ est non nul. Il résulte de l'identité $\mathbf{1}_X = (\mathbf{1}_X \otimes e_X)(h_X \otimes \mathbf{1}_X)$ que le morphisme d'évaluation $e_X : {}^{\vee}X \otimes_B X \longrightarrow I$ est non nul. Or, l'objet unité I est un objet simple de $\mathcal{T}$ (voir [Bru], **2.4**), donc e_X est un épimorphisme. Ainsi, $\omega(e_X)$ est un épimorphisme de

$\omega({}^\vee X \otimes X) \simeq \omega({}^\vee X) \otimes_B \omega(X)$ vers $\omega(I) \simeq B$. Puisque B est non nul, on a $\omega(X) \neq 0$. Comme $\mathcal{A}$ est abélienne et ω exact, ceci implique que ω est fidèle.

(ii) Le foncteur $? \otimes_B C : \mathsf{Mod}\, B \longrightarrow \mathsf{Mod}\, C$ est monoïdal et k-linéaire exact à droite, donc $\omega \otimes_B C : X \mapsto \omega(X) \otimes_B C$ est quasi-monoïdal autonome de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{proj}\, C$, k-linéaire et exact à droite de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{Mod}\, C$, d'où l'assertion.

(iii) Soit $(f_1, \dots f_n)$ une famille de morphismes de I vers X dans $\mathcal{T}$, et notons f le morphisme $I^n \longrightarrow X$ qu'elle définit. C'est un fait standard que la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ dont les objets sont les multiples de I est équivalente à $\mathsf{vect}\, k$ et stable par sous-quotients (cf. par ex. [Bru], remarque p. 5827). Il en résulte que si les f_i sont libres sur k, f est un monomorphisme. Alors, $\omega(f) : \omega(I)^n \longrightarrow \omega(X)$ est injectif par (i); cela signifie que les $\omega(f_i)$ sont libres sur B, car $\omega(I) \simeq B$, d'où l'assertion.

(iv) Une algèbre commutative non nulle admet un idéal maximal, donc d'après (ii), on peut supposer que $\mathcal{T}$ admet un quasi-foncteur fibre ω sur une extension K de k. La longueur d'un objet X dans $\mathcal{T}$ est majorée par la longueur de $\omega(X)$ dans $\mathsf{Vect}\, K$, puisque ω est fidèle exact; or ω est à valeurs dans $\mathsf{vect}\, K$, donc cette longueur est finie.

D'autre part, d'après (iii), $\mathsf{dim}_k(\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(I, X))$ est majorée par $\mathsf{dim}_K\, \omega(X)$, donc finie. Soit Y un autre objet de $\mathcal{T}$; alors $\mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathcal{T}}(I, Y \otimes {}^\vee X)$ est lui aussi de dimension finie. Ainsi, $\mathcal{T}$ est localement de type fini. □

5.2.3. Proposition. *Soient B une algèbre commutative non nulle, et $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de Hopf de base B, de cogébroïde sous-jacent L.*

On suppose d'une part, que L vérifie ST1*, et d'autre part, qu'il satisfait la condition* T0 *: l'ensemble $\{x \in B \mid s(x) = b(x)\}$ est réduit à k.*

Alors $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$ *est une catégorie tensorielle autonome, et le foncteur oubli $u_{\mathcal{L}}$ est un quasi-foncteur fibre de* $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$ *sur B. En particulier, L vérifie* ST3.

DÉMONSTRATION. De ST1 résultent les faits suivants. La catégorie $\mathsf{comod}\, L$ est abélienne, et le foncteur oubli $\mathsf{comod}\, L \longrightarrow \mathsf{Mod}\, B$ est k-linéaire exact ([Bru], **5.1**). La catégorie $\mathcal{V}$ du théorème **4.4.5** coïncide avec $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$; cette dernière est donc autonome, ainsi que le foncteur oubli. Le produit tensoriel de $\mathsf{Rep}\, \mathcal{L}$ est k-linéaire en chaque variable, et la condition T0 signifie que les endomorphismes de l'objet unité sont les scalaires (**4.2.2**). Par conséquent, $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$ est tensorielle, autonome, et le foncteur oubli est un quasi-foncteur fibre. □

5.3. Dualité tannakienne pour les quasi-bigébroïdes

5.3.1. Définition. Soient B une algèbre commutative non nulle, et $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de Hopf de base B, de cogébroïde sous-jacent L. On dit que $\mathcal{L}$ est *transitif* si L est semi-transitif, et $\mathcal{L}$ vérifie la condition T0 (i. e. $\{x \in B \mid s(x) = b(x)\} = k$).

