THÉORIE TANNAKIENNE NON COMMUTATIVE

Alain Bruguières

Université de Paris VII, U. F. R. de mathématiques
2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France

ABSTRACT. Inspired by a recent paper by Deligne [2], we extend the Tannaka-Krein duality results (over a field) to the non-commutative situation. To be precise, we establish a 1–1 correspondence between 'tensorial autonomous categories' equipped with a 'fibre functor' (i. e. tannakian categories without the commutativity condition on the tensor product), and 'quantum groupoids' (as defined by Maltsiniotis, [9]) which are 'transitive' (7.1.). When the base field is perfect, a quantum groupoid over $\mathsf{Spec}\, B$ is transitive iff it is projective and faithfully flat over $B \otimes_k B$. Moreover, the fibre functor is unique up to 'quantum isomorphism' (7.6.). Actually, we show Tannaka-Krein duality results in the more general setting where there is no monoidal structure on the category (and the functor); the algebraic object corresponding to such a category is a 'semi-transitive' coalgebroid (5.2. and 5.8.).

Introduction

La théorie des catégories tannakiennes est issue d'une idée d'Alexandre Grothendieck, développée par N. Saavedra Rivano dans sa thèse [10]. Elle fut conçue comme un outil indispensable à l'élaboration de la théorie des motifs. Alexandre Grothendieck aurait souhaité que ces catégories fussent nommées "*catégories de Galois–Poincaré–Grothendieck*", mais l'usage en a décidé autrement. Inspiré par la lecture de la contribution de P. Deligne au Grothendieck Festschrift [2], et animé par la conviction que l'étude des groupes quantiques était intimement liée à celle des catégories de leurs représentations, je me suis fixé pour but dans ce travail d'adapter, dans la mesure du possible, les résultats de la théorie des catégories tannakiennes à un cadre non commutatif.

Résumons très brièvement la situation dans le cas commutatif : à un groupe algébrique affine G sur le corps des complexes, on associe la catégorie $\mathcal{T} = \mathsf{rep}(G)$ de ses représentations algébriques de dimension finie. Cette catégorie est assortie d'un foncteur oubli ω de $\mathcal{T}$ vers la catégorie $\mathsf{vect}(\mathbb{C})$ des espaces vectoriels complexes de dimension finie. On désire donner une caractérisation interne des catégories ainsi obtenues. On observe les faits suivants.

(i) D'une part, la catégorie $\mathcal{T}$ est munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ qui est "associatif", "commutatif" et admet un "élément neutre". Autrement dit, $\mathcal{T}$ est une *catégorie monoïdale symétrique.*

(ii) En outre, tout objet de $\mathcal{T}$ admet un dual : on dit que $\mathcal{T}$ est *autonome*; on peut alors définir de façon *interne* la *dimension* d'un objet de $\mathcal{T}$, qui est *a priori* un nombre complexe.

(iii) D'autre part, la catégorie $\mathcal{T}$ est abélienne $\mathbb{C}$-linéaire, de façon "compatible à sa structure monoïdale" : elle est *tensorielle.*

(iv) La catégorie $\mathcal{T}$ est "assez petite" en ce sens qu'il existe un objet V tel que tout objet soit sous-quotient d'un $V^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(v) Le foncteur $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{vect}(\mathbb{C})$ est "compatible au produit tensoriel" (*monoïdal symétrique*), et exact : on dit que c'est un *foncteur fibre.*

Dans ce cadre volontairement restreint, les résultats de la thèse de Saavedra [10] se traduisent comme suit : étant donnée une catégorie vérifiant (i)—(iv) et admettant un foncteur fibre (on dit alors que $\mathcal{T}$ est *tannakienne*), il existe un groupe algébrique affine G, unique à isomorphisme près, tel que $\mathcal{T}$ s'identifie à $\mathsf{rep}(G)$, le foncteur fibre correspondant au foncteur oubli. Le groupe G s'obtient comme groupe des automorphismes du foncteur fibre. En outre, si $\mathcal{T}$ est tannakienne, le foncteur fibre est unique à isomorphisme près. Dans la suite, j'emploierai l'expression "résultats tannakiens" pour désigner ces propriétés, ou leurs analogues. Deligne donne dans [2] une caractérisation purement interne des catégories tannakiennes : si une catégorie $\mathcal{T}$ vérifie (i)—(iv), elle est tannakienne si et seulement si la dimension interne de tout objet de $\mathcal{T}$ est un entier naturel.

Le résumé ci-dessus comporte deux simplifications : en général, le corps de base k n'est supposé ni algébriquement clos, ni de caractéristique zéro, et on ne fait pas l'hypothèse (iv). On est alors amené à considérer des foncteurs fibres à valeurs non dans $\mathsf{vect}(k)$, mais dans la catégorie $\mathsf{Qcoh}(S)$ des faisceaux quasi-cohérents sur un k-schéma S, qu'on ne perd rien à supposer affine. Alors, l'objet G n'est plus un groupe algébrique, mais un groupoïde algébrique (c'est-à-dire un groupoïde dans la catégorie des k-schémas) vérifiant une certaine propriété de transitivité. Le groupoïde en question n'est unique qu'en un sens local. En outre, la caractérisation interne due à Deligne n'est valable qu'en caractéristique zéro.

La démonstration de Saavedra présentait une lacune, ainsi d'ailleurs que les hypothèses de ses énoncés; Deligne donne la démonstration complète dans [2].

Le jeu tannakien repose sur le fait qu'à tout foncteur F d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie des modules projectifs de type fini sur un anneau B, on peut associer un objet $L(F)$ qui "représente" les endomorphismes de ce foncteur. Cet objet est un *cogébroïde* de base B. Quand on enrichit la structure de la catégorie $\mathcal{C}$ et du foncteur F, on enrichit d'autant la structure du cogébroïde $L(F)$. Par exemple, lorsque $\mathcal{C}$ est monoïdale et F aussi, $L(F)$ se voit doté d'une structure d'anneau; c'est un *bigébroïde*, au sens donné à ce terme par Maltsiniotis [9]. Si $\mathcal{C}$ et F sont symétriques, le bigébroïde obtenu est commutatif; si (i)—(v) sont satisfaits, on obtient une algèbre de Hopf de type fini. (On peut dresser ainsi tout un "dictionnaire tannakien", cf. [4].)

Les contributions de ce travail qui me paraissent les plus originales sont l'introduction de la notion de k-cogébroïde semi-transitif, qui permet de d'énoncer et de démontrer les "résultats tannakiens" en termes de k-cogébroïdes (théorème 5.2, proposition 5.8.);

une caractérisation simple des k-cogébroïdes semi-transitifs lorsque k est parfait (théorème 6.1.); la démonstration des "résultats tannakiens" dans le cadre des k-bigébroïdes de Hopf "quantiques"(théorème 7.1.); et l'introduction de la notion de bigébroïdes de Hopf quantiquement isomorphes, qui permet de formuler une version "quantique" du théorème d'unicité du foncteur fibre (7.6.).

Mon parti pris a été de formuler et de démontrer les "résultats tannakiens" dans le cadre le plus général, celui des cogébroïdes. Il y a à mon sens deux avantages à cela. D'une part, c'est plus simple; d'autre part, cela permet d'envisager d'un coup un éventail assez large d'applications. En effet, il suffit d'utiliser le "dictionnaire tannakien" pour étendre les résultats sur les cogébroïdes à des structures plus riches. Dans le présent travail, je m'intéresse aux bigébroïdes de Hopf (dont la multiplication est associative); mais on pourrait tout aussi bien définir une notion de quasi-bigébroïde de Hopf, à la manière de Drinfeld, en remplaçant l'associativité de la multiplication par une condition plus faible de quasi-associativité : on obtiendrait des résultats similaires.

Je remercie vivement Georges Maltsiniotis d'avoir gentiment accepté la corvée de faire une lecture très attentive de ce travail, et de m'avoir signalé quelques erreurs et fait plusieurs suggestions extrêmement judicieuses.

Plan.

Dans la section 1, nous précisons le vocabulaire des catégorie monoïdales. La section 2 introduit différentes notions de catégories monoïdales munies d'une structure linéaire. Intéressé que j'étais au cas non symétrique, je me suis trouvé amené à m'écarter des conventions que Deligne utilise. J'en ai profité pour rendre hommage à R. Penrose, dont la contribution me parait importante et parfois un peu négligée, en donnant son nom à la notion la plus générale; ce que j'appelle catégorie tensorielle est une catégorie de Penrose abélienne (sans supposer l'existence de duaux ni d'une symétrie). On trouvera dans cette section quelques résultats qui figurent dans [2] ou [3] pour ce qui concerne le cas symétrique, mais dont il fallait bien vérifier la validité dans ce cadre plus général.

Les sections 3 et 4 rassemblent un outillage issu de [2] qui sera indispensable dans la section 5. La section 3 introduit les cogébroïdes, et précise quelques propriétés des comodules sur les cogébroïdes. Nous y rappelons l'énoncé du théorème de Barr-Beck. La construction du cogébroïde universel associé à un foncteur à valeurs dans une catégorie de modules, et l'énoncé de quelques propriétés de fonctorialité de cette construction universelle, font l'objet de la section 4.

Dans la section 5, nous définissons les cogébroïdes semi-transitifs, et nous formulons et démontrons les "résultats tannakiens" en termes de cogébroïdes semi-transitifs. Dans 6, on voit que lorsque le corps k est parfait, on a une meilleure caractérisation des cogébroïdes semi-transitifs. Ce sont là les résultats les plus importants de ce travail, puisque toute la suite en découle aisément. Dans la section 7, les resultats de 5 et 6 sont interprétés en termes de bigébroïdes de Hopf transitifs. Dans la section 8, nous examinons deux cas particuliers. Tout d'abord, le cas des bigèbres de Hopf (qui englobe les "groupes quantiques"), puis la situation commutative, où nous vérifions que la notion de transitivité qui apparaît dans la section 7 correspond à la notion usuelle, ce qui permet de retrouver les résultats tannakiens classiques.

Notations.

Si $\mathcal{A}$ est une catégorie, $Ob(\mathcal{A})$ est la collection des objets de $\mathcal{A}$. Pour X, $Y \in Ob(\mathcal{A})$, on désigne l'ensemble des morphismes de X vers Y par $\mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X,Y)$, ou plus simplement $\mathsf{Hom}(X,Y)$. On note $\mathcal{E}ns$ la catégorie des ensembles.

Si A est un anneau, $\mathsf{Mod}(A)$ est la catégorie des A-modules à droite, $\mathsf{mod}(A)$, la catégorie des A-modules à droite de type fini, et $\mathsf{proj}(A)$, celle des A-modules à droite projectifs de type fini. On note A^o l'anneau opposé à A, de sorte que $\mathsf{Mod}(A^o)$ est la catégorie des A-modules à gauche.

Soit k un anneau commutatif et A, B deux k-algèbres. Alors $\mathsf{Bimod}_k(A,B)$ est la catégorie $\mathsf{Mod}(A^o \otimes_k B)$; autrement dit, la catégorie des (A,B)-bimodules (notons que les deux structures de k-module sur un tel bimodule coïncident). Si M est un (A,B)-bimodule, on note M^o le (B^o,A^o)-bimodule qui lui est canoniquement associé.

On désigne par $\mathsf{Spec}(A)$ le spectre d'un anneau commutatif A. Si S est un schéma, on note $\mathcal{O}_S$ son faisceau structural, $\mathsf{Qcoh}(S)$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur S, et $\mathsf{vect}(S)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux localement libres de type fini. Si K est un corps commutatif, on note aussi $\mathsf{vect}(K)$ la catégorie des K-espaces vectoriels de dimension finie.

On note $\mathsf{Comod}(B:L)$ la catégorie des comodules à droite d'un k-cogébroïde L de base B, et $\mathsf{comod}(B:L)$ la sous-catégorie pleine des comodules qui sont de type fini comme B-modules. Le cogébroïde opposé, de base B^o, est noté L^o. La catégorie des L-comodules à gauche est $\mathsf{Comod}(B^o:L^o)$.

Si $\mathcal{L}$ est un bigébroïde de base B, on désigne par $\mathsf{Rep}(B:\mathcal{L})$ la catégorie des représentations de $\mathcal{L}$: c'est la catégorie $\mathsf{Comod}(B:\mathcal{L})$ munie de la structure monoïdale naturelle. On note $\mathsf{rep}(B:\mathcal{L})$ la sous-catégorie monoïdale des représentations de type fini comme B-modules. On note I la représentation unité.

1.—Rappels sur les catégories monoïdales

Catégories monoïdales.

Une *catégorie monoïdale* est la donnée
— d'une catégorie $\mathcal{C}$,
— d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ (appelé *produit tensoriel*),
— d'un objet I de $\mathcal{C}$ (*l' objet unité*),
— d'isomorphismes fonctoriels

$$\begin{aligned} a_{A,B,C} &: (A\otimes B)\otimes C \longrightarrow A\otimes(B\otimes C) \\ l_A &: I\otimes A \longrightarrow A \\ r_A &: A\otimes I \longrightarrow A \end{aligned}$$

avec pour axiomes la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} ((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[r, "a_{A\otimes B,C,D}"] \arrow[d, "a_{A,B,C}\otimes 1_D"'] & (A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[r, "a_{A,B,C\otimes D}"] & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)) \\ (A\otimes(B\otimes C))\otimes D \arrow[rr, "a_{A,B\otimes C,D}"'] & & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[u, "1_A\otimes a_{B,C,D}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "a_{A,I,B}"] \arrow[dr, "r_A \otimes 1_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "1_A \otimes l_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd}.$$

Le premier de ces diagrammes s'appelle le *pentagone de MacLane.*

Les isomorphismes a, l, r, sont appelés respectivement *contrainte d'associativité, contrainte d'unité à gauche, contrainte d'unité à droite.*

Par abus, nous désignerons le plus souvent la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ par le symbole $\mathcal{C}$.

La catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est dite *stricte* lorsque les conditions suivantes sont remplies :

1) le produit tensoriel est associatif sur les objets :

$$A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C,$$

2) l'objet unité est neutre pour le produit :

$$A \otimes I = A = I \otimes A,$$

3) les contraintes a, l, r sont les identités :

$$a_{A,B,C} = 1_{A \otimes B \otimes C}\,, \qquad l_A = r_A = 1_A\,.$$

Il résulte de ces hypothèses que le produit tensoriel est associatif sur les morphismes de $\mathcal{C}$, et que 1_I est neutre pour ce produit.

Foncteurs monoïdaux.

Soient $(\mathcal{C}, \otimes, I, a, l, r)$ et $(\mathcal{C}', \otimes', I', a', l', r')$ deux catégories monoïdales. Un *foncteur monoïdal de* $\mathcal{C}$ *vers* $\mathcal{C}'$ est la donnée

— d'un foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$,
— d'un isomorphisme fonctoriel $\Phi_{2A,B} : F(A) \otimes' F(B) \longrightarrow F(A \otimes B)$,
— d'un isomorphisme $\Phi_0 : I' \longrightarrow F(I)$,

avec pour axiomes la commutativité des diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd}
(F(A) \otimes' F(B)) \otimes' F(C) \arrow[r, "a'_{F(A),F(B),F(C)}"] \arrow[d, "\Phi_{2A,B} \otimes' 1_{F(C)}"'] & F(A) \otimes' (F(B) \otimes' F(C)) \arrow[d, "1_{F(A)} \otimes' \Phi_{2B,C}"] \\
F(A \otimes B) \otimes' F(C) \arrow[d, "\Phi_{2A \otimes B, C}"'] & F(A) \otimes' F(B \otimes C) \arrow[d, "\Phi_{2A, B \otimes C}"] \\
F((A \otimes B) \otimes C) \arrow[r, "F(a_{A,B,C})"'] & F(A \otimes (B \otimes C))
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} I' \otimes' F(A) \arrow[r, "l'_{F(A)}"] \arrow[d, "\Phi_0 \otimes' 1_{F(A)}"'] & F(A) \\ F(I) \otimes' F(A) \arrow[r, "\Phi_{2I,A}"'] & F(I \otimes A) \arrow[u, "F(l_A)"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(A) & F(A) \otimes' I' \arrow[l, "r'_{F(A)}"'] \arrow[d, "1_{F(A)} \otimes' \Phi_0"] \\ F(A \otimes I) \arrow[u, "F(r_A)"] & F(A) \otimes' F(I) \arrow[l, "\Phi_{2A,I}"] \end{tikzcd} \quad .$$

Les isomorphismes $\Phi_{2A,B}$ et Φ_0 s'appellent respectivement *contrainte de compatibilité aux produits tensoriels*, et *contrainte de compatibilité aux unités.*

Nous désignerons le foncteur monoïdal (F, Φ_2, Φ_0) par le symbole F lorsque cela n'induira pas d'ambiguïté.