5.3.2. Proposition. *Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de Hopf de base $B \neq 0$.*

(i) $\mathcal{L}$ est transitif si et seulement si $\mathcal{L}$ vérifie T0*, et le cogébroïde sous-jacent à $\mathcal{L}$ vérifie* ST1 *et* ST2*.*

(ii) Si $\mathcal{L}$ est transitif, $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$ *est une catégorie tensorielle autonome, et le foncteur oubli est un quasi-foncteur fibre de* $\mathsf{rep}\, \mathcal{L}$ *sur B.*

(iii) Si $\mathcal{L}$ est transitif, le B-module sous-jacent à toute représentation de $\mathcal{L}$ est projectif, et, s'il est non nul, il est partout non nul.[2]

[2] Un B-module M est 'partout non nul' si son support est $\mathsf{Spec}\, B$, ce qui, pour M plat

Démonstration. Les assertions (i) et (ii) résultent immédiatement de **5.2.3.** Montrons (iii). Soit $X = (V, \delta)$ un objet de $\mathsf{Rep}\,\mathcal{L}$. Alors V est projectif (cf. **5.1.2**). Supposons $X \neq 0$, et montrons qu'alors V est partout non nul. D'après **5.1.2,** on peut supposer que X est un objet de $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}$; il admet alors un dual à gauche ${}^{\vee}X$, et l'évaluation $e_X : {}^{\vee}X \otimes_{\mathcal{L}} X \longrightarrow I$ est, on l'a vu, un épimorphisme de $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}$. Le foncteur oubli étant exact, on en déduit une application B-linéaire surjective ${}^{*}V \otimes_B V \longrightarrow B$; le B-module projectif V est donc partout non nul. □

5.3.3. Proposition.

Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de Hopf de base $B \neq 0$.

Si le B^e-module sous-jacent à $\mathcal{L}$ est projectif et partout non nul, $\mathcal{L}$ est transitif. La réciproque est vraie si k est parfait.

Démonstration. On a $\mathcal{L} \neq 0$ d'après la remarque **4.1.3,** 2). Soit L le cogébroïde sous-jacent à $\mathcal{L}$.

Si L est projectif comme B^e-module, il vérifie $\mathsf{ST1}$ et $\mathsf{ST2}$ ([Bru], proposition **6.2**). Si en outre il est partout non nul, il est fidèlement plat, donc son annulateur est nul. L'unité $\eta : B^e \longrightarrow \mathcal{L}$ est donc injective; on a $\{x \in B \mid s(x) = b(x)\} = k$, d'où $\mathsf{T0}$. Ainsi, $\mathcal{L}$ est transitif par **5.3.2.**

Supposons k parfait et $\mathcal{L}$ transitif. En tant que B^e-module, L est naturellement muni d'une structure de $L^o \otimes L$-comodule à droite ([Bru], remarque p. 5832). Autrement dit, c'est une représentation, non nulle, de $\mathcal{L}^o \otimes \mathcal{L}$.

5.3.4. Lemme. *Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde de Hopf transitif de base B. Alors $\mathcal{L}^o$ est un quasi-bigébroïde de Hopf transitif.*

Soit $\mathcal{L}'$ un autre quasi-bigébroïde de Hopf transitif, de base B'. Si k est parfait, $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}'$ est un quasi-bigébroïde de Hopf transitif de base $B \otimes B'$.

Démonstration. Soit L (resp. L') le cogébroïde sous-jacent à $\mathcal{L}$ (resp. $\mathcal{L}'$). Alors L^o est semi-transitif ([Bru], **5.10**), de même que $L \otimes L^o$ si k est parfait ([Bru], **6.5**). Il suffit donc de vérifier que L^o et $L \otimes L'$ satisfont $\mathsf{T0}$. Pour le premier, c'est immédiat. Pour le second, posons $s'' = s \otimes s'$ et $b'' = b \otimes b'$. Il s'agit de montrer $\{z \in B \otimes B' \mid s''(z) = b''(z)\} \subset k$, l'inclusion inverse étant évidente. Soit z vérifiant $s''(z) = b''(z)$. Considérons une écriture minimale $z = \sum x_i \otimes y_i$, avec $x_i \in B$ et $y_i \in B'$. Les x_i et les y_i sont libres sur k. On a $\varepsilon s = \varepsilon b = 1_B$; appliquant $\varepsilon \otimes 1_{L'}$ aux deux membres de l'égalité $s''(z) = b''(z)$, il vient donc $\sum x_i \otimes s'(y_i) = \sum x_i \otimes b'(y_i)$. Les x_i étant libres, on en déduit $s'(y_i) = b'(y_i)$, et puisque $\mathcal{L}'$ vérifie $\mathsf{T0}$, on a $y_i \in k$. Il en va de même des x_i, donc z est un scalaire. □

Revenons à la démonstration de **5.3.3 :** L est une représentation non nulle de $\mathcal{L}^o \otimes \mathcal{L}$, quasi-bigébroïde de Hopf transitif de base B^e d'après le lemme. C'est donc un B^e-module projectif partout non nul, par **5.3.2.** □

5.3.5. Remarque. Une quasi-bigèbre de Hopf est toujours transitive, en tant que quasi-bigébroïde de Hopf de base $B = k$.

(donc en particulier, pour M projectif) équivaut à 'fidèlement plat'.

5.4. Dualité tannakienne pour les quasi-bigébroïdes de Hopf

5.4.1. Soit $\mathsf{QBig}_B^{\mathsf{tr}}$ (resp. $\mathsf{QBig}'^{\mathsf{tr}}_B$) la sous-catégorie pleine de QBig_B (resp. de QBig'_B) dont les objets sont les quasi-bigébroïdes de Hopf transitifs. Soit d'autre part QTan_B (resp. QTan'_B) la sous-catégorie pleine de QMon_B (resp QMon'_B) dont les objets sont les quasi-foncteurs fibre d'une catégorie tensorielle autonome sur B.

5.4.2. Théorème. *Soit B une algèbre commutative non nulle.*

La restriction à QTan_B du foncteur $\mathcal{L} : \mathsf{QMon}_B \longrightarrow \mathsf{QBig}_B$ est à valeurs dans $\mathsf{QBig}_B^{\mathsf{tr}}$; le foncteur

$$\underline{\mathcal{L}} : \mathsf{QTan}_B \longrightarrow \mathsf{QBig}_B^{\mathsf{tr}}$$

ainsi défini est une équivalence de catégories.

Plus précisément, le foncteur $\underline{u} : \mathsf{QBig}_B^{\mathsf{tr}} \longrightarrow \mathsf{QTan}_B$, qui associe à un quasi-bigébroïde de Hopf transitif $\mathcal{L}$ le foncteur oubli $u_{\mathcal{L}} : \mathsf{rep}\,\mathcal{L} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$, est un quasi-inverse de $\underline{\mathcal{L}}$.

En outre, la restriction de $\underline{\mathcal{L}}$ à QTan'_B est une équivalence de catégories de QTan'_B vers $\mathsf{QBig}'^{\mathsf{tr}}_B$.

Démonstration. Si $\mathcal{T}$ est une catégorie tensorielle autonome et ω un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur B, $\mathcal{L}(\omega)$ est un quasi-bigébroïde de Hopf de base B (**4.2.1** et **4.4.5**); en vertu du théorème **5.1.4,** le cogébroïde $L(\omega)$ est semi-transitif, et, d'autre part, le foncteur naturel $\mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{comod}\,L(\omega)$ est une équivalence de catégories. Ainsi le foncteur monoïdal canonique $\mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{rep}\,\mathcal{L}(\omega)$ est une équivalence de catégories monoïdales au-dessus de $\mathsf{proj}\,B$ d'après **4.2.1.** En particulier, $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}(\omega)$ est tensorielle, $\mathcal{L}$ vérifie $\mathsf{T0}$ (cf. **4.2.2**), et il est donc transitif.