Une *équivalence de catégories monoïdales* est un foncteur monoïdal $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ qui induit sur les catégories sous-jacentes une équivalence de catégories.

Du *théorème de cohérence de MacLane* [7] résulte en particulier que pour toute catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ il existe une catégorie monoïdale stricte $\mathcal{C}'$ et une équivalence de catégories monoïdales $F : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathcal{C}$.

Nous utiliserons souvent ce théorème, de façon tacite, pour étendre à une catégorie monoïdale quelconque une propriété, une construction ou une notion valide dans une catégorie monoïdale stricte.

Tressages et symétries.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, qu'on suppose stricte (en vertu de la remarque précédente, ce qui suit s'adapte au cas d'une catégorie monoïdale quelconque).

Un *tressage sur* $\mathcal{C}$ est un isomorphisme fonctoriel $R_{A,B} : A \otimes B \longrightarrow B \otimes A$ rendant commutatifs les triangles suivants :

$$\begin{tikzcd} A \otimes B \otimes C \arrow[rr, "R_{A,B\otimes C}"] \arrow[dr, "R_{A,B} \otimes 1_C"'] & & B \otimes C \otimes A \\ & B \otimes A \otimes C \arrow[ur, "1_B \otimes R_{A,C}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \otimes B \otimes C \arrow[rr, "R_{A\otimes B,C}"] \arrow[dr, "1_A \otimes R_{B,C}"'] & & C \otimes A \otimes B \\ & A \otimes C \otimes B \arrow[ur, "R_{A,C} \otimes 1_B"'] & \end{tikzcd} \quad .$$

Il est facile de voir que ces conditions entraînent : $R_{I,A} = R_{A,I} = 1_A$.

Si R est un tressage sur C, il en va de même de R^o défini par : ${R^o}_{A,B} = (R_{B,A})^{-1}$. On dit que R est un *tressage symétrique*, ou plus simplement une *symétrie*, si $R = R^o$.

Une *catégorie monoïdale tressée* (resp. *symétrique*) est une catégorie monoïdale munie d'un tressage (resp. d'une symétrie).

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales tressées (resp. symétriques). Un foncteur monoïdal F de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$ est dit *tressé* (resp. *symétrique*) si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F(A) \otimes' F(B) \arrow[r, "\Phi_{2A,B}"] \arrow[d, "R'_{F(A),F(B)}"'] & F(A \otimes B) \arrow[d, "F(R_{A,B})"] \\ F(B) \otimes' F(A) \arrow[r, "\Phi_{2B,A}"'] & F(B \otimes A) \end{tikzcd} \quad .$$

Dualité dans les catégories monoïdales.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale, supposée stricte, et A un objet de $\mathcal{C}$. Un *dual à droite de* A est la donnée
— d'un objet $A^\vee$ de $\mathcal{C}$,
— d'un morphisme $e : A \otimes A^\vee \longrightarrow I$, appelé *évaluation*,
— d'un morphisme $h : I \longrightarrow A^\vee \otimes A$, appelé *coévaluation*, avec les conditions :

$$(e \otimes 1_A)(1_A \otimes h) = 1_A$$
$$(1_{A^\vee} \otimes e)(h \otimes 1_{A^\vee}) = 1_{A^\vee} \quad .$$

Il résulte de cette définition que le foncteur $? \otimes A^\vee$ est adjoint à gauche au foncteur $? \otimes A$, et que le foncteur $A^\vee \otimes ?$ est adjoint à droite au foncteur $A \otimes ?$; autrement dit, on a des isomorphismes fonctoriels $\mathsf{Hom}(X, Y \otimes A) \simeq \mathsf{Hom}(X \otimes A^\vee, Y)$ et $\mathsf{Hom}(A \otimes X, Y) \simeq \mathsf{Hom}(X, A^\vee \otimes Y)$.

Un dual à droite, s'il existe, est unique à isomorphisme unique près. Plus précisément, supposons que (B_1, e_1, h_1) et (B_2, e_2, h_2) soient deux duaux à droite de l'objet A. Il existe alors un isomorphisme unique $\rho : B_1 \longrightarrow B_2$ vérifiant : $e_1 = e_2(1_A \otimes \rho)$ et $h_2 = (\rho \otimes 1_A)h_1$.

Étant donnés deux objets A, B admettant des duaux à droite $A^\vee$, $B^\vee$, on peut associer à tout morphisme $f : A \longrightarrow B$ son *dual à droite* $f^\vee : B^\vee \longrightarrow A^\vee$ défini par la composition des flèches

$$B^\vee = I \otimes B^\vee \xrightarrow{h_A \otimes 1} A^\vee \otimes A \otimes B^\vee \xrightarrow{1 \otimes f \otimes 1} A^\vee \otimes B \otimes B^\vee \xrightarrow{1 \otimes e_B} A^\vee \otimes I = A^\vee \quad .$$

Bien que cette notion dépende du choix d'un dual pour les objets considérés, elle est fonctorielle en ce sens que si $f : A \longrightarrow B$ et $g : B \longrightarrow C$ sont deux morphismes de $\mathcal{C}$ et $A^\vee$, $B^\vee$, $C^\vee$ sont des duaux de A, B, C respectivement, alors $(gf)^\vee = f^\vee g^\vee$.

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales, et F un foncteur monoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}'$. Si $(A^\vee, e, h)$ est un dual à droite d'un objet A de $\mathcal{C}$, alors $(F(A^\vee), e', h')$ est un dual à droite de $F(A)$, où e' est la composée de

$$F(A) \otimes' F(A^\vee) \simeq F(A \otimes A^\vee) \xrightarrow{F(e)} F(I) \simeq I' \, ,$$

et h', celle de

$$I' \simeq F(I) \xrightarrow{F(h)} F(A^\vee \otimes A) \simeq F(A^\vee) \otimes' F(A) \, .$$

Une catégorie monoïdale est dite *autonome à droite* lorsque tout objet admet un dual à droite. Si on choisit un dual à droite $A^\vee$ pour chaque objet A on définit un foncteur contravariant $?^\vee$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$.

Naturellement, on définit de même la notion de *dual à gauche* d'un objet A de $\mathcal{T}$: il s'agit de la donnée
— d'un objet ${}^\vee\!A$ de $\mathcal{C}$,
— d'un morphisme $\varepsilon : {}^\vee\!A \otimes A \longrightarrow I$, appelé *évaluation*,
— d'un morphisme $\eta : I \longrightarrow A \otimes {}^\vee\!A$, appelé *coévaluation*,
avec les conditions :

$$(1_A \otimes \varepsilon)(\eta \otimes 1_A) = 1_A$$
$$(\varepsilon \otimes 1_{{}^\vee\!A})(1_{{}^\vee\!A} \otimes \eta) = 1_{{}^\vee\!A} \quad .$$

On a bien sûr les propriétés analogues à celles énoncées à propos des duaux à droite; en particulier, le foncteur ${}^{\vee}\!A\otimes ?$ est adjoint à gauche au foncteur $A\otimes ?$, et le foncteur $?\otimes {}^{\vee}\!A$ est adjoint à droite au foncteur $?\otimes A$.

D'autre part il est clair que (B,e,h) est un dual à droite de A si et seulement si (A,e,h) est un dual à gauche de B.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale tressée, il revient au même de se donner un dual à droite ou un dual à gauche d'un objet A. En effet, (B,e,h) est un dual à droite de A si et seulement si (B,ε,η) est un dual à gauche de A, où $\varepsilon = e\, R_{B,A}$ et $\eta = (R_{A,B})^{-1}h$.

Une catégorie monoïdale est dite *autonome* lorsque tout objet admet un dual à droite et un dual à gauche.

Exemple. Soient k un anneau commutatif, et A, B deux k-algèbres non nécéssairement commutatives. On note $\mathsf{Bimod}_k(A,B)$ la catégorie des (A,B)-bimodules, qui s'identifie à $\mathsf{Mod}(A^o\otimes_k B)$. Étant donnée une troisième k-algèbre C, considérons le bifoncteur

$$\begin{aligned}\mathsf{Bimod}_k(A,B)\times\mathsf{Bimod}_k(B,C) &\longrightarrow \mathsf{Bimod}_k(A,C)\\ (M,M') &\longmapsto M\otimes_B M'\,.\end{aligned}$$

Les isomorphismes naturels $(M\otimes_B M')\otimes_C M''\simeq M\otimes_B(M'\otimes_C M'')$ et $M\otimes_B B\simeq M\simeq A\otimes_A M$ vérifient, *mutatis mutandis*, des propriétés analogues à celles que l'on requiert des contraintes d'associativité et d'unité dans une catégorie monoïdale.[1]

En particulier, $\mathsf{Bimod}_k(A,A)$ se voit ainsi doté d'une structure de catégorie monoïdale.

Quels sont les objets de $\mathsf{Bimod}_k(A,A)$ qui admettent un dual à gauche?

Plus généralement, appelons dual à gauche[2] d'un objet M de $\mathsf{Bimod}_k(A,B)$ un objet ${}^{\vee}\!M$ de $\mathsf{Bimod}_k(B,A)$ muni d'un morphisme $\varepsilon : {}^{\vee}\!M\otimes_A M\longrightarrow B$ dans $\mathsf{Bimod}_k(B,B)$ (l'évaluation) et d'un morphisme $\eta : A\longrightarrow M\otimes_B {}^{\vee}\!M$ dans $\mathsf{Bimod}_k(A,A)$ (la coévaluation), tels que l'on ait :

$$(1_M\otimes_B\varepsilon)(\eta\otimes_A 1_M) = 1_M \quad \textit{et} \quad (\varepsilon\otimes_B 1_{{}^{\vee}\!M})(1_{{}^{\vee}\!M}\otimes_A\eta) = 1_{{}^{\vee}\!M} \quad .$$

Supposons que M admette un tel dual $({}^{\vee}\!M,\varepsilon,\eta)$. Alors on a $\eta(1_A)=\sum_1^n x_i\otimes x^i$, avec $x_i\in M$ et $x^i\in {}^{\vee}\!M$. Les x_i définissent un morphisme de B-modules à droite $s : B^n\longrightarrow M$; d'autre part, chaque x^i définit un morphisme de B-modules à droite $\varepsilon(x^i\otimes_A ?)$ de M vers B, d'où $j : M\longrightarrow B^n$. On vérifie que $sj = 1_M$, donc M est facteur direct de B^n comme B-module à droite.

Réciproquement, supposons M projectif de type fini comme B-module. Posons ${}^{\vee}\!M = \mathsf{Hom}_B(M,B)$; ainsi, ${}^{\vee}\!M$ est naturellement muni d'une structure de (B,A)-bimodule. Soit $\varepsilon : {}^{\vee}\!M\otimes_A M\longrightarrow B$ le morphisme d'évaluation ordinaire; d'autre part, soit $\partial\in M\otimes_B {}^{\vee}\!M$ l'élément qui correspond à l'identité de M dans l'isomorphisme canonique $M\otimes_B {}^{\vee}\!M\simeq \mathsf{End}_B(M)$. Alors l'élément ∂ est central (c'est-à-dire qu'on a $\partial a = a\partial$ pour a dans A) et on définit la coévaluation $\eta : A\longrightarrow M\otimes_B {}^{\vee}\!M$ par $\eta(1_A)=\partial$. On vérifie que l'on obtient ainsi un dual à gauche de M.

En conclusion, un objet de $\mathsf{Bimod}_k(A,B)$ admet un dual à gauche si et seulement s'il est projectif de type fini comme B-module.

[1] Autrement dit, on a une 2-catégorie dont les objets sont les k-algèbres, les 1-flèches de A à B sont les objets de $\mathsf{Bimod}_k(B,A)$, et les 2-flèches sont les morphismes de bimodules.

[2] Il s'agit de la notion de dual à gauche d'une 1-flèche dans une 2-catégorie.

En particulier, la catégorie des k-modules est monoïdale symétrique, et les objets admettant un dual sont les modules projectifs de type fini.

Morphismes fonctoriels monoïdaux.

Soient $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ deux catégories monoïdales, et F, G deux foncteurs monoïdaux de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}'$. Un *morphisme fonctoriel monoïdal* $\varphi : F \longrightarrow G$ est un morphisme fonctoriel $\varphi_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ rendant commutatifs les diagrammes suivants, qui expriment la compatibilité de φ aux contraintes de F et G :

$$\begin{tikzcd} F(A)\otimes' F(B) \arrow[r, "\varphi_A\otimes'\varphi_B"] \arrow[d, "\simeq"'] & G(A)\otimes' G(B) \arrow[d, "\simeq"] \\ F(A\otimes B) \arrow[r, "\varphi_{A\otimes B}"] & G(A\otimes B) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(I) \arrow[rr, "\varphi_I"] & & G(I) \\ & I' \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd} .$$

Proposition 1.1. *Un morphisme fonctoriel monoïdal est un isomorphisme lorsque la catégorie de départ est autonome à droite (ou à gauche).*

Démonstration. Soient $\mathcal{C}$, C' deux catégories monoïdales, F, $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}'$ deux foncteurs monoïdaux, et $\varphi : F \longrightarrow G$ un morphisme fonctoriel monoïdal. Soit A un objet de $\mathcal{C}$ admettant un dual à droite $(A^\vee, e, h)$. Alors $F(A^\vee)$ est un dual à droite de $F(A)$, ce qui revient à dire que $F(A)$ est un dual à gauche de $F(A^\vee)$; de même $G(A)$ est un dual à gauche de $G(A^\vee)$. Ainsi le morphisme $\varphi_{A^\vee} : F(A^\vee) \longrightarrow G(A^\vee)$ induit par dualité à gauche un morphisme

$$^\vee(\varphi_{A^\vee}) : G(A) \longrightarrow F(A).$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ce morphisme est l'inverse de φ_A (autrement dit, que $\varphi_{A^\vee}$ et $(\varphi_A)^\vee$ sont inverses l'un de l'autre).□

2.—Catégories tensorielles

Définition. On appelle *catégorie monoïdale additive* une catégorie additive munie d'une structure de catégorie monoïdale de telle sorte que le produit tensoriel soit un bifoncteur bi-additif.

Si $\mathcal{T}$ est une catégorie monoïdale additive d'objet unité I, alors $\mathsf{End}(I)$ est un anneau commutatif, et pour tous A, B objets de $\mathcal{T}$, $\mathsf{Hom}(A, B)$ est muni d'une structure de $\mathsf{End}(I)$-bimodule. (Soient $\phi \in \mathsf{End}(I)$ et $f \in \mathsf{Hom}(A, B)$; on se ramène au cas où $\mathcal{T}$ est monoïdale stricte grâce au théorème de cohérence de MacLane; la structure de bimodule en question est alors donnée par $\phi \cdot f = \phi \otimes f$ et $f \cdot \phi = f \otimes \phi$).

Exemple. Soit B un anneau, et $\mathcal{T}$ la catégorie des (B, B)-bimodules. C'est une catégorie monoïdale additive pour laquelle $I = B$, et $\mathsf{End}(I)$ est le centre de B. Si M et M' sont deux objets de $\mathcal{T}$, les deux structures de $\mathsf{End}(I)$-module de $\mathsf{Hom}(M, M')$ ne coïncident généralement pas.