Si $\mathcal{L}$ est un quasi-bigébroïde de Hopf transitif de base B, le foncteur oubli $u_{\mathcal{L}}$: $\mathsf{rep}\,\mathcal{L} \longrightarrow \mathsf{proj}\,B$ est un objet de QTan_B (proposition **5.2.3**), et le morphisme de quasi-bigébroïdes $\mathcal{L}(u_{\mathcal{L}}) \longrightarrow \mathcal{L}$ introduit en **4.3.2** est un isomorphisme par **5.1.4.** D'autre part, on a un isomorphisme naturel de ω vers $\underline{u} \circ \underline{\mathcal{L}}(\omega)$ dans QTan'_B, d'où le théorème. □

5.4.3. Définition. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle autonome, et ω, ω' deux quasi-foncteurs fibres de $\mathcal{T}$ sur B. On appelle *isomorphisme de ω sur ω'* tout isomorphisme fonctoriel quasi-monoïdal de ω sur ω'. En vertu de **4.3.4,** tout isomorphisme $\gamma : \omega \longrightarrow \omega'$ définit un quasi-isomorphisme $\mathsf{Ad}(\gamma) : \mathcal{L}(\omega) \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}(\omega')$.

6. Le cas des catégories tensorielles autonomes semi-simples

Dans toute la section **6,** k est un corps algébriquement clos.

6.1. Existence et unicité d'un quasi-foncteur fibre

6.1.1. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle autonome semi-simple, essentiellement petite, localement de type fini. Étant donnée une extension K de k, existe-t-il un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur K? Et s'il en existe un, est-il unique?

On note $\mathsf{Gr}^+\mathcal{T}$ le semi-anneau de Grothendieck de $\mathcal{T}$; les éléments de $\mathsf{Gr}^+\mathcal{T}$ sont les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{T}$. Le foncteur dual à gauche définit une application $x \mapsto {}^{\vee}x$ de $\mathsf{Gr}^+\mathcal{T}$ dans lui-même. On appelle *caractère de $\mathcal{T}$* toute application $\rho : \mathsf{Gr}^+\mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant

$$\rho(x+y) = \rho(x) + \rho(y), \quad \rho(xy) = \rho(x)\rho(y), \quad \rho({}^{\vee}x) = \rho(x), \quad \text{et} \quad \rho(1) = 1\,.$$

Si ω est un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ de base une algèbre B de spectre connexe, on appelle caractère de ω le caractère de $\mathcal{T}$ défini par $X \mapsto \mathsf{rg}_B\,\omega(X)$.

6.1.2. Théorème. *Soit B une algèbre commutative de spectre connexe.*

1) *Tout caractère de $\mathcal{T}$ est le caractère d'un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ de base B.*
2) *Si tout B-module projectif de type fini est libre,*[3] *deux quasi-foncteurs fibre de $\mathcal{T}$ de base B sont isomorphes si et seulement s'ils ont même caractère.*

Remarque. Il résulte de **6.1.2** que pour tout caractère ρ de $\mathcal{T}$, il existe un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ de caractère ρ, et que ce quasi-foncteur fibre est unique à isomorphisme près localement pour la topologie fpqc.

Démonstration. Soit S un ensemble. La catégorie $\mathcal{V}_S = \bigoplus_{s\in S} \mathsf{vect}\,k$, sous-catégorie pleine de $\prod_{s\in S} \mathsf{vect}\,k$ dont les objets sont les suites à support fini d'objets de $\mathsf{vect}\,k$ indexées par S, est une catégorie abélienne k-linéaire semi-simple localement de type fini, et toute catégorie abélienne k-linéaire semi-simple localement de type fini est de ce type, à équivalence k-linéaire près.

Si $\mathcal{B}$ est une catégorie k-linéaire, la catégorie des foncteurs k-linéaires de $\mathcal{V}_S$ dans $\mathcal{B}$ est canoniquement équivalente à $\mathcal{B}^S$, l'équivalence étant donnée par le foncteur $F \mapsto (F(s))_{s\in S}$. De même, la catégorie des foncteurs $\mathcal{V}_S \times \mathcal{V}_S \longrightarrow \mathcal{B}$ qui sont k-linéaires en chaque variable est canoniquement équivalente à la catégorie $\mathcal{B}^{S\times S}$, l'équivalence étant donnée par le foncteur $G \mapsto (G(s,s'))_{(s,s')\in S\times S}$.

En particulier, la catégorie sous-jacente à $\mathcal{T}$ est équivalente à $\mathcal{V}_S$, où S est l'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{T}$. On applique ce qui précède à $\mathcal{B} = \mathsf{fmod}\,B$, catégorie des B-modules libres de rang fini. Soit ρ un caractère de $\mathcal{T}$. Alors il existe un foncteur k-linéaire $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{fmod}\,B \subset \mathsf{proj}\,B$ tel que pour tout $s \in S$, $F(s)$ soit un B-module libre de rang $\rho(s)$. En outre un tel foncteur est unique à isomorphisme près. Considérons les deux foncteurs $G_1 : (X,Y) \mapsto F(X\otimes Y)$ et $G_2 : (X,Y) \mapsto F(X)\otimes_B F(Y)$ de $\mathcal{T}\times\mathcal{T}$ dans $\mathsf{fmod}\,B$. Ces foncteurs sont k-linéaires en chaque variable, et on a pour tous s, $s' \in S$:

$$\mathsf{rg}_B\,G_1(s,s') = \rho(ss') = \rho(s)\rho(s') = \mathsf{rg}_B\,G_2(s,s'),$$

donc G_1 et G_2 sont isomorphes. Il existe donc un isomorphisme fonctoriel ${\Phi_2}_{X,Y}$: $F(X)\otimes_B F(Y) \longrightarrow F(X\otimes Y)$; d'autre part, il existe un isomorphisme $\Phi_0 : B \longrightarrow F(I)$. En vertu de la remarque **1.2.6,** on peut choisir Φ_2 et Φ_0 de sorte que $\omega = (F, \Phi_2, \Phi_0)$ soit un foncteur quasi-monoïdal. De même, les foncteurs $X \mapsto F({}^\vee X)$ et $X \mapsto {}^*F(X)$ de $\mathcal{T}^o$ vers $\mathsf{fmod}\,B$ sont isomorphes, car pour $s\in S$, $\mathsf{rg}_B\,F({}^\vee s) = \rho({}^\vee s) = \rho(s) = \mathsf{rg}_B\,F(s)$. Ainsi, ω est un quasi-foncteur fibre.

Si deux quasi-foncteurs fibre ayant même caractère sont à valeurs dans $\mathsf{fmod}\,B$ (ce qui est toujours le cas si $\mathsf{fmod}\,B = \mathsf{proj}\,B$), les foncteurs sous-jacents sont isomorphes; donc en vertu de la remarque **1.2.4,** il existe entre eux un isomorphisme quasi-monoïdal. □

[3] Par exemple, si B est locale, ou principale.

6.1.3. REMARQUE. Soit $\mathcal{L}$ un quasi-bigébroïde transitif de base B. Le foncteur oubli $u_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \longrightarrow \mathsf{proj}\, B$ est un quasi-foncteur fibre de $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}$ sur B, donc tout point rationnel x de $\mathsf{Spec}\, B$ (c'est-à-dire tout morphisme d'algèbres $x : B \longrightarrow k$) définit par **5.2.2** un quasi-foncteur fibre $\omega_x = u_{\mathcal{L}} \otimes_B k$ de $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}$ sur k. Notons $\mathcal{L}_x$ la quasi-bigèbre de Hopf $x_*\mathcal{L}$, qui s'identifie à $\mathcal{L}(\omega_x)$. Le foncteur image directe $x_* : \mathsf{rep}\,\mathcal{L} \longrightarrow \mathsf{rep}\,\mathcal{L}_x$ est une équivalence de catégories monoïdales k-linéaires (**5.4.2**). Ainsi, si x et y sont deux points rationnels de B, les quasi-bigèbres de Hopf $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$ ont la même catégorie de de représentations de dimension finie; suivant la terminologie de [Bru], elles sont *quantiquement isomorphes.*

Supposons $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}$ semisimple, et $\mathsf{Spec}\, B$ connexe. Alors, les quasi-foncteurs fibre ω_x et ω_y ayant même caractère, les quasi-bigèbres de Hopf $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$ sont isomorphes à un twist de Drinfeld près (**6.1.2**).