Définition. Une catégorie monoïdale additive $\mathcal{T}$ est une *catégorie de Penrose* si pour tous A, B objets de $\mathcal{T}$, les deux structures de $\mathsf{End}(I)$-module de $\mathsf{Hom}(A,B)$ coïncident; la catégorie sous-jacente est alors $\mathsf{End}(I)$-linéaire.

Remarque. Une catégorie monoïdale additive tressée est une catégorie de Penrose. (Cela résulte du fait que le tressage est fonctoriel et vérifie $R_{I,A} = R_{A,I} = 1_A$ via les isomorphismes fonctoriels $A \otimes I \simeq I \simeq I \otimes A$).

Définition. On appelle *catégorie tensorielle* une catégorie de Penrose dont la catégorie sous-jacente est abélienne.

Proposition 2.1. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle autonome. Alors*
1) pour tout objet A de $\mathcal{T}$, les foncteurs $A \otimes ?$ et $? \otimes A$ sont exacts;
2) les foncteurs $?^\vee$ et ${}^\vee ?$ sont quasi-inverses l'un de l'autre; ils sont donc pleinement fidèles et exacts.

Démonstration. 1) Soit A un objet de $\mathcal{T}$. Le foncteur $A \otimes ?$ admet un adjoint à droite (le foncteur $A^\vee \otimes ?$) et un adjoint à gauche (le foncteur ${}^\vee A \otimes ?$); il est donc exact. De même pour $? \otimes A$. 2) Supposons pour simplifier qu'on ait choisi un dual à droite et un dual à gauche pour chaque objet de $\mathcal{T}$. (On pourrait reformuler l'assertion 2) de telle sorte qu'elle ne dépende pas d'un tel choix.) On a des isomorphismes fonctoriels : $({}^\vee A)^\vee \simeq A \simeq {}^\vee(A^\vee)$, d'où l'assertion. □

Définition. Soit k un anneau commutatif. On appelle *catégorie k-tensorielle* une catégorie tensorielle munie d'un isomorphisme d'anneaux $\mathsf{End}(I) \simeq k$.

Foncteurs fibres et catégories tannakiennes.

Dans la suite de cette section, k est un corps commutatif.

Pour tout k-schéma S, soit $\mathsf{Qcoh}(S)$ la catégorie des faisceaux quasi-cohérents sur S, et $\mathsf{vect}(S)$ la sous-catégorie pleine des faisceaux localement libres de type fini sur S (ou, si l'on préfère, des fibrés vectoriels sur S). Notons que $\mathsf{Qcoh}(S)$ est une catégorie tensorielle symetrique, et $\mathsf{vect}(S)$ une catégorie de Penrose autonome symétrique. Dans les deux cas, l'anneau des endomorphismes de l'objet unité est $\mathsf{H}^0(\mathcal{O}_S)$.

Remarque. Dans la suite, on ne perdra rien à supposer que les k-schémas rencontrés sont affines, c'est à dire de la forme $S = \mathsf{Spec}\, B$, où B est une k-algèbre commutative; alors $\mathsf{H}^0(\mathcal{O}_S) = B$, la catégorie $\mathsf{Qcoh}(S)$ s'identifie à $\mathsf{Mod}(B)$, et $\mathsf{vect}(S)$, à la catégorie $\mathsf{proj}(B)$ des B-modules projectifs de type fini. Si K est une extension de k, on désignera aussi par $\mathsf{vect}(K)$ la catégorie $\mathsf{vect}(\mathsf{Spec}\, K)$ des K-espaces vectoriels de dimension finie.

Définition. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome et S un k-schéma. Un *foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur S* est un foncteur monoïdal k-linéaire exact à droite de $\mathcal{T}$ dans $\mathsf{Qcoh}(S)$.[3] Le foncteur fibre est dit *non trivial* si S est non vide.

Soit $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Qcoh}(S)$ un foncteur fibre. Pour tout objet A de $\mathcal{T}$, les faisceaux $\omega(A^\vee)$ et $\omega({}^\vee A)$ sont des duaux de $\omega(A)$; or, si V est un objet de $\mathsf{Qcoh}(S)$, il admet un dual si et seulement s'il est localement libre de type fini, et ce dual est alors $V^* = \mathsf{Hom}(V, \mathcal{O}_S)$ (cf. l'exemple de la section 1.). On a donc un isomorphisme fonctoriel $\omega(A) \simeq \omega(A^\vee)^*$; le

[3] Pour Deligne [2], la notion de foncteur fibre est plus restrictive : la catégorie $\mathcal{T}$ doit être symétrique, ainsi que le foncteur monoïdal.

foncteur $\omega(?^\vee)$ est exact à droite (2.1.), et à valeurs dans les faisceaux localement libres de type fini, donc $\omega(?^\vee)^*$ est exact à gauche, et ω est exact. On a donc :

Proposition 2.2. *Un foncteur fibre ω de $\mathcal{T}$ sur S est exact. Il est à valeurs dans $\mathsf{vect}(S)$. En outre il est muni d'isomorphismes fonctoriels $\omega(A^\vee) \simeq \omega({}^\vee\! A) \simeq \omega(A)^*$.* $\square$

Proposition 2.3. *Un foncteur fibre non trivial est fidèle.*

La démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Dans une catégorie tensorielle autonome $\mathcal{T}$, tout sous-objet de l'objet unité I en est facteur direct. En particulier si $\mathsf{End}(I)$ est un corps, l'objet I est simple.*

Démontrons ce lemme. Soit A un sous-objet de I, $Q = I/A$ et $B = Q^\vee$. On peut supposer d'une part que $\mathcal{T}$ est stricte, et d'autre part que $I^\vee = I$ (avec $e_I = h_I = 1_I$); alors B apparaît comme un sous-objet de I. On a donc deux suites exactes courtes :

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I \longrightarrow Q \longrightarrow 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \longrightarrow B \longrightarrow I \longrightarrow A^\vee \longrightarrow 0 \quad .$$

On va montrer : $I = A \oplus B$.

Dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A \otimes A^\vee \arrow[d, hook] \arrow[dl, "e_A"] \\
B \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & I \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & A^\vee \arrow[d, two heads] \\
Q \otimes B \arrow[r, hook] & Q \arrow[r, two heads] & Q \otimes A^\vee
\end{tikzcd}$$

obtenu en tensorisant ces deux suites exactes, lignes et colonnes sont des suites exactes; la commutativité des triangles adjacents à la flèche oblique, qui se déduit facilement de la définition de la dualité, entraîne que $A \otimes B$ est nul. Par conséquent le morphisme $A \oplus B \longrightarrow I$ est un monomorphisme.

Un raisonnement analogue sur le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
B \otimes A \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & A \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & A^\vee \otimes A \arrow[d, hook] \\
B \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & I \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] \arrow[ur, "h_A"] & A^\vee \arrow[d, two heads] \\
B \otimes Q \arrow[r, hook] & Q \arrow[r, two heads] & A^\vee \otimes Q
\end{tikzcd}$$

montre que $A^\vee \otimes Q$ est nul; le morphisme $A \oplus B \longrightarrow I$ est donc aussi un épimorphisme, d'où le lemme. $\square$

Démontrons maintenant la proposition 2.3.

Soit $\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Qcoh}(S)$ un foncteur fibre non trivial. C'est un foncteur exact entre catégories abéliennes; pour qu'il soit fidèle, il suffit que l'image d'un objet non nul soit non nulle. Soit A un objet non nul de $\mathcal{T}$. On a $(e_A \otimes 1_A)(1_A \otimes h_A) = 1_A \neq 0$, donc $e_A : A \otimes A^\vee \longrightarrow I$ est un morphisme non nul; c'est donc un épimorphisme d'après le lemme. Comme ω est exact, on a un épimorphisme de $\omega(A) \otimes \omega(A^\vee)$ sur $\mathcal{O}_S$, et $\omega(A)$ est non nul si S est non vide. □

Remarques.

1) Soit $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle, et $\mathcal{T}_0$ la sous-catégorie pleine dont les objets sont les multiples de I; elle est équivalente à la catégorie $\mathsf{vect}(k)$ des k-espaces vectoriels de dimension finie. Du lemme 2.4. résulte que si $\mathcal{T}$ est autonome, alors $\mathcal{T}_0$ est stable par sous-quotients.

En effet, il suffit de voir que si I est un objet simple d'une catégorie abélienne $\mathcal{A}$, la sous-catégorie pleine $\mathcal{A}_0$ de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les multiples de I est stable par sous-quotients. Soit A un sous-objet de I^n dans $\mathcal{A}$, et montrons que A est isomorphe à un certain I^p. On peut supposer que n est le plus petit entier tel qu'il existe un monomorphisme de A dans I^n. Soit π l'une des n projections canoniques de I^n sur I^{n-1}, et q la restriction de π à A. Par choix de n, q n'est pas un monomorphisme; $\mathsf{Ker}(q)$ est un sous-objet de $\mathsf{Ker}(\pi) = I$, donc il est égal à $\mathsf{Ker}(\pi)$ car I est simple. Ainsi, A contient chacun des facteurs de I^n, et donc $A = I^n$. D'où la stabilité de $\mathcal{A}_0$ par sous-objets; le même raisonnement dans la catégorie $\mathcal{A}^o$ montre que $\mathcal{A}_0$ est stable par sous-quotients.

2) Soient $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome, et ω un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur un k-schéma S. Soit $p : T \longrightarrow S$ un morphisme de schémas. Alors le changement de base définit un foncteur fibre $p^*\omega : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Qcoh}(T)$ de $\mathcal{T}$ sur T. En particulier, si p est un point de S à valeurs dans une extension K de k, alors $p^*\omega$ est un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}\, K$. Ainsi, si $\mathcal{T}$ admet un foncteur fibre non trivial, elle en admet un à valeurs dans $\mathsf{vect}(K)$, pour une certaine extension K de k.

Définition. Une catégorie k-linéaire $\mathcal{A}$ est dite *localement de type fini (sur k)* si
 a) tout objet X de $\mathcal{A}$ est de longueur finie,
 b) pour tous X, Y objets de $\mathcal{A}$, $\mathsf{Hom}(X, Y)$ est de dimension finie sur le corps k.

Proposition 2.5. *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome.*
 (i) Si $\mathcal{T}$ admet un foncteur fibre non trivial, $\mathcal{T}$ est localement de type fini sur k.
 (ii) Soit ω un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur le spectre d'une k-algèbre commutative B, et X, Y des objets de $\mathcal{T}$. Alors le morphisme naturel $\mathsf{Hom}(X, Y) \otimes_k B \longrightarrow \mathsf{Hom}_B(\omega(X), \omega(Y))$ est injectif.

Démonstration. (ii) Soit $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille libre dans $\mathsf{Hom}(X, Y)$; il s'agit de montrer que la famille $(\omega(f_1), \ldots, \omega(f_n))$ est libre sur B, autrement dit, que le morphisme de B-modules $\Phi : B^n \longrightarrow \mathsf{Hom}_B(\omega(X), \omega(Y))$ qu'elle induit est injectif.

Via l'isomorphisme $\mathsf{Hom}(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}(I, X^\vee \otimes Y)$, la famille des f_i définit un morphisme $\phi : I^n \longrightarrow X^\vee \otimes Y$. Si le noyau de ϕ était non nul, les f_i seraient liés, d'après la remarque 1). Ainsi ϕ est un monomorphisme, de même que $\omega(\phi) : B^n \hookrightarrow \omega(X^\vee \otimes Y)$ par l'exactitude de ω. Le morphisme Φ, composé de $\omega(\phi)$ avec l'isomorphisme $\omega(X^\vee \otimes Y) \simeq \mathsf{Hom}_B(\omega(X), \omega(Y))$, est donc bien injectif.

(i) D'après la remarque 2), on peut trouver un foncteur fibre ω de $\mathcal{T}$ à valeurs dans $\mathsf{vect}(K)$, où K est une extension de k. On a $\dim_k \mathsf{Hom}(X, Y) \leq \dim_K \omega(X)\ \dim_K \omega(Y)$

d'après (ii), d'où la condition b). De même, la longueur de X est majorée par $\mathsf{dim}_K(\omega(X))$, car ω est fidèle exact, d'où la condition a). $\square$

Morphismes de foncteurs fibres

Soient $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome et ω_1, ω_2 deux foncteurs fibres de $\mathcal{T}$ sur un même k-schéma S.

Définition. On appelle *morphisme (de foncteurs fibres) de* ω_1 *vers* ω_2 tout morphisme fonctoriel monoïdal de ω_1 vers ω_2.

Un tel morphisme est toujours un isomorphisme, en vertu de la proposition 1.1.

3.—Cogébroïdes

Soient k un anneau commutatif et B une k-algèbre non nécéssairement commutative. Rappelons que $\mathsf{Bimod}_k(B,B)$ est la catégorie des (B,B)-bimodules dont les structures de k-module à droite et à gauche coïncident.

Définition. On appelle *k-cogébroïde de base B* (ou simplement *cogébroïde de base B* si $k=\mathbb{Z}$) la donnée dans $\mathsf{Bimod}_k(B,B)$ d'un objet L et de deux morphismes

$$\Delta : L \longrightarrow L \otimes_B L$$
$$\varepsilon : L \longrightarrow B$$

de telle sorte que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & L \otimes_B L \arrow[d, "1_L \otimes \Delta"] \\ L \otimes_B L \arrow[r, "\Delta \otimes 1_L"'] & L \otimes_B L \otimes_B L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \otimes_B L & L \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\Delta"'] & L \otimes_B B \\ & L \otimes_B L \arrow[ul, "\varepsilon \otimes 1_L"] \arrow[ur, "1_L \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd} .$$

Le morphisme Δ est appelé *comultiplication* ou *coproduit*; le premier diagramme exprime la *coassociativité* du coproduit, le second traduit le fait que ε est une *coünité*.

Si L et L' sont deux k-cogébroïdes de base B, un morphisme de k-cogebroïdes de L vers L' est un morphisme de $\mathsf{Bimod}_k(B,B)$ compatible aux coproduits et aux coünités. On définit ainsi la catégorie $\mathsf{Cog}_k(B)$ des k-cogébroïdes de base B.

Les limites inductives existent dans $\mathsf{Cog}_k(B)$, et le foncteur oubli de $\mathsf{Cog}_k(B)$ vers $\mathsf{Bimod}_k(B,B)$ commute aux limites inductives.

Soit f un morphisme de k-algèbres de B vers B'; si L est un k-cogèbroïde de base B, $L' = B' \otimes_B L \otimes_B B'$ est naturellement muni d'une structure de k-cogébroïde de base B'. Ainsi, f induit par *changement de base* un foncteur $f_* : \mathsf{Cog}_k(B) \longrightarrow \mathsf{Cog}_k(B')$.

Remarque. Un k-cogébroïde de base k n'est autre qu'une k-cogèbre.

Définition. Soit L un k-cogébroïde de base B. Un *L-comodule à droite* est un B-module à droite V muni d'un morphisme de B-modules à droite

$$\delta : V \longrightarrow V \otimes_B L$$

tel que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & V \otimes_B L \arrow[d, "1_V \otimes \Delta"] \\ V \otimes_B L \arrow[r, "\delta \otimes 1_L"'] & V \otimes_B L \otimes_B L \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\delta"'] & V \otimes_B B \\ V \otimes_B L \arrow[ur, "1_V \otimes \varepsilon"'] & \end{tikzcd} .$$

Ces diagrammes expriment le fait que δ est une *coaction à droite de L sur V*. On imagine la définition d'un *L-comodule à gauche*.

Les L-comodules à droite constituent une catégorie, que l'on notera $\mathsf{Comod}(B : L)$, dont les morphismes sont les morphismes de B-modules qui sont compatibles aux coactions. On a donc un *foncteur oubli*

$$U : \mathsf{Comod}(B : L) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B).$$

On notera $\mathsf{comod}(B : L)$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Comod}(B : L)$ des L-comodules dont le B-module sous-jacent est de type fini.