Par exemple, pour p_0, $q_0 \in k^*$, on peut former la bigèbre de Hopf $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0}$. Soit $r \in k^*$. Dans ([Bru], **7.7**) on a montré que les bigèbres de Hopf $\mathsf{Gl}(2)_{p_1,q_1}$ et $\mathsf{Gl}(2)_{p_2,q_2}$ sont quantiquement isomorphes (i. e. ont même catégorie de représentations de dimension finie) si $p_1 q_1 = p_2 q_2 = r$. Pour cela, s'inspirant d'un exemple de Maltsiniotis, on a construit un bigébroïde de Hopf transitif $\mathcal{L}_r$ de base $B_r = k[p, p^{-1}, q, q^{-1}]/(pq - r)$, et vérifiant $(\mathcal{L}_r)_{p_0,q_0} = \mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0}$ pour $p_0 q_0 = r$. Supposons que r ne soit pas une racine de l'unité autre que 1. Alors $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}_r$ est semi-simple (car $\mathsf{rep}\,\mathcal{L}_r \simeq \mathsf{rep}\,\mathsf{Gl}(2)_{\sqrt{r}}$), et, $\mathsf{Spec}\, B_r$ étant connexe, $\mathsf{Gl}(2)_{p_1,q_1}$ et $\mathsf{Gl}(2)_{p_2,q_2}$ sont isomorphes à un twist près dès que $p_1 q_1 = p_2 q_2 = r$.

Cependant, si B n'est pas connexe, il se peut que $\mathcal{L}_x$ et $\mathcal{L}_y$ soient quantiquement isomorphes sans être isomorphes, même en tant que cogèbres. L'exemple **6.2.1** en est l'illustration.

6.2. Exemples

6.2.1. Soit $\mathcal{T}$ la catégorie des représentations algébriques de dimension finie de $\mathsf{Sl}_2(\mathbb{C})$. Notons V_r l'unique représentation irréductible de rang r de ce groupe ($r \geq 1$).

Si ρ est un caractère de $\mathcal{T}$, posons $\rho(r) = \rho(V_r)$. Pour $r \geq 2$, $V_2 \otimes V_r \simeq V_{r-1} \oplus V_{r+1}$; d'où $\rho(r+1) = \rho(2)\rho(r) - \rho(r-1)$. Puisque $\rho(1) = 1$, ρ est entièrement caractérisé par $\rho(2)$. Pour tout entier $n \geq 2$, il existe un unique caractère de $\mathcal{T}$, qu'on note ρ_n, vérifiant $\rho_n(2) = n$. Ce caractère est défini par la formule $\rho_n(r) = ({q_n}^r - {q_n}^{-r})/(q_n - {q_n}^{-1})$, où $q_n = \frac{1}{2}(n \pm \sqrt{n^2 - 4})$.

Ainsi, il existe un quasi-foncteur fibre $\omega_n : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{vect}\,\mathbb{C}$, unique à isomorphisme près, vérifiant $\mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\, \omega(V_2) = n$. Pour $n = 2$, c'est le foncteur oubli habituel, mais pour $n \geq 3$, on obtient ainsi des quasi-foncteurs fibre vraiment nouveaux.

Les quasi-bigèbres de Hopf $\mathcal{L}(\omega_n)$ ont la même catégorie de représentations, (elles sont 'quantiquement isomorphes' au sens de [Bru]), mais ne se déduisent pas les unes des autres par des twists de Drinfeld, car elle sont deux à deux non-isomorphes en tant que cogèbres. (En effet, la liste des dimensions des comodules simples est chaque fois différente.)

6.2.2. On se propose maintenant d'étudier les catégories tensorielles semi-simples localement de type fini où tout objet simple est inversible.

Soit $\mathcal{T}$ une telle catégorie. L'ensemble des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{T}$ est un groupe multiplicatif G. Soit ρ un caractère de $\mathcal{T}$; alors pour tout $s \in G$, on a $\rho(s)\rho(s^{-1}) = 1$, d'où $\rho(s) = 1$. Ainsi, $\mathcal{T}$ admet un unique caractère. Autrement dit, $\mathcal{T}$ admet un quasi-foncteur fibre ω sur k, unique à isomorphisme près (théorème **6.1.2**).

Soit ω un quasi-foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur k. On peut supposer, sans perte de généralité, qu'il y a un seul objet par classe d'isomorphisme dans $\mathcal{T}$. Soit X_g l'objet simple correspondant à $g \in G$. On a $\mathsf{dim}_k\, \omega(X_g) = 1$, donc on peut supposer que $\omega(X_g) = k$. La cogèbre sous-jacente à $\mathcal{L}(\omega)$ s'identifie à $k^{(G)}$, rapporté à la base canonique $(\xi_g)_{g \in G}$, avec $\Delta(\xi_g) = \xi_g \otimes \xi_g$ et $\varepsilon(\xi_g) = 1$. Le dual de cette cogèbre est donc l'algèbre k^G. Le produit est donné par $\mu(\xi_g \otimes \xi_h) = \xi_{gh}$, et l'unité est ξ_e. Le Φ est donné par une fonction $b : G^3 \longrightarrow k^*$. L'axiome $(\mathsf{QB4})$ est automatique, car μ est associatif et le produit de convolution, commutatif. Les axiomes $(\mathsf{QB5})$ et $(\mathsf{QB6})$ se traduisent par les conditions suivantes sur b :

$$b(g_1, g_2, g_3 g_4) b(g_1 g_2, g_3, g_4) = b(g_2, g_3, g_4) b(g_1, g_2 g_3, g_4) b(g_1, g_2, g_3)\,,$$
$$b(g_1, e, g_2) = 1\,.$$

Autrement dit, b est un 3-cocycle *normalisé*[4] de G à valeurs dans k^*, et ce 3-cocycle détermine la quasi-bigèbre $\mathcal{L}(\omega)$ à isomorphisme près. Inversement, tout 3-cocycle normalisé b définit une quasi-bigèbre qu'on note $\mathcal{L}^b$.

D'autre part, soit G un groupe, et a un 3-cocycle de G à valeurs dans k^*. En **1.2.7,** nous avons associé à un tel a une catégorie monoïdale $\mathcal{C}^a$. Soit $\mathcal{T}^a$ la la catégorie additive k-linéaire formée à partir de $\mathcal{C}^a$ par adjonction formelle des sommes directes finies (c'est donc la catégorie que nous notons $\mathcal{V}_G$). Il existe sur $\mathcal{T}^a$ une structure de catégorie monoïdale, unique à équivalence monoïdale près, telle que le foncteur pleinement fidèle $i : \mathcal{C}^a \hookrightarrow \mathcal{T}^a$ soit monoïdal strict.

Muni de cette structure monoïdale, $\mathcal{T}^a$ est une catégorie tensorielle semi-simple, localement de type fini, et autonome, car les classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{T}^a$ constituent un groupe qui s'identifie à G.

La catégorie $\mathcal{T}^a$ admet donc un quasi-foncteur fibre ω, unique à quasi-isomorphisme près. La quasi-bigèbre $\mathcal{L}(\omega)$ est de la forme $\mathcal{L}^b$, pour un certain 3-cocycle normalisé b. Soit $\omega = (F, \Phi_2, \Phi_0)$. On peut supposer que pour tout g, $F(X_g) = k$. Alors ${\Phi_2}_{X_g, X_h}$ est un élément de k^* qu'on note $\phi(g,h)$. La condition (CA) pour ω se traduit par :

$$a(g_1, g_2, g_3)\phi(g_1 g_2, g_3)\phi(g_1, g_2) = \phi(g_1, g_2 g_3)\phi(g_2, g_3) b(g_1, g_2, g_3)\,,$$

ce qui signifie que b définit la même classe de cohomologie que a.

La proposition suivante résume cette discussion.