Proposition 3.1.

a) Dans la catégorie $\mathsf{Comod}(B : L)$, les limites inductives (et en particulier les conoyaux) existent. Le foncteur oubli U est fidèle, conservatif et commute aux limites inductives.

b) Si L est plat comme B-module à gauche, $\mathsf{Comod}(B : L)$ est abélienne, et le foncteur oubli U est exact.

Démonstration.

a) Il est clair que U est fidèle et conservatif (ce qui signifie qu'un morphisme dont l'image par U est un isomorphisme, est un isomorphisme). Si (V_i) est un système inductif de L-comodules à droite, la limite inductive des $U(V_i)$ est naturellement munie d'une coaction à droite de L qui en fait une limite inductive des V_i. (Il n'en va généralement pas de même des systèmes projectifs.)

b) Supposons L plat comme B-module à gauche. Par a), il suffit de vérifier que les noyaux existent dans $\mathsf{Comod}(B : L)$, et que U commute à leur formation. Soit $f : V \longrightarrow V'$ un morphisme de $\mathsf{Comod}(B : L)$. Soit N le noyau de $U(f)$. Il résulte de l'hypothèse de platitude que le morphisme $N \otimes_B L \longrightarrow U(V) \otimes_B L$ est le noyau de $U(f) \otimes_B 1_L$ et que $N \otimes_B L \otimes_B L \longrightarrow U(V) \otimes_B L \otimes_B L$ est injectif; on peut en déduire sur N une structure de L-comodule à droite qui en fait un noyau de f. $\square$

Remarque. Le foncteur U admet pour adjoint à droite le foncteur H de $\mathsf{Mod}(B)$ vers $\mathsf{Comod}(B : L)$ qui au B-module N associe le L-comodule $(N \otimes_B L, 1_N \otimes_B \Delta)$. En effet, soient N un B-module à droite et V un L-comodule à droite, de coaction δ. L'application $f \mapsto g = (f \otimes_B 1_L)\delta$ est une bijection de $\mathsf{Hom}_B(U(V), N)$ vers $\mathsf{Hom}_{\mathsf{Comod}(B:L)}(V, H(N))$, dont l'inverse est donné par $g \mapsto (1_N \otimes_B \varepsilon)g$.

Un morphisme $f : L' \longrightarrow L$ de k-cogébroides de base B induit un foncteur

$$\begin{aligned} f_* : \mathsf{Comod}(B : L') &\longrightarrow \mathsf{Comod}(B : L) \\ (V, \delta) &\longmapsto (V, (1_V \otimes_B f)\delta) \quad . \end{aligned}$$

Proposition 3.2. *Soit $i : L' \longrightarrow L$ un morphisme de k-cogébroïdes de base B. On suppose que i est injectif, et que L et $L/i(L')$ sont plats comme B-modules à gauche.*

Alors le foncteur $i_* : \mathsf{Comod}(B : L') \longrightarrow \mathsf{Comod}(B : L)$ est pleinement fidèle, exact, et identifie $\mathsf{Comod}(B : L')$ à la sous-catégorie strictement pleine[4] *$\mathcal{C}$ de $\mathsf{Comod}(B : L)$ des L-comodules à droite V dont la coaction $\delta : V \longrightarrow V \otimes_B L$ est à valeurs dans l'image de l'application $1_V \otimes_B i : V \otimes_B L' \hookrightarrow V \otimes_B L$. En outre, la sous-catégorie abélienne $\mathcal{C}$ est stable par sous-quotients.*

Démonstration. Il résulte des hypothèses que L' est lui aussi plat à gauche sur B. Utilisant la proposition 3.1, on voit que $\mathsf{Comod}(B : L')$ est abélienne, et que le foncteur $i_* : \mathsf{Comod}(B : L') \longrightarrow \mathsf{Comod}(B : L)$ est fidèle et exact.

L'image de i_* étant clairement contenue dans $\mathcal{C}$, vérifions l'inclusion inverse. Quitte à remplacer L' par son image par i, on peut supposer que i est une inclusion. Soit V un objet de $\mathcal{C}$. Par injectivité de l'application $j : V \otimes_B L' \longrightarrow V \otimes_B L$, la coaction de V se remonte de façon unique en une application $\delta' : V \longrightarrow V \otimes_B L'$; grâce à l'injectivité de l'application $V \otimes_B L' \otimes_B L' \longrightarrow V \otimes_B L \otimes_B L$, δ' est une coaction de L' sur V, de sorte que V est naturellement muni d'une structure de L'-comodule à droite. Tout morphisme $V' \longrightarrow V$ de $\mathcal{C}$ est aussi un morphisme de L'-comodules à droite, en vertu de l'injectivité de j.

Enfin, $\mathcal{C}$ est manifestement stable par quotients; l'inclusion de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{Comod}(B : L)$ étant exacte, $\mathcal{C}$ est aussi stable par sous-objets. □

Proposition 3.3. *Soit L un k-cogébroïde de base B, et supposons L projectif en tant que B-module à gauche. Alors tout L-comodule à droite est limite inductive filtrante de ses sous-comodules qui sont de type fini comme B-modules.*

Démonstration. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme. *Soit A un anneau, M un A-module à gauche projectif, et N un A-module à droite. Alors pour tout élément f de $N \otimes_A M$, il existe un plus petit sous-module N_0 de N vérifiant $f \in N_0 \otimes_A M$. Ce sous-module est de type fini.*

Démonstration du lemme. Traîtons tout d'abord le cas où M est un module libre : $M = A^{(I)}$. Alors $N \otimes_A M \simeq N^{(I)}$ et f s'identifie à une famille presque nulle $(f_i)_{i \in I}$ d'éléments de N ; le sous-module N_0 de N engendré par les f_i convient. Dans le cas général, M est facteur direct d'un A-module libre M' ; considérons f comme un élément de $N \otimes_A M'$; le plus petit sous-module N_0 de N tel que $N_0 \otimes_A M'$ contienne f convient. □

Revenons à la démonstration de la proposition. Notons que par la proposition 3.1, la catégorie $\mathsf{Comod}(B : L)$ est abélienne, et le foncteur oubli U est exact.

Soit V un L-comodule à droite, et u un élément de V. Le lemme nous assure de l'existence d'un plus petit sous-module V_0 de V tel que $V_0 \otimes_B L$ contienne l'image de

[4] Une sous-catégorie strictement pleine est une sous-catégorie pleine stable par isomorphie.

u par la coaction δ. Montrons que V_0 est un sous-comodule de V contenant u, ce qui achèvera la démonstration.

On a : $\delta\, u \in V_0 \otimes_B L$, donc $u = (1_V \otimes_B \varepsilon)(\delta\,(u)) \in V_0$. D'autre part, $(\delta \otimes_B 1_L)\delta\, u = (1_V \otimes_B \Delta)\delta\, u \in V_0 \otimes_B L \otimes_B L$. Ainsi, $\delta\, u \in (\delta \otimes_B 1_L)^{-1}(V_0 \otimes_B L \otimes_B L) = \delta^{-1}(V_0 \otimes_B L) \otimes_B L$ (car L est plat à gauche sur B). D'où, par définition de V_0, $V_0 \subset \delta^{-1}(V_0 \otimes_B L)$, ce qui revient à : $\delta\, V_0 \subset V_0 \otimes_B L$; autrement dit, V_0 est un sous-comodule de V. $\square$

Cogébroïde opposé, produit tensoriel de cogébroïdes.

Si (L, Δ, ε) est un k-cogébroïde de base B, l'objet de $\mathsf{Bimod}_k(B^o, B^o)$ canoniquement associé à L est muni d'une structure naturelle de k-cogébroïde de base B^o qu'on appelle le *k-cogébroïde opposé à L* et qu'on note L^o; il a pour coünité ε, et pour coproduit $\Delta^o = \sigma \circ \Delta$, où σ est l'isomorphisme $(L \otimes_B L)^o \simeq L^o \otimes_{B^o} L^o$ défini par $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$.

Remarques.

1) Se donner un L-comodule à gauche revient à se donner un L^o-comodule à droite.

2) Soit V un L-comodule à droite, et supposons V projectif de type fini comme B-module. Soit ${}^{\vee}V = \mathsf{Hom}_B(V, B)$: si l'on considère V comme un (k, B)-bimodule, ${}^{\vee}V$ n'est autre que le dual à gauche de V tel qu'il est défini dans l'exemple de la section 1. Alors ${}^{\vee}V$ est naturellement muni d'une structure de L-comodule à gauche, ou, si l'on préfère, de L^o-comodule à droite, la coaction de L étant la composée des morphismes

$$ {}^{\vee}V \xrightarrow{1 \otimes \eta_V} {}^{\vee}V \otimes_k V \otimes_B {}^{\vee}V \xrightarrow{1 \otimes \delta \otimes 1} {}^{\vee}V \otimes_k V \otimes_B L \otimes_B {}^{\vee}V \xrightarrow{\varepsilon_V \otimes 1 \otimes 1} L \otimes_B {}^{\vee}V $$

(où ε_V et η_V sont l'évaluation et la coévaluation).

De même, si (L, Δ, ε) et $(L', \Delta', \varepsilon')$ sont deux k-cogébroïdes de bases respectives B et B', alors $L \otimes_k L'$ est naturellement muni d'une structure de k-cogébroïde de base $B \otimes_k B'$, qu'on appelle *produit tensoriel sur k de L et L'* : la coünité est $\varepsilon \otimes_k \varepsilon'$ et la comultiplication est la composée de $\Delta \otimes_k \Delta'$ et de l'isomorphisme canonique $(L \otimes_B L) \otimes_k (L' \otimes_{B'} L') \simeq (L \otimes_k L') \otimes_{B \otimes_k B'} (L \otimes_k L')$ qui échange les deux facteurs du milieu.

Remarque. Soient V un L-comodule à droite, et V' un L'-comodule à droite. Alors $V \otimes_k V'$ est naturellement muni d'une structure de $L \otimes_k L'$-comodule à droite.

Un (L, L')-*bicomodule* est un objet V de $\mathsf{Bimod}_k(B, B')$ muni d'une coaction de L à gauche $\delta : V \longrightarrow L \otimes_B V$ et d'une coaction de L' à droite $\delta' : V \longrightarrow V \otimes_{B'} L'$ qui sont des morphismes de $\mathsf{Bimod}_k(B, B')$, avec la condition de compatibilité :

$$ (1_L \otimes_B \delta')\delta = (\delta \otimes_{B'} 1_{L'})\delta' . $$

La donnée d'un (L, L')-bicomodule équivaut à celle d'un $L^o \otimes_k L'$-comodule à droite.

En particulier, tout k-cogébroïde L de base B est naturellement muni d'une structure de $L^o \otimes_k L$-comodule à droite.

Une application du théorème de Barr-Beck.

Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, et $\mathsf{End}(\mathcal{C})$ la catégorie des endofoncteurs de $\mathcal{C}$. Munie de la composition des foncteurs, c'est une catégorie monoïdale stricte d'objet unité le foncteur identité. Dans cette catégorie, un dual à droite (resp. à gauche) n'est autre qu'un adjoint à droite (resp. à gauche).

Une *comonade de* $\mathcal{C}$ est un monoïde dans la catégorie $\mathsf{End}(\mathcal{C})^o$. Autrement dit, c'est un foncteur $\Lambda : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ muni de morphismes fonctoriels

$$\Delta : \Lambda \longrightarrow \Lambda \circ \Lambda$$
$$\varepsilon : \Lambda \longrightarrow 1_{\mathcal{C}}$$

de telle sorte que les diagrammes suivants soient commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \Lambda \circ \Lambda \arrow[d, "1_\Lambda \circ \Delta"] \\
\Lambda \circ \Lambda \arrow[r, "\Delta \circ 1_\Lambda"'] & \Lambda \circ \Lambda \circ \Lambda
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1_{\mathcal{C}} \circ \Lambda & \Lambda \arrow[l, "="'] \arrow[r, "="] \arrow[d, "\Delta"'] & \Lambda \circ 1_{\mathcal{C}} \\
 & \Lambda \circ \Lambda \arrow[ul, "\varepsilon \circ 1_\Lambda"] \arrow[ur, "1_\Lambda \circ \varepsilon"'] &
\end{tikzcd} .$$

Soit X un objet de $\mathcal{C}$. Une *coaction de* Λ *sur* X est un morphisme $\delta : X \longrightarrow \Lambda(X)$ tel que les diagrammes suivants commutent :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & \Lambda(X) \arrow[d, "\Delta(X)"] \\
\Lambda(X) \arrow[r, "\Lambda(\delta)"'] & \Lambda \circ \Lambda(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "="] \arrow[d, "\delta"'] & X \\
\Lambda(X) \arrow[ur, "\varepsilon(X)"'] &
\end{tikzcd} .$$

Exemple. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux catégories, et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ un foncteur admettant un adjoint à droite G. Notons $\varepsilon : F \circ G \longrightarrow 1_{\mathcal{B}}$ et $\eta : 1_{\mathcal{A}} \longrightarrow G \circ F$ les flèches d'adjonction.

Soient $\Lambda = F \circ G : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ et $\Delta = F\eta G : \Lambda \longrightarrow \Lambda \circ \Lambda$. Alors $(\Lambda, \Delta, \varepsilon)$ est une comonade de $\mathcal{B}$. En outre $\delta = F\eta : F \longrightarrow \Lambda \circ F$ définit fonctoriellement pour chaque objet X de $\mathcal{A}$ une coaction $\delta(X)$ de Λ sur $F(X)$.

Soit $\mathcal{B}_\Lambda$ la catégorie des objets de $\mathcal{B}$ munis d'une coaction de Λ (avec morphismes compatibles aux coactions). Alors la coaction fonctorielle δ de Λ sur F correspond à un foncteur

$$\widetilde{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}_\Lambda \quad .$$

Théorème 3.4.(Barr-Beck). *Dans la situation de l'exemple, supposons que le foncteur F vérifie les deux conditions suivantes :*

(i) Si l'image par F d'une double flèche de $\mathcal{A}$ admet un noyau, alors cette double flèche admet un noyau et l'image de ce noyau est le noyau de l'image de la double flèche;

(ii) Soient (f, g) une double flèche de $\mathcal{A}$ de source X et u un morphisme de $\mathcal{A}$ de but X tel que $fu = gu$. Si $F(u)$ est un noyau de $(F(f), F(g))$ alors u est un noyau de (f, g).

Alors $\widetilde{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}_\Lambda$ est une équivalence de catégories. $\square$

Pour la démonstration, voir [7], VI, 7. L'application que nous avons en vue est la suivante. Soient A, B deux anneaux, $\mathcal{A} = \mathsf{Mod}(A)$ et $\mathcal{B} = \mathsf{Mod}(B)$. Tout (A, B)-bimodule M définit un foncteur exact à droite

$$\begin{aligned} F : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{B} \\ E &\longmapsto E \otimes_A M \end{aligned}$$

d'où un foncteur pleinement fidèle

$$\begin{aligned} \mathsf{Mod}(A^o \otimes B) &\longrightarrow \mathsf{Hom}(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \\ M &\longmapsto ? \otimes_A M \end{aligned}$$

qui admet la retraction $F \longrightarrow F(A)$.

Dans le cas $A = B$, si $\Lambda : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ est le foncteur $? \otimes_B L$, la donnée d'une structure de comonade sur Λ équivaut à la donnée d'une structure de cogébroïde de base B sur L. Alors la catégorie $\mathcal{B}_\Lambda$ n'est autre que $\mathsf{Comod}(B : L)$.

Soient à présent M un (A, B)-bimodule, projectif de type fini en tant que B-module, et F le foncteur $? \otimes_A M$ de $\mathsf{Mod}(A)$ dans $\mathsf{Mod}(B)$. Considérons le (B, A)-bimodule ${}^\vee M$, muni des morphismes $\varepsilon : {}^\vee M \otimes_A M \longrightarrow B$ et $\eta : A \longrightarrow M \otimes_B {}^\vee M$ introduits dans l'exemple de la section 1. Alors le foncteur $G = ? \otimes_B {}^\vee M : \mathsf{Mod}(B) \longrightarrow \mathsf{Mod}(A)$ est adjoint à droite à F. La structure de comonade sur $\Lambda = F \circ G$ qui s'en déduit correspond à une structure de cogébroïde de base B sur ${}^\vee M \otimes_A M$ donnée par la comultiplication

$$\begin{aligned} \Delta : {}^\vee M \otimes_A M &\longrightarrow {}^\vee M \otimes_A M \otimes_B {}^\vee M \otimes_A M \\ \lambda \otimes x &\longmapsto \lambda \otimes \eta(1_A) \otimes x \end{aligned}$$

la coünité étant ε.

Pour tout A-module à droite E, $E \otimes_A M$ est naturellement muni d'une structure de ${}^\vee M \otimes_A M$-comodule à droite donnée par

$$\begin{aligned} \delta : E \otimes_A M &\longrightarrow E \otimes_A M \otimes_B {}^\vee M \otimes_A M \\ e \otimes x &\longmapsto e \otimes \eta(1_A) \otimes x \quad . \end{aligned}$$

On a alors

Proposition 3.5. *Soit M un (A, B)-bimodule projectif de type fini sur B et fidèlement plat sur A.*

Alors le foncteur

$$\widetilde{F} : \mathsf{Mod}(A) \longrightarrow \mathsf{Comod}(B : {}^\vee M \otimes_A M)$$

est une équivalence de catégories; en outre il induit une équivalence de catégories entre $\mathsf{mod}(A)$ *et* $\mathsf{comod}(B : {}^\vee M \otimes_A M)$.

Démonstration. La première assertion de la proposition est la traduction du théorème de Barr-Beck (3.4.); la seconde résulte de la proposition suivante, qui nous sera utile par ailleurs.

Proposition 3.6. *Soit M un (A,B)-bimodule fidèlement plat sur A et de type fini sur B. Soit E un A-module à droite. Si $E \otimes_A M$ est un B-module de type fini (resp. de présentation finie), alors E est un A-module de type fini (resp. de présentation finie).*

Démonstration. Supposons $E \otimes_A M$ de type fini sur B ; alors il existe un sous-module de type fini $E_1 \subset E$ tel que $E_1 \otimes_A M \hookrightarrow E \otimes_A M$ soit un isomorphisme; posons $Q = E/E_1$, de sorte qu'on a une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow E_1 \longrightarrow E \longrightarrow Q \longrightarrow 0 .$$

Comme $E_1 \otimes_A M \longrightarrow E \otimes_A M$ est surjectif, on a $Q \otimes_A M = 0$, d'où $Q = 0$ et $E = E_1$, et E est de type fini.

Si en outre $E \otimes_A M$ est de présentation finie, considérons un épimorphisme $A^n \longrightarrow E$, de noyau N. Alors $N \otimes_A M$ est le noyau de $M^n \longrightarrow E \otimes_A M$; il est donc de type fini; par conséquent N est de type fini. □

Nous aurons besoin dans la section 8 d'une autre application du théorème de Barr-Beck : la descente fidèlement plate des comodules.

Propositon 3.7. *Soit $f : B \longrightarrow B'$ un morphisme d'anneaux. On suppose que B' est fidèlement plat à gauche sur B. Soit L un cogébroïde de base B, plat à gauche sur B, et L' le cogébroïde de base B' qui s'en déduit par changement de base. Alors le foncteur naturel*

$$\begin{gathered} \mathsf{Comod}(B : L) \longrightarrow \mathsf{Comod}(B' : L') \\ (V, \delta) \mapsto (V \otimes_B B', \delta \otimes_B 1_{B'}) \end{gathered}$$

est une équivalence de catégories. En outre, il induit une équivalence de catégories de $\mathsf{comod}(B : L)$ *vers* $\mathsf{comod}(B' : L')$.

Démonstration. Le foncteur $P = ? \otimes_B B' : \mathsf{Mod}(B) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B')$ est fidèle exact, et admet pour adjoint à droite le foncteur $Q : \mathsf{Mod}(B') \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ qui associe à un B'-module le B-module sous-jacent.

D'autre part, d'après (3.1.) et la remarque qui le suit, la catégorie $\mathsf{Comod}(B : L)$ est abélienne et le foncteur oubli $U : \mathsf{Comod}(B : L) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ est fidèle, exact, et admet pour adjoint à droite le foncteur $H : \mathsf{Mod}(B') \longrightarrow \mathsf{Comod}(B : L)$ qui à tout B-module à droite N associe le L-comodule $(N \otimes_B L, 1_N \otimes_B \Delta)$.

Par conséquent, le foncteur $F = P \circ U : \mathsf{Comod}(B : L) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B')$ est fidèle exact, et admet l'adjoint à droite $G = H \circ Q$. Nous pouvons donc lui appliquer le théorème de Barr-Beck. On a $F \circ G(N) = N \otimes_{B'} (B' \otimes_B L \otimes_B B')$, donc la structure de comonade de $F \circ G$ correspond à une structure de cogébroïde de base B' sur $B' \otimes_B L \otimes_B B'$, qui n'est autre que L'. D'où l'équivalence de catégories $\widetilde{F} : \mathsf{Comod}(B : L) \longrightarrow \mathsf{Comod}(B' : L')$. La seconde assertion résulte de la proposition 3.7. □

4.—Cogébroïde associé à un foncteur

Soit k un anneau commutatif. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie essentiellement petite, B_1, B_2 deux k-algèbres et F_1, F_2 deux foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}(B_1)$ et $\mathsf{proj}(B_2)$ respectivement.

Soit $\underline{L}_k(F_1, F_2)$ le foncteur

$$\begin{gathered}\mathsf{Bimod}_k(B_1, B_2) \longrightarrow \mathcal{E}ns \\ M \longmapsto \{\text{morphismes fonctoriels } B_2\text{-linéaires :} \quad F_2 \longrightarrow F_1 \otimes_{B_1} M\}\,.\end{gathered}$$

Proposition 4.1. *Le foncteur* $\underline{L}_k(F_1, F_2)$ *est représentable.*

On notera $L_k(F_1, F_2)$ l'objet de $\mathsf{Bimod}_k(B_1, B_2)$ qui représente ce foncteur, et λ_0 le morphisme fonctoriel B_2-linéaire universel $F_2 \longrightarrow F_1 \otimes_{B_1} L_k(F_1, F_2)$ dont il est muni.

Démonstration. Précisons la propriété universelle satisfaite par $L_k(F_1, F_2)$ et λ_0 : soit M un objet de $\mathsf{Bimod}_k(B_1, B_2)$ et λ un morphisme fonctoriel B_2-linéaire de F_2 vers $F_1 \otimes_{B_1} M$; alors il existe un morphisme de (B_1, B_2)-bimodules unique ϕ de $L_k(F_1, F_2)$ vers M tel qu'on ait $\lambda = (1_{F_1} \otimes_{B_1} \phi)\lambda_0$.

Construisons à présent $L_k(F_1, F_2)$ et λ_0.

Si B est un anneau et N un objet de $\mathsf{proj}(B)$, on note ${}^{\vee}N$ le B-module à gauche $\mathsf{Hom}_B(N, B)$.

On peut supposer $\mathcal{C}$ petite. Posons alors $L_0 = \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{C})} {}^{\vee}F_1(X) \otimes_k F_2(X)$. Pour tout morphisme f de $\mathcal{C}$, de source X et de but Y, on forme le diagramme :

$$(\mathcal{D}_f) \qquad \begin{array}{ccc} {}^{\vee}F_1(Y) \otimes_k F_2(X) & \xrightarrow{{}^{\vee}F_1(f)\otimes 1} & {}^{\vee}F_1(X) \otimes_k F_2(X) \\ {\scriptstyle 1\otimes F_2(f)}\big\downarrow & & \big\downarrow \\ {}^{\vee}F_1(Y) \otimes_k F_2(Y) & \longrightarrow & L_0 \end{array}$$

et $L_k(F_1, F_2)$ est le quotient de L_0 qui rend les diagrammes $\mathcal{D}_f$ commutatifs.

Soient X un objet de $\mathcal{C}$, $\eta : k \longrightarrow F_1(X) \otimes_{B_1} {}^{\vee}F_1(X)$ le morphisme de coévaluation, et notons π le morphisme de passage au quotient $L^0 \longrightarrow L_k(F_1, F_2)$. Alors $\lambda_0(X)$ est la composée de

$$F_2(X) \xrightarrow{\eta\otimes 1} F_1(X) \otimes_{B_1} {}^{\vee}F_1(X) \otimes_k F_2(X) \xrightarrow{1\otimes\pi} F_1(X) \otimes_{B_1} L_k(F_1, F_2)\,,$$

les relations définissant $L_k(F_1, F_2)$ étant exactement ce qu'il faut pour assurer la fonctorialité de λ_0 en X. □

Comultiplication—Coünité

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie (essentiellement petite), et supposons donnés des k-algèbres B_i, et des foncteurs $F_i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}(B_i)$.

De la propriété universelle se déduit un morphisme de $\mathsf{Bimod}_k(B_1, B_3)$

$$\Delta(F_1, F_2, F_3) : L_k(F_1, F_3) \longrightarrow L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_2} L_k(F_2, F_3)$$

appelé *comultiplication* ou *coproduit*. La comultiplication est *coassociative*, autrement dit, elle rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
L_k(F_1, F_4) \arrow[r, "\Delta(F_1,F_3,F_4)"] \arrow[d, "\Delta(F_1,F_2,F_4)"'] & L_k(F_1, F_3) \otimes_{B_3} L_k(F_3, F_4) \arrow[d, "\Delta(F_1,F_2,F_3)\otimes 1"] \\
L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_2} L_k(F_2, F_4) \arrow[r, "1 \otimes \Delta(F_2,F_3,F_4)"'] & L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_2} L_k(F_2, F_3) \otimes_{B_3} L_k(F_3, F_4)
\end{tikzcd}$$

De même, pour toute k-algèbre B et tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}(B)$, on a par la propriété universelle un morphisme de $\mathsf{Bimod}_k(B, B)$

$$\varepsilon(F) : L_k(F, F) \longrightarrow B$$

appelé *coünité*, car il rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
B_1 \otimes_{B_1} L_k(F_1, F_2) & L_k(F_1, F_2) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "\simeq"] \arrow[dl, "\Delta(F_1,F_1,F_2)"'] \arrow[dr, "\Delta(F_1,F_2,F_2)"] & L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_2} B_2 \\
L_k(F_1, F_1) \otimes_{B_1} L_k(F_1, F_2) \arrow[u, "\varepsilon(F_1)\otimes 1"] & & L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_2} L_k(F_2, F_2) \arrow[u, "1 \otimes \varepsilon(F_2)"']
\end{tikzcd}$$

Pour tout foncteur $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}(B)$, $L_k(F, F)$ est ainsi muni d'une structure de k-cogébroïde de base B, qu'on notera $L_k(F)$.

Proposition 4.2. *Le cogébroïde $L_k(F)$ représente le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathsf{Cog}_k(B) &\longrightarrow \mathcal{E}ns \\ L &\longmapsto \{\textit{coactions à droite fonctorielles de } L \textit{ sur } F\} \quad . \end{aligned}$$

En effet, $\lambda_0 : F \longrightarrow F \otimes_B L_k(F)$ est une coaction fonctorielle de $L_k(F)$ sur F, et on vérifie que, dans la bijection entre morphismes fonctoriels $F \longrightarrow F \otimes_B L$ et morphismes (B, B)-linéaires de $L_k(F)$ vers L, les coactions à droite correspondent exactement aux morphismes de k-cogébroides.□

4.3. Quelques propriétés de fonctorialité.

(i) Changement de scalaires.

Soit $B_i \longrightarrow C_i$ un morphisme de k-algèbres pour $i = 1,\ 2$. Alors

$$C_1 \otimes_{B_1} L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_2} C_2 \simeq L_k(F_1 \otimes_{B_1} C_1, F_2 \otimes_{B_2} C_2) \quad .$$

(ii) Fonctorialité par rapport à $\mathcal{C}$.

Tout foncteur T d'une catégorie $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ induit un morphisme

$$L_k(F_1 \circ T, F_2 \circ T) \longrightarrow L_k(F_1, F_2)$$

de façon compatible aux coproduits et aux coünités.

(iii) Limites inductives.

Si $\mathcal{C}$ est limite inductive filtrante de catégories $\mathcal{C}^i$, et si $T_i : \mathcal{C}^i \longrightarrow \mathcal{C}$ est le foncteur naturel, le morphisme $\varinjlim L_k(F_1 \circ T^i, F_2 \circ T^i) \longrightarrow L_k(F_1, F_2)$ est un isomorphisme.

(iv) Dualité.

Soit $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}(B)$. En associant à un B-module à droite M le B-module à gauche ${}^{\vee}M = \mathsf{Hom}_B(M, B)$, on définit un foncteur ${}^{\vee}? : \mathsf{proj}(B)^o \longrightarrow \mathsf{proj}(B^o)$ qui est une équivalence de catégories; notons $F^{\%}$ le foncteur de $\mathcal{C}^o$ vers $\mathsf{proj}(B^o)$ obtenu par composition de F et du foncteur ${}^{\vee}?$. Alors on a

$$L_k(F_1, F_2) \simeq L_k({F_2}^{\%}, {F_1}^{\%})^o$$

(si M est un (B_1, B_2)-bimodule, M^o désigne le $({B_2}^o, {B_1}^o)$-bimodule associé). En particulier, on a un isomorphisme de k-cogébroïdes $L_k(F^{\%}) \simeq L_k(F)^o$.

(v) Produits tensoriels.

Soient $F_i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{proj}(B_i)$ et $F'_i : \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}(B_i)$ pour $i = 1,\ 2$, et supposons les algèbres B_i commutatives. Alors on peut former $F_i \otimes_{B_i} F'_i : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \mathsf{proj}(B_i)$ et on a :

$$L_k(F_1 \otimes_{B_1} F'_1, F_2 \otimes_{B_2} F'_2) \simeq L_k(F_1, F_2) \otimes_{B_1 \otimes_k B_2} L_k(F'_1, F'_2) \quad .$$

Remarque. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, k un anneau commutatif, B une k-algèbre, F un foncteur de $\mathcal{C}$ dans $\mathsf{proj}(B)$, et $\mathcal{C}_0$ une sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$. Notons T le foncteur d'inclusion.

Nous dirons que $\mathcal{C}_0$ *engendre* F si pour tout objet X de $\mathcal{C}$, le B-module à droite $F(X)$ est engendré par les images des morphismes $F(f)$, pour f décrivant les morphismes dans C de but X et de source un objet de $\mathcal{C}_0$.

Alors si $\mathcal{C}_0$ engendre F, le morphisme naturel

$$L_k(F \circ T) \longrightarrow L_k(F)$$

est surjectif.

Exemple. Soient k un anneau commutatif, A et B deux k-algèbres, et M un objet de $\mathsf{Bimod}_k(A, B)$. On suppose M projectif de type fini comme B-module. Notons F le foncteur $? \otimes_A M$ de $\mathsf{Mod}(A)$ vers $\mathsf{Mod}(B)$. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine de $\mathsf{Mod}(A)$ contenant A et dont l'image par F est contenue dans $\mathsf{proj}(B)$.

Proposition 4.4. *Avec les notations ci-dessus, on a un isomorphisme naturel de cogébroïdes*

$${}^{\vee}M \otimes_A M \longrightarrow L_k(F_{|\mathcal{C}}) \,.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{C}_0$ la sous-catégorie pleine de $\mathsf{Mod}(A)$ ayant A pour seul objet. Notons $L_0 = L_k(F_{|\mathcal{C}_0})$ et $L = L_k(F_{|\mathcal{C}})$. On a $L_0 = {}^{\vee}M \otimes_A M$. L'inclusion $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$ induit par fonctorialité un morphisme $\phi : L_0 \longrightarrow L$ qui est surjectif, car $\mathcal{C}_0$ engendre $\mathcal{C}$ (cf. remarque précédente). D'autre part, la coaction à droite de $L_0 = {}^{\vee}M \otimes_A M$ sur M s'étend naturellement en une coaction de L_0 sur le foncteur $F = ? \otimes_A M$; d'où un morphisme ψ de L vers L_0 vérifiant $\psi \circ \phi = 1_{L_0}$. Ainsi ψ est inverse de ϕ. $\square$

5.—Cogébroïdes semi-transitifs

Dans toute cette section, k est un corps commutatif, sauf mention explicite du contraire. (Il me semble difficile de contourner cette hypothèse).

Résumons le but de cette section en quelques mots. Soit B une k-algèbre. On a introduit dans les sections 3 et 4 les deux constructions suivantes.

a) À tout k-cogébroide L de base B, on associe le couple $(\mathsf{comod}(B : L), U)$, où U est le foncteur oubli de $\mathsf{comod}(B : L)$ vers $\mathsf{mod}(B)$.
b) À tout couple $(\mathcal{C}, F)$, où $\mathcal{C}$ est une catégorie (essentiellement petite) et F un foncteur de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}(B)$, on associe un k-cogébroide $L_k(F)$ de base B.

Idéalement, on aimerait caractériser tous les couples $(\mathcal{C}, F)$ obtenus par le procédé a), et pouvoir reconstruire le cogébroide L à partir d'un tel couple par le procédé b) : c'est la reconstruction tannakienne.

En fait, pour un k-cogébroïde quelconque L de base B, la catégorie $\mathsf{comod}(B; L)$ n'est pas satisfaisante de ce point de vue là : d'une part, elle n'est pas nécessairement abélienne, et d'autre part, le foncteur oubli U n'est pas nécessairement à valeurs dans $\mathsf{proj}(B)$, ce qui interdit de lui appliquer le procédé b).

Voilà pourquoi on est amené à introduire la notion de *k-cogébroïde semi-transitif*; si la catégorie $\mathcal{C}$ est abélienne k-linéaire, et $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ est k-linéaire, fidèle et exact, et à valeurs dans $\mathsf{proj}(B)$, alors $L_k(F)$ est semi-transitif; en outre, tout k-cogébroïde semi-transitif est de cette forme. C'est essentiellement le théorème 5.2, dû à Deligne (bien que [2] n'introduise pas explicitement la notion de semi-transitivité).

Autre intérêt de cette notion : le théorème fondamental des cogèbres se généralise aux cogébroïdes semi-transitifs.

Rappelons qu'à une catégorie $\mathcal{A}$, on associe une catégorie $\mathsf{Ind}\,\mathcal{A}$ de la façon suivante : les objets de $\mathsf{Ind}\,\mathcal{A}$ sont les systèmes inductifs filtrants de $\mathcal{A}$; on les appelle les *Ind-objets de $\mathcal{A}$*. Si (X^i) et (Y^j) sont deux tels systèmes, on pose

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ind}\,\mathcal{A}}\big((X^i), (Y^j)\big) = \varprojlim_i \varinjlim_j \mathsf{Hom}_{\mathcal{A}}(X^i, Y^j).$$

C'est une façon universelle d'adjoindre à la catégorie $\mathcal{A}$ des limites inductives filtrantes.

Définition. Un k-cogébroïde L de base B est dit *semi-transitif* s'il vérifie les trois conditions suivantes.

ST1 Tout objet de $\mathsf{comod}(B : L)$ est projectif en tant que B-module.
ST2 Tout objet de $\mathsf{Comod}(B : L)$ est limite inductive filtrante d'objets de $\mathsf{comod}(B : L)$.
ST3 La catégorie k-linéaire $\mathsf{comod}(B : L)$ est localement de type fini.

Exemple standard. Soit A une k-algèbre de dimension finie; la catégorie $\mathsf{mod}(A)$ est abélienne, k-linéaire, localement de type fini. Soit B une k-algèbre, et M un objet de $\mathsf{Bimod}_k(A,B)$ fidèlement plat sur A, et projectif de type fini sur B. Soit F le foncteur $? \otimes_A M$ de $\mathsf{mod}(A)$ dans $\mathsf{Mod}(B)$.

Alors $L = {}^{\vee}M \otimes_A M$ est un k-cogébroïde de base B (voir 4.4.), et il résulte du théorème de Barr-Beck (3.5.) que les foncteurs naturels $\mathsf{Mod}(A) \longrightarrow \mathsf{Comod}(B:L)$ et $\mathsf{mod}(A) \longrightarrow \mathsf{comod}(B:L)$ sont des équivalences de catégories, de sorte que L vérifie $\mathsf{ST2}$ et $\mathsf{ST3}$. Un k-cogébroïde de cette forme sera dit *de type standard.*

Si on fait l'hypothèse supplémentaire que F est à valeurs dans $\mathsf{proj}(B)$, le k-cogébroïde L, qui s'identifie alors à $L_k(F)$, vérifie $\mathsf{ST1}$. Il est donc semi-transitif. Un tel k-cogébroïde sera dit *semi-transitif de type standard.*

Proposition 5.1. *Soit k un anneau commutatif. Soit B une k-algèbre et L un k-cogébroïde de base B. On fait l'hypothèse que le B-module sous-jacent à tout objet de* $\mathsf{comod}(B:L)$ *est projectif. Alors*

(i) la catégorie $\mathsf{comod}(B:L)$ *est abélienne et la restriction du foncteur oubli*

$$U : \mathsf{Comod}(B:L) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$$

à la catégorie $\mathsf{comod}(B:L)$ *est fidèle exacte; en outre tout objet de* $\mathsf{comod}(B:L)$ *est noethérien;*

(ii) tout L-comodule à droite qui est limite inductive filtrante d'objets de $\mathsf{comod}(B:L)$ *est projectif en tant que B-module (plus précisément, somme directe de B-modules projectifs de type fini);*

(iii) le foncteur naturel $\mathsf{Ind}\,\mathsf{comod}(B:L) \longrightarrow \mathsf{Comod}(B:L)$ *est pleinement fidèle.*

En particulier, si L est un k-cogébroïde semi-transitif de base B, tout L-comodule à droite est projectif comme B-module, et $\mathsf{Comod}(B:L)$ est équivalente à $\mathsf{Ind}\,\mathsf{comod}(B:L)$.

Démonstration.

(i) Soit $f : V' \longrightarrow V$ un morphisme de $\mathsf{Comod}(B:L)$. Si le noyau de $U(f)$ est facteur direct de $U(V')$ alors il est naturellement muni d'une coaction de L qui en fait un noyau de f.

Supposons V de type fini comme B-module. Le conoyau de f est de type fini, donc projectif, comme B-module. Ainsi $\mathsf{Im}(U(f))$ est facteur direct de $U(V)$, donc projectif, et donc $\mathsf{Ker}(U(f))$ est facteur direct de $U(V')$. Par conséquent, f admet un noyau dans $\mathsf{Comod}(B:L)$, et l'image par U de ce noyau est le noyau de $U(f)$.

En particulier, les noyaux existent dans la catégorie $\mathsf{comod}(B:L)$, et le foncteur oubli de $\mathsf{comod}(B:L)$ vers $\mathsf{Mod}(B)$ commute à leur formation; d'après (3.1.), il en va de même pour les sommes finies et les conoyaux, donc $\mathsf{comod}(B:L)$ est abélienne et le foncteur oubli est fidèle exact.

Soit V un objet de $\mathsf{comod}(B:L)$, et (V_n) une suite croissante de sous-objets de V. Considérons le morphisme canonique $f : \bigoplus V_n \longrightarrow V$. L'image de $U(f)$ est un facteur direct de $U(V)$; elle est donc de type fini comme B-module, et la suite des V_n est stationnaire. L'objet V est donc noethérien.

(ii) Soit $(V_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant d'objets de $\mathsf{comod}(B:L)$, et $V = \varinjlim V_i$. Montrons qu'en tant que B-module, V est somme directe de sous-modules projectifs de type fini.

On peut, quitte à remplacer V_i par son image dans V, supposer que les morphismes naturels $V_i \longrightarrow V$ sont injectifs. (Cette image est encore un comodule, en tant que limite inductive des images de V_i dans les V_j pour $i \leq j$). On considèrera donc les V_i comme inclus dans V.

On aura besoin du fait suivant. Soit W un sous B-module de V somme d'une sous-famille quelconque de (V_i). Alors pour tout j, $W \cap V_j$ est un sous-comodule de V_j. Démontrons-le. Puisque V_j est noethérien dans $\mathsf{comod}(B:L)$, on peut supposer que W est somme d'un nombre fini des V_i. Le système inductif étant filtrant, il existe un l tel que V_l contienne V_j et W. Alors W et V_j sont des sous-comodules de V_l, ainsi que $W \cap V_j = \ker(W \longrightarrow V_l/V_j)$.

Soit maintenant $\mathcal{M}$ l'ensemble des couples (W, X), où W est un sous B-module de V somme d'une sous-famille des V_i, et X un ensemble de sous-modules non nuls de V, projectifs de type fini sur B, dont W est la somme directe. On met sur $\mathcal{M}$ la relation d'ordre $(W, X) \leq (W', X') \Longleftrightarrow W \subset W'$ et $X \subset X'$.

Alors $\mathcal{M}$ n'est pas vide car il contient $(0, \emptyset)$. Si $(W_k, X_k)_{k\in K}$ est une famille croissante de $\mathcal{M}$, alors $(\bigcup W_k, \bigcup X_k)$ en est une borne supérieure dans $\mathcal{M}$.

Il existe donc un élément maximal (W, X) dans $\mathcal{M}$. Pour tout i, $W \cap V_i$ est un sous-comodule de V_i. Par conséquent $W \cap V_i$ admet, en tant que sous-module de V, un supplémentaire E qui est un B-module projectif de type fini. Si V_i n'est pas contenu dans W, le couple $(W + V_i, X \cup \{E\})$, qui est dans $\mathcal{M}$, contredit le choix de (W, X). On a donc $W = V$, d'où l'assertion (ii).

(iii) Les limites inductives existent dans la catégorie $\mathsf{Comod}(B:L)$, d'où un foncteur naturel Φ de $\mathsf{Ind\,comod}(B:L)$ vers $\mathsf{Comod}(B:L)$. Il s'agit donc de montrer que si $X = (V_i)$ et $Y = (W_j)$ sont deux Ind-objets de $\mathsf{comod}(B:L)$, et si on pose $V = \varinjlim V_i$ et $W = \varinjlim W_j$ (limites inductives dans $\mathsf{Comod}(B:L)$), on a :

$$\mathsf{Hom}_{\mathsf{Ind\,comod}(B:L)}(X, Y) \simeq \mathsf{Hom}_{\mathsf{Comod}(B:L)}(V, W).$$

Pour cette vérification, on utilise le lemme suivant.

Lemme. *Avec les hypothèses de la proposition, soit V un objet de $\mathsf{comod}(B:L)$ et $(W_i)_{i\in I}$ un système inductif filtrant de $\mathsf{comod}(B:L)$, de limite inductive W. Alors le morphisme naturel $\varinjlim \mathsf{Hom}(V, W_i) \longrightarrow \mathsf{Hom}(V, W)$ est un isomorphisme.*

Avant de démontrer ce lemme, montrons comment l'assertion (iii) en résulte. On a $\varinjlim_j \mathsf{Hom}(V_i, W_j) \simeq \mathsf{Hom}(V_i, W)$ d'après le lemme, donc $\mathsf{Hom}(V, W) \simeq \varprojlim \mathsf{Hom}(V_i, W) \simeq \varprojlim_i \varinjlim_j \mathsf{Hom}(V_i, W_j) = \mathsf{Hom}_{\mathsf{Ind\,comod}(B:L)}(X, Y)$ (par définition), d'où (iii).

Reste à démontrer le lemme. Soit ϕ l'application naturelle de $\varinjlim \mathsf{Hom}(V, W_i)$ vers $\mathsf{Hom}(V, W)$. Comme le foncteur oubli U est fidèle et commute aux limites inductives, l'injectivité de ϕ se vérifie de façon standard en termes de B-modules. Montrons que ϕ est surjectif. Soit donc $f : V \longrightarrow W$. Comme V est de type fini en tant que B-module, il existe $i \in I$ tel que f soit à valeurs dans l'image de $U(W_i) \longrightarrow U(W)$. Notons W_i' cette image. Soit Q_i le conoyau du morphisme $W_i \longrightarrow W$. Ce comodule est limite inductive filtrante des conoyaux des morphismes $W_i \longrightarrow W_j$ pour $j \geq i$; il est donc projectif comme B-module, d'après l'assertion (ii). Par conséquent, W_i', qui est aussi le noyau de $U(W) \longrightarrow U(Q_i)$, est naturellement muni d'une structure de comodule qui en fait le noyau de $W \longrightarrow Q_i$, et f se factorise à travers W_i'. Soit K_i le noyau de $W_i \longrightarrow W_i'$, et pour tout $j \geq i$, soit $K_{i,j}$ le noyau du morphisme $W_i \longrightarrow W_j$. Les $K_{i,j}$ constituent une famille croissante de sous-comodules de W_i, dont la réunion est K_i. D'après l'assertion (i), W_i est noethérien; il existe donc $j \geq i$ tel que $K_i = K_{i,j}$; grâce au monomorphisme $W_i' \hookrightarrow W_j$ ainsi défini, le morphisme f se factorise à travers W_j. Cela définit un antécédent de f par ϕ, d'où le lemme, et la proposition. □ □

Théorème 5.2. (Deligne). *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie abélienne k-linéaire localement de type fini (et essentiellement petite). Soit B une k-algèbre, et $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ un foncteur k-linéaire fidèle, exact, à valeurs dans $\mathsf{proj}(B)$.*

Posons $L = L_k(F)$. Alors

1) le k-cogébroïde L est semi-transitif;

2) le foncteur

$$\widetilde{F} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{comod}(B; L)$$

est une équivalence de catégories.

Démonstration du théorème 5.2.

Nous dirons qu'un objet X de $\mathcal{A}$ est un *générateur de* $\mathcal{A}$ si tout objet de $\mathcal{A}$ est sous-quotient d'un multiple de X.

On démontre d'abord le théorème lorsque $\mathcal{A}$ admet un générateur, puis on se ramène à ce cas, non sans quelques contorsions, par un procédé appelé *désossage*.

Lemme 5.3. (Gabber). *Si $\mathcal{A}$ admet un générateur, elle admet un générateur projectif P ; autrement dit, il existe une k-algèbre de dimension finie A ($A = \mathsf{End}(P)$) telle que $\mathcal{A}$ soit équivalente à $\mathsf{mod}(A)$.* □

Remarque. Pour la démonstration de ce lemme, se reporter à [2]. Notons que si A est une k-algèbre de dimension finie, $\mathsf{mod}(A)$ est abélienne. En outre, si $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie strictement pleine[5] de $\mathsf{mod}(A)$ stable par sommes directes finies et sous-quotients, il existe un idéal bilatère I de A tel que les objets de $\mathcal{B}$ soient exactement les A-modules à droite de type fini annulés par I : autrement dit, $\mathcal{B}$ s'identifie à $\mathsf{mod}(A/I) \subset \mathsf{mod}(A)$.

Montrons le théorème dans le cas où $\mathcal{A}$ admet un générateur. On peut donc supposer $\mathcal{A} = \mathsf{mod}(A)$, A étant une k-algèbre de dimension finie.

Le foncteur F est alors de la forme $? \otimes_A M$, où M est un objet de $\mathsf{Bimod}_k(A, B)$ qui est projectif de type fini sur B et fidèlement plat sur A; autrement dit, on est dans la situation de l'exemple standard : $L = {}^{\vee}M \otimes_A M$ est semi-transitif de type standard, et on a $\mathsf{mod}(A) \simeq \mathsf{comod}(B : L)$. Le théorème est donc vérifié dans ce cas.

Venons-en maintenant au cas général. Nous aurons besoin de la notion suivante.

Définition. Soit L un k-cogébroïde de base B. On appelle *désossage de* L la donnée d'une famille inductive filtrante $(L^i)_{i \in I}$ de k-cogébroïdes de base B, vérifiant :

(i) L est la limite inductive des L^i ;

(ii) pour tout i, le morphisme $\alpha^i : L^i \longrightarrow L$ est injectif;

(iii) pour tout i, L_i et le conoyau de α^i sont plats à gauche sur B.

[5] Voir note 4.

Remarque. Supposons que L admette un désossage (L^i). Cela implique que L est plat à gauche sur B. On identifie L^i à son image dans L. D'après la proposition 3.2, la catégorie $\mathsf{Comod}(B : L^i)$ s'identifie à la sous-catégorie strictement pleine de $\mathsf{Comod}(B : L)$ des comodules V dont la comultiplication est à valeurs dans $V \otimes_B L^i$; c'est une sous-catégorie abélienne stable par sous-quotients. En outre, si V est un L-comodule à droite de type fini comme B-module, il existe i tel que V soit un L^i-comodule, donc $\mathsf{comod}(B : L)$ est la réunion filtrante de ses sous-catégories strictement pleines $\mathsf{comod}(B : L^i)$.

Revenons à la démonstration du théorème 5.2. Pour tout objet X de $\mathcal{A}$, notons $\mathcal{A}^X$ la sous-catégorie strictement pleine de $\mathcal{A}$ dont les objets sont les sous-quotients des X^n pour $n \in \mathbb{N}$. Notons F^X la restriction de F à $\mathcal{A}^X$, et soit $L^X = L_k(F^X)$. La catégorie $\mathcal{A}^X$ admet X pour générateur, donc L^X est semi-transitif de type standard, et on peut appliquer le théorème 5.2. au foncteur $F^X : \mathcal{A}^X \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$.

Lemme 5.4. *La famille inductive filtrante (L^X) est un désossage de L.*

Démonstration du lemme. On a $\mathcal{A} = \varinjlim \mathcal{A}^X$ donc $L_k(F) = \varinjlim L_k(F^X)$ (voir 4.3. (iii)). D'autre part, soit Y est un objet de $\mathcal{A}^X$; appliquant le lemme 5.3. et la remarque qui le suit, on peut supposer que $\mathcal{A}^X = \mathsf{mod}(A)$ et que $\mathcal{A}^Y = \mathsf{mod}(A/I)$, A étant une k-algèbre de dimension finie, et I un idéal bilatère de A. Alors $L^X \simeq {}^{\vee}M \otimes_A M$, où M est un objet de $\mathsf{Bimod}_k(A, B)$ fidèlement plat sur A et projectif de type fini (donc plat) sur B ; en particulier L_X est plat à gauche sur B. D'autre part, $L^Y = {}^{\vee}(M/IM) \otimes_{A/I} (M/IM) \simeq {}^{\vee}(M/IM) \otimes_A M$; puisqu' en tant que B-modules, $M \simeq F^X(A)$ et $M/IM \simeq F^Y(A/I)$ sont projectifs de type fini, il en va de même de IM et de ${}^{\vee}(IM)$, d'où la suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow {}^{\vee}(M/IM) \longrightarrow {}^{\vee}M \longrightarrow {}^{\vee}(IM) \longrightarrow 0$$

et comme M est plat sur A, la suite :

$$0 \longrightarrow L^Y \longrightarrow L^X \longrightarrow {}^{\vee}(IM) \otimes_A M \longrightarrow 0$$

est également exacte et le conoyau de $L^Y \longrightarrow L^X$ est plat à gauche. Par passage à la limite inductive le conoyau de $L^Y \longrightarrow L$ est plat à gauche. $\Box$

Si L est un k-cogébroïde de base B, considérons la condition :

AB la catégorie $\mathsf{comod}(B : L)$ est abélienne, et le foncteur oubli de $\mathsf{comod}(B : L)$ vers $\mathsf{Mod}(B)$ est exact.

Notons que si L est un k-cogébroïde de type standard, ou semi-transitif, il satisfait à AB.

Lemme 5.5. *Soit L un k-cogébroïde de base B admettant un désossage (L^i).*

Si les L^i vérifient AB *(resp.* ST1*, resp* ST2*, resp.* ST3 et AB*) il en va de même pour L.*

En particulier, si les L^i sont semi-transitifs, L est semi-transitif.

Démonstration du lemme 5.5. D'après la remarque sur les désossages, $\mathsf{comod}(B : L)$ est union filtrante de ses sous-catégories strictement pleines $\mathsf{comod}(B : L^i)$; d'où l'assertion sur ST1. En outre, si dans $\mathsf{comod}(B : L^i)$ les Hom sont de dimension finie, il en va de même dans $\mathsf{comod}(B : L)$.

Si chacun des L^i satisfait à AB, l'inclusion $\mathsf{comod}(B : L^i) \hookrightarrow \mathsf{Comod}(B : L)$ est un foncteur exact; on en déduit que L vérifie AB. En outre, $\mathsf{comod}(B : L^i)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathsf{Comod}(B:L)$ stable par quotients, donc par sous-quotients; par conséquent, si les objets des catégories $\mathsf{comod}(B:L^i)$ sont de longueur finie, il en va de même des objets de $\mathsf{comod}(B:L)$. D'où l'assertion sur AB et ST3.

Supposons que les L^i vérifient ST2, et soit V un L-comodule à droite, δ désignant la coaction. Pour $i \in I$ posons $V^i = \delta^{-1}(V \otimes_B L^i)$. Ainsi V est la réunion filtrante des V^i. Vérifions l'inclusion $\delta V^i \subset V^i \otimes_B L^i$. On a $(\delta \otimes_B 1_L)\delta V^i = (1_V \otimes_B \Delta)\delta V^i \subset V \otimes_B L^i \otimes_B L^i$ donc $\delta V^i \subset (\delta \otimes_B 1_L)^{-1}(V \otimes_B L^i \otimes_B L^i) = V^i \otimes_B L^i$ car L^i est plat à gauche sur B. Ainsi V^i est un objet de $\mathsf{Comod}(B:L^i)$ et, à ce titre, limite inductive filtrante d'objets de $\mathsf{comod}(B:L^i) \subset \mathsf{comod}(B:L)$, d'où l'assertion a).$\square$

Le cogébroïde L admet un désossage par les cogébroïdes L^X qui sont semi-transitifs de type standard, d'où l'assertion 1) du théorème.

D'autre part, le foncteur $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{comod}(B:L)$ induit une équivalence entre $\mathcal{A}^X$ et $\mathsf{comod}(B:L^X)$ pour tout X. Or $\mathcal{A}$ (resp. $\mathsf{comod}(B:L)$) est réunion filtrante de ses sous-catégories pleines $\mathcal{A}^X$ (resp. $\mathsf{comod}(B:L^X)$); donc $\widetilde{F}$ est une équivalence de catégories, et induit une équivalence de Ind_A vers $\mathsf{Comod}(B:L)$ en vertu de (5.1.), ce qui achève la démonstration du théorème.$\square$

Le lemme suivant sera utile dans la section 7, mais il est plus commode de le démontrer maintenant.

Lemme 5.6. *Soient $\mathcal{A}$ et F comme dans l'énoncé du théorème 5.2, et soit X un objet de $\mathcal{A}$. Alors avec les notations introduites ci-dessus, L^X est l'image de ${}^\vee F(X) \otimes_k F(X)$ dans $L = L_k(F)$, et $\mathcal{A}^X$ a pour image* $\mathsf{comod}(B:L^X)$ *dans l'équivalence $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{comod}(B:L)$.*

Démonstration. Rappelons (section 4) que le k-cogébroïde $L = L_k(F)$ est le quotient de $L_0 = \bigoplus_{X \in Ob(\mathcal{A})} {}^\vee F(X) \otimes_k F(X)$ qui rend commutatifs les diagrammes $(\mathcal{D}_f)$. Notons Λ^X l'image de ${}^\vee F(X) \otimes_k F(X)$ dans L.

Montrons qu'on a $\Lambda^X = L^X$. On a vu au cours de la démonstration de (5.2.) que $L^X = \Lambda^P$, pour P générateur projectif de $\mathcal{A}^X$, et qu'en outre, $\mathcal{A}^P \simeq \mathsf{comod}(B:L^P)$. Comme on a $\mathcal{A}^X = \mathcal{A}^P$, il ne reste plus qu'à démontrer $L^X = L^P$; cela résulte de l'implication suivante : $Y \in Ob(\mathcal{A}^X) \Longrightarrow \Lambda^Y \subset \Lambda^X$, dont la vérification se décompose comme suit.

1) On a $\Lambda^{X \oplus Y} = \Lambda^X + \Lambda^Y$: considérer le diagramme $\mathcal{D}_f$, lorsque f est la projection de $X \oplus Y$ sur X, puis sur Y.

2) Si Y est un sous-objet (resp. un quotient) de X, $\Lambda^Y \subset \Lambda^X$: considérer le diagramme $\mathcal{D}_f$, où f est le monomorphisme de Y vers X (resp. l'épimorphisme de X vers Y). $\square$

Conséquences du théorème 5.2.

Le théorème 5.2. permet de construire des k-cogébroïdes semi-transitifs; la proposition suivante montre qu'on les obtient tous ainsi.

Proposition 5.8. *Soit L un k-cogébroïde semi-transitif de base B, et U le foncteur oubli de* $\mathsf{comod}(B:L)$ *vers* $\mathsf{proj}(B)$. *Alors le morphisme naturel de k-cogébroïdes*

$$L_k(U) \longrightarrow L$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Notons $L_0 = L_k(U)$. Le théorème 5.2. s'applique au foncteur U, et en particulier le foncteur naturel $\widetilde{U} : \mathsf{comod}(B:L) \longrightarrow \mathsf{comod}(B:L_0)$ est une équivalence de catégories (c'est même ici un isomorphisme de catégories). D'autre part f_* induit par restriction un foncteur $\mathsf{comod}(B:L_0) \longrightarrow \mathsf{comod}(B:L)$ qui est par définition de f un inverse à gauche de $\widetilde{U}$; c'est donc une équivalence de catégories. Par conséquent, pour tout B-module à droite de type fini V, les coactions à droite de L_0 sur V correspondent bijectivement à celles de L par l'application $\Phi : \delta \mapsto \delta' = (1_V \otimes_B f)\delta$.

Comme L vérifie ST2, le L-comodule à droite (L, Δ) est limite inductive filtrante d'objets de $\mathsf{comod}(B:L)$, d'où une coaction à droite δ_0 de L_0 sur L telle que $(L,\Delta) = f_*(L,\delta_0)$. Soit $g = (\varepsilon \otimes_B 1_{L_0})\delta_0 : L \longrightarrow L_0$. C'est un inverse à droite de f. En effet, $f \circ g = f(\varepsilon \otimes_B 1_{L_0})\delta_0 = (\varepsilon \otimes_B 1_L)(1_L \otimes_B f)\delta_0 = (\varepsilon \otimes_B 1_L)\Delta = 1_L$. Il suffit donc de montrer que g est surjectif.

On peut déjà affirmer que l'inverse de Φ est donné par $\delta' \mapsto (1_V \otimes_B g)\delta$. Par conséquent si V est un objet de $\mathsf{comod}(B:L)$, la coaction naturelle de L_0 sur V se factorise à travers $1_V \otimes_B g$, et la flèche naturelle ${}^{\vee}V \otimes_k V \longrightarrow L_0$ se factorise à travers g. Le cogébroïde L_0 étant, par construction, engendré par les images des ${}^{\vee}V \otimes_k V$ comme (B,B)-bimodule, on en déduit la surjectivité de g, d'où la proposition. □

Corollaire 5.9. *Un k-cogébroïde semi-transitif admet un désossage en k-cogébroïdes semi-transitifs de type standard.* □

Proposition 5.10. *Si L est un k-cogébroïde semi-transitif de base B, alors L^o est un k-cogébroïde semi-transitif de base B^o.*

Démonstration.

Soit L un k-cogébroïde semi-transitif de base B. Posons $\mathcal{A} = \mathsf{comod}(B:L)$ et soit F le foncteur oubli $\mathcal{A} \longrightarrow \mathsf{proj}(B)$. On a $L \simeq L_k(F)$. Soit $F^{\%}$ le foncteur exact : $\mathcal{A}^o \longrightarrow \mathsf{proj}(B^o)$ défini par $X \longmapsto {}^{\vee}F(X)$. On a $L_k(F^{\%}) \simeq L^o$ d'après 4.3. (iv). Or, $L_k(F^{\%})$ est semi-transitif d'après le théorème 5.2, d'où l'assertion. □

Il en résulte que tout L-comodule à gauche est projectif comme B-module; en particulier, L est projectif, donc plat, comme B-module à gauche.

Proposition 5.11. *Soient L et L' deux k-cogébroïdes semi-transitifs de bases respectives B et B'. Soient V, W dans $\mathsf{comod}(B:L)$ et V', W' dans $\mathsf{comod}(B':L')$, et formons les $L \otimes_k L'$-comodules $V \otimes_k V'$ et $W \otimes_k W'$. Alors*

$$\mathsf{Hom}(V \otimes_k V', W \otimes_k W') \simeq \mathsf{Hom}(V,W) \otimes_k \mathsf{Hom}(V',W').$$

Démonstration. Posons $L'' = L \otimes_k L'$ et $B'' = B \otimes_k B'$. D'après (5.9.), L et L' admettent chacun un désossage par des cogébroïdes de type standard, (L^i) et (L'^j) respectivement. Or on a le lemme suivant.

Lemme 5.12. *Soient L et L' deux k-cogébroïdes de bases respectives B et B'. Soient $(L^i)_{i\in I}$ et $(L'^j)_{j\in J}$ des désossages de L et L' respectivement. Alors $(L^i \otimes_k L'^j)_{(i,j)\in I\times J}$ est un désossage de $L \otimes_k L'$.*

Démonstration du lemme. Il est clair que $L^i \otimes_k L'^j$ est plat à gauche sur $B \otimes_k B'$. Considérons la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow L^i \otimes_k (L'/L'^j) \longrightarrow (L \otimes_k L')/(L^i \otimes_k L'^j) \longrightarrow (L/L^i) \otimes_k L' \longrightarrow 0.$$

Les termes extrêmes sont plats à gauche sur $B \otimes_k B'$, donc le terme du milieu l'est aussi. □

Poursuivons la démonstration de la proposition. On peut trouver i et j tels que V et W soient des L^i-comodules et V' et W' des ${L'}^j$-comodules; $V \otimes_k V'$ et $W \otimes_k W'$ sont alors des $L^i \otimes_k {L'}^j$-comodules. Or en vertu du lemme, $\mathsf{comod}(B'' : L^i \otimes_k {L'}^j)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathsf{comod}(B'' : L'')$. Quitte à remplacer L par L^i et L' par ${L'}^i$, on peut donc supposer que L et L' sont de type standard. Alors L est de la forme ${}^{\vee}M \otimes_A M$, où A est une k-algèbre de dimension finie, M un objet de $\mathsf{Bimod}_k(A, B)$ fidèlement plat à gauche et projectif de type fini à droite, et $\mathsf{comod}(B : L) \simeq \mathsf{mod}(A)$; et L' admet une description similaire ${}^{\vee}M' \otimes_{A'} M'$, de sorte que $\mathsf{comod}(B' : L') \simeq \mathsf{mod}(A')$. Posons $A'' = A \otimes_k A'$ et $M'' = M \otimes_k M'$. Alors $L'' \simeq {}^{\vee}M'' \otimes_{A''} M''$ est de type standard, et $\mathsf{comod}(B'' : L'') \simeq \mathsf{mod}(A'')$. On se ramène donc au lemme suivant.

Lemme. *Soient A et A' deux k-algèbres de dimension finie, V, W deux A-modules de type fini, et V', W' deux A'-modules de type fini. Alors*

$$\mathsf{Hom}_A(V, W) \otimes_k \mathsf{Hom}_{A'}(V', W') \simeq \mathsf{Hom}_{A \otimes_k A'}(V \otimes_k V', W \otimes_k W') .$$

Démonstration. Soit $H = \mathsf{Hom}_k(V, W)$, $H_0 = \mathsf{Hom}_A(V, W)$, $H' = \mathsf{Hom}_k(V', W')$, $H'_0 = \mathsf{Hom}'_A(V, W)$ et $H'' = Hom_k(V \otimes_k V', W \otimes_k W') \simeq H \otimes_k H'$. Alors $f \in H''$ est A-linéaire (resp. A'-linéaire) si et seulement s'il est dans $H_0 \otimes_k H'$ (resp. $H \otimes_k H'_0$); on a $(H_0 \otimes_k H') \cap (H \otimes_k H'_0) = H_0 \otimes_k H'_0$, d'où le lemme. □ □

6.—Cogébroïdes géométriquement semi-transitifs

Dans cette section, k sera toujours un corps commutatif.

La notion de semi-transitivité qui a été introduite dans le paragraphe précédent présente quelques inconvénients. Le produit tensoriel sur k de deux k-cogébroïdes semi-transitifs n'est pas nécéssairement semi-transitif, comme nous le verrons ci-après; en outre, la semi-transitivité se comporte mal vis-à-vis des changements de scalaires; enfin il n'est pas facile de vérifier qu'un cogébroïde donné est semi-transitif. Pour ces raisons, on est amené a introduire une version plus forte de la semi-transitivité.

Définition. Soit L un k-cogébroïde de base B. On dira que L est *géométriquement semi-transitif* s'il vérifie les deux conditions suivantes :
(i) L est projectif en tant que $B^o \otimes_k B$-module;
(ii) la catégorie $\mathsf{comod}(B : L)$ est localement de type fini (c'est la condition ST3).

Soient L un k-cogébroïde de base B, et K une extension de k. Alors $L \otimes_k K$ est naturellement muni d'une structure de K-cogébroïde de base $B_K = B \otimes_k K$; on notera L_K le K-cogébroïde ainsi obtenu. Ce *changement de scalaires* est une opération distincte du changement de base introduit dans la section 3.

Théorème 6.1. *Soit L un k-cogébroïde de base B. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*
a) L est géométriquement semi-transitif;
b) pour toute extension K du corps k, L_K est un K-cogébroïde semi-transitif;
c) il existe une extension parfaite K de k telle que L_K soit un K-cogébroïde semi-transitif.

Si le corps de base k est parfait, il est donc équivalent de dire d'un k-cogébroïde qu'il est semi-transitif ou qu'il est géométriquement semi-transitif.

Cette section sera essentiellement consacrée à la démonstration du théorème 6.1. Puisque b) $\Longrightarrow$ c) est "trivial", on montrera a) $\Longrightarrow$ b), puis c) $\Longrightarrow$ a).

Tout k-cogébroïde géométriquement semi-transitif est semi-transitif : c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante.

Proposition 6.2. *Soit L un k-cogébroïde de base B, et supposons que L soit projectif en tant que $B^o \otimes_k B$-module. Alors :*
(i) tout L-comodule à droite est projectif en tant que B-module;
(ii) la catégorie $\mathsf{comod}(B:L)$ est abélienne, et le foncteur oubli U de $\mathsf{comod}(B:L)$ vers $\mathsf{Mod}(B)$ est fidèle exact;
(iii) tout objet de $\mathsf{Comod}(B:L)$ est limite inductive filtrante d'objets de $\mathsf{comod}(B:L)$.

Démonstration. (i) Soient V un L-module à droite, et $\delta : V \longrightarrow V \otimes_B L$ une coaction à droite de L sur V; puisque δ admet la section $1_V \otimes_B \varepsilon$, le B-module à droite V est facteur direct de $V \otimes_B L$; or, L est facteur direct d'un $B^o \otimes_k B$-module libre, et donc V est facteur direct d'une somme directe de copies de $V \otimes_B (B^o \otimes_k B) \simeq V \otimes_k B$, qui est un B-module libre car k est un corps; ainsi, V est un B-module projectif. (ii) résulte de la proposition 5.1, qui s'applique à L en vertu de (i). (iii) résulte de la proposition 3.3, car L est projectif comme B-module à gauche. $\square$

L'implication a) $\Longrightarrow$ b) du théorème 6.1. résultera donc immédiatement du lemme suivant.

Lemme 6.3. *Soient L un k-cogébroïde de base B, et K une extension de k. Alors L_K est géométriquement semi-transitif si et seulement si L est géométriquement semi-transitif.*

Démonstration. Considérons les conditions (i) et (ii) de la définition d'un cogébroïde géométriquement semi-transitif. Alors L vérifie (i) si et seulement si L_K la vérifie : c'est un cas particulier du lemme suivant.

Lemme 6.4. *Soient K une extension de k, A une k-algèbre; notons $A_K = A \otimes_k K$, et soit N un A-module à droite; alors N est projectif $\Longleftrightarrow$ $N_K = N \otimes_A A_K$ est un A_K-module projectif.*

Démonstration de 6.4. L'assertion $\Longrightarrow$ est évidente. Supposons N_K projectif, *i.e.* facteur direct d'un A_K-module libre. Comme A-module, A_K est libre, donc N_K est projectif comme A-module; d'autre part N est facteur direct de N_K comme A-module; il est donc projectif. $\square$

On suppose donc que L et L_K vérifient (i); en particulier la proposition 6.2. s'applique à ces deux cogébroïdes. Supposons que L_K vérifie (ii), et considérons le foncteur

$$\begin{aligned} G : \mathsf{comod}(B:L) &\longrightarrow \mathsf{comod}(B_K : L_K) \\ (V,\delta) &\longmapsto (V_K = V \otimes_k K, \delta \otimes_k 1_K)\,. \end{aligned}$$

Les foncteurs oubli sont fidèles exacts, donc G l'est aussi, et tout objet de $\mathsf{comod}(B:L)$ est de longueur finie; en outre, l'application $\mathsf{Hom}(V,W) \otimes_k K \longrightarrow \mathsf{Hom}(G(V), G(W))$ est injective pour tous V, W objets de $\mathsf{comod}(B:L)$, donc $\mathsf{Hom}(V,W)$ est de dimension finie, et L vérifie (ii).

Réciproquement, supposons que L vérifie la condition (ii), i.e. $\mathsf{ST3}$, et montrons que L_K la vérifie aussi; le k-cogébroïde L est géométriquement semi-transitif, donc en particulier semi-transitif, et il admet un désossage (L^i), les L^i étant des k-cogébroïdes de type standard. Alors les ${L^i}_K$ sont des K-cogébroïdes de type standard, et constituent un désossage de L_K, donc ce dernier vérifie aussi $\mathsf{ST3}$ en vertu du lemme 5.5. □

On a vu que tout k-cogébroïde géométriquement semi-transitif est semi-transitif; la réciproque est fausse, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple. Soient k un corps commutatif, et B une k-algèbre. Alors B est naturellement muni d'une structure de k-cogébroïde de base B qu'on note encore abusivement B. La catégorie $\mathsf{comod}(B:B)$ s'identifie à $\mathsf{mod}(B)$; ainsi B est un k-cogébroïde semi-transitif de base B si et seulement si B est une k-algèbre de dimension finie vérifiant $\mathsf{mod}(B) = \mathsf{proj}(B)$, autrement dit, une k-algèbre de dimension finie semisimple.

Or, si K est une extension finie non séparable de k, K n'est pas projectif en tant que $K \otimes_k K$-module, et $K \otimes_k K$ n'est pas une k-algèbre semisimple. Ainsi K est un k-cogébroïde semi-transitif de base K mais il n'est pas géométriquement semi-transitif, et $K \otimes_k K$ n'est pas semi-transitif en tant que k-cogébroïde de base $K \otimes_k K$.

Cet exemple met en évidence un problème de séparabilité qui appelle les définitions suivantes.

Définitions. Une catégorie abélienne k-linéaire localement de type fini $\mathcal{C}$ est dite *séparable* si pour tout objet simple S de $\mathcal{C}$, le centre du corps $\mathsf{End}(S)$ est une extension séparable de k. Un k-cogébroïde semi-transitif de base B est dit *séparable* si la catégorie $\mathsf{comod}(B:L)$ est séparable.

Proposition 6.5. *Soient L et L' deux k-cogébroïdes semi-transitifs de bases respectives B et B'. Si l'un au moins de ces deux k-cogébroïdes est séparable, alors $L \otimes_k L'$ est un k-cogébroïde semi-transitif de base $B \otimes_k B'$.*

Démonstration. Supposons L séparable, et notons $L'' = L \otimes_k L'$. Les k-cogébroïdes L et L' admettent des désossages (L^i) et (L'^j), où les L^i et les L'^j sont semi-transitifs de type standard; en outre les L^i sont séparables. Les $L^i \otimes_k L'^j$ constituent un désossage de L'' en vertu de (5.12.); par (5.5.), on peut donc supposer que L et L' sont de type standard.

Soit donc $L = {}^{\vee}M \otimes_A M$ et $L' = {}^{\vee}M' \otimes_{A'} M'$, où A et A' sont deux k-algèbres de dimension finie, M, et M' deux objets de $\mathsf{Bimod}(A,B)$ et $\mathsf{Bimod}(A',B')$ respectivement, et supposons les foncteurs $F = ? \otimes_A M : \mathsf{mod}(A) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ et $F' = ? \otimes_{A'} M' : \mathsf{mod}(A') \longrightarrow \mathsf{Mod}(B')$ fidèles exacts, à valeurs dans les modules projectifs de type fini. On a $\mathsf{comod}(B:L) \simeq \mathsf{mod}(A)$, et on fait l'hypothèse que $\mathsf{mod}(A)$ est séparable.

Posons $A'' = A \otimes_k A'$, $B'' = B \otimes_k B'$ et $M'' = M \otimes_k M'$. Alors $L \otimes_k L' \simeq {}^{\vee}M'' \otimes_{A''} M''$, donc L'' est de type standard; pour montrer qu'il est semi-transitif, il suffit donc de vérifier que tout objet N'' de $\mathsf{mod}(A'')$ satisfait à la condition :

($\mathcal{Q}$) le B''-module à gauche $N'' \otimes_{A''} M''$ est projectif.

Si N'' est de la forme $N \otimes_k N'$, où N et N' sont des objets de $\mathsf{mod}(A)$ et $\mathsf{mod}(A')$ respectivement, on a $N'' \otimes_{A''} M'' \simeq F(N) \otimes_k F'(N'')$, donc d'après les hypothèses faites sur F et F', N'' vérifie ($\mathcal{Q}$).

D'après Jordan-Hölder, il suffit de vérifier ($\mathcal{Q}$) lorsque N'' est un objet simple de $\mathsf{mod}(A \otimes_k A')$. Dans ce cas, N'' est quotient d'un module de la forme $N \otimes_k N'$, où N et N' sont simples (exercice). Or on a le lemme suivant.

Lemme 6.6. [2]. *Soient A, A' deux k-algèbres de dimension finie, et N, N' deux objets simples de* $\mathsf{mod}(A)$ *et* $\mathsf{mod}(A')$ *respectivement. On suppose que le centre de* $\mathsf{End}(N)$ *est séparable sur k. Alors $N \otimes_k N'$ est un objet semisimple de* $\mathsf{mod}(A \otimes_k A')$.

Démonstration du lemme. Quitte à quotienter A (resp. A') par l'annulateur de N (resp. N') on peut supposer que N et N' sont fidèles. Alors A et A' sont des k-algèbres simples, et le centre de A est une extension séparable de k, donc $A \otimes_k A'$ est une k-algèbre semisimple (cf. Bourbaki, Algèbre, Chap. 8, § 7). □

Par conséquent N'' est facteur direct de $N \otimes_k N'$, et satisfait donc ($\mathcal{Q}$). □

Corollaire 6.7. *Tout k-cogébroïde semi-transitif séparable est géométriquement semi-transitif.*

Démonstration. Soit L un k-cogébroïde semi-transitif de base B. Alors L^o est semi-transitif (5.10.). Si L est séparable, $L^o \otimes_k L$ est semi-transitif, d'après (6.4). Or L est muni d'une structure de $L^o \otimes_k L$-comodule à droite (cf. section 3). C'est donc un $B^o \otimes_k B$-module projectif, d'où le corollaire. □

Si k est parfait, tout k-cogébroïde semi-transitif est donc géométriquement semi-transitif. L'implication c) $\Longrightarrow$ a) du théorème 6.1. en résulte grâce au lemme 6.3, ce qui achève la démonstration de ce théorème. □

7.—Application aux bigébroïdes de Hopf

Soit k un anneau commutatif. Soit B une k-algèbre commutative, et notons μ_B la multiplication de B; c'est un morphisme de k-algèbres de $B \otimes_k B$ vers B. Ainsi, si L est un k-cogébroïde de base B, et si l'on considère $L \otimes_k L$, qui est un k-cogébroïde de base $B \otimes_k B$, on peut former son image directe $\mu_{B*}(L \otimes_k L) \simeq L \otimes_{B \otimes_k B} L$, qui est un k-cogébroïde de base B. D'autre part, $B \otimes_k B$ est naturellement muni d'une structure de k-cogébroïde de base B.

Définition. Un *k-bigébroïde de base B* est un k-cogébroïde $\mathcal{L}$ de base B muni d'une structure de $B \otimes_k B$-algèbre, vérifiant :

1) la structure de (B, B)-bimodule sous-jacente à la structure de k-cogébroïde de $\mathcal{L}$ coïncide avec celle induite par sa structure de $B \otimes_k B$-algèbre; autrement dit, si μ désigne la multiplication $\mathcal{L} \otimes_{B \otimes_k B} \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}$ et η l'unité $B \otimes_k B \longrightarrow \mathcal{L}$, on a pour m dans L et x, y dans B :

$$x \cdot m \cdot y = \mu(\eta(x \otimes y) \otimes m) = \mu(m \otimes \eta(x \otimes y))$$

2) la multiplication $\mu : \mathcal{L} \otimes_{B \otimes_k B} \mathcal{L} \simeq \mu_{B*}(\mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme de k-cogébroïdes de base B.
3) l'unité $\eta : B \otimes_k B \longrightarrow \mathcal{L}$ est un morphisme de k-cogébroïdes de base B.

Si $\mathcal{L}$ est un k-bigébroïde de base B, on appelle respectivement *source* et *but* les morphismes de k-algèbres s, $b : B \longrightarrow \mathcal{L}$ définis par $s(x) = \eta(1_B \otimes x)$ et $b(x) = \eta(x \otimes 1_B)$.

Remarque. Il s'agit de la notion introduite par Maltsiniotis, bien que la définition ici adoptée diffère légèrement de celle donnée dans [9]. On peut regretter qu'il faille supposer la base B commutative dans cette définition; cependant, j'ai dû me résigner à faire cette hypothèse, sans laquelle je ne peux, en toute généralité, formuler de relation de compatibilité satisfaisante entre le produit et le coproduit. Je vois deux raisons de penser que cette notion n'est pas mauvaise : (1) c'est exactement la notion dont on a besoin pour formuler les résultats tannakiens; (2) quand on étudie les propriétés des bigèbres de Hopf (ou si l'on préfère, des groupes quantiques) on a envie de considérer un bigébroïde de base B comme un outil permettant d'étudier les propriétés de familles de bigèbres de Hopf paramétrées par $\mathsf{Spec}(B)$; dans cette optique de théorie de la déformation, on n'a pas de raison particulière de souhaiter que l'espace des paramètres soit "non commutatif".

Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux k-bigébroïdes de base B, un *morphisme de k-bigébroïdes de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}'$* est un morphisme de k-cogébroïdes qui est aussi un morphisme de $B \otimes_k B$-algèbres. On définit ainsi la catégorie $\mathsf{Big}_k(B)$ des k-bigébroïdes de base B. Tout morphisme de k-algèbres commutatives $f : B \longrightarrow B'$ induit par changement de base un foncteur $f_* : \mathsf{Big}_k(B) \longrightarrow \mathsf{Big}_k(B')$.

Si $\mathcal{L}$ est un k-bigébroïde de base B, de cogébroïde sous-jacent L, de produit μ et d'unité η, on notera $\mathcal{L}^o$ le k-bigébroïde de base B, de cogébroïde sous-jacent