6.2.3. Proposition. *Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle semi-simple localement de type fini où tout objet simple est inversible, et G le groupe des classes d'isomorphisme d'objets simples de $\mathcal{T}$.*

Alors $\mathcal{T}$ admet un quasi-foncteur fibre ω, unique à isomorphisme près. Il existe un 3-cocycle normalisé b de G à valeurs dans k^* tel que la quasi-bigèbre de Hopf $\mathcal{L}(\omega)$ soit isomorphe à $\mathcal{L}^b$. ($\mathcal{T}$ est alors équivalente à $\mathcal{T}^b$.)

De plus, tout élément de $\mathsf{H}^3(G, k^*)$ est représenté par un 3-cocycle normalisé, et si b et b' sont deux tels 3-cocycles, $\mathcal{L}^{b'}$ est un twist de Drinfeld de $\mathcal{L}^b$ si et seulement si b et b' représentent la même classe de cohomologie. □

[4] On dit que b est normalisé si $b(g_1, e, g_2) = 1$.

6.2.4. Remarque. En particulier, si b n'est pas un bord, $\mathcal{L}^b$ n'est pas un twist d'une bigèbre de Hopf. Autrement dit, il existe d'autres quasi-groupes quantiques que les twists de Drinfeld des groupes quantiques. De même, il existe des catégories tensorielles autonomes qui admettent un quasi-foncteur fibre non trivial, mais pas de foncteur-fibre non trivial.

Références bibliographiques

[Bre] L. Breen, *Tannakian Categories*, in *Motives*, U. Jannsen, S. Kleinman, J.-P. Serre Eds, Proc. of Symp. in Pure Math. **55** Part I (AMS), pp. 337-376 (1994).

[Bru] A. Bruguières, *Théorie tannakienne non commutative*, Comm. in Algebra, **22(14)**, pp. 5817—5860 (1994).

[Bru-Mal] A. Bruguières et G. Maltsiniotis, *Quasi-Groupoïdes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **319**, Série I, pp. 933–936 (1994).

[D1] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, in *The Grothendieck Festschrift*, II, Progress in Mathematics **87,** Birkhäuser, pp. 111–195 (1990).

[D-M] P. Deligne et J. S. Milne, *Tannakian Categories* in *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lecture Notes in Mathematics **900,** Springer Verlag, pp. 101–228 (1982).

[Di-P-R] R. Dijkgraaf, V. Pasquier et P. Roche, *Quasi-Hopf Algebras, Group Cohomology and Orbifold Models*, in *Integrable Models and Quantum Groups*, M. Carfora, M. Martinelli, A. Marzuoli Eds, World Scientific (1992).

[Dr] V. G. Drinfeld, *Quasi-Hopf Algebras* Leningrad Math. J, Vol 1 (1990), No 6.

[J-S] A. Joyal et R. Street, *An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups*, in *Category Theory (Proceedings Como 1990)* Lecture Notes in Mathematics **1488,** pp. 413-492 (1991).

[L1] V. Lyubashenko, *Tangles and Hopf Algebras in Braided Categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **98,** pp. 245-278 (1995).

[L2] V. Lyubashenko, *Modular Transformations for Tensor Categories*, Journal of Pure and Applied Algebra **98,** pp. 279-327 (1995).

[McL] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math. **5,** Springer Verlag (1971).

[M] S. Majid, *Reconstruction Theorems and Rational Conformal Field Theories*, preprint DAMTP/89-40 (1989).

[Mal] G. Maltsiniotis, *Groupoïdes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **314,** Série I, pp. 249–252 (1992).

[R] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics **265,** Springer Verlag (1972).

[S] P. Schauenburg, *Tannaka Duality for Arbitrary Hopf Algebras*, Algebra Berichte **66,** Verlag Reinhard Fischer, München (1992).

[U1] K.–H. Ulbrich, *On Hopf Algebras and Rigid Monoidal Categories*, Israel J. Math. **72,** pp. 225–256 (1990).

[U2] K.–H. ULBRICH, *Tannakian Categories for Non-Commutative Hopf Algebras*, preprint.

[Y] D. N. YETTER, *Coalgebras, Comodules, Coends and Reconstruction*, preprint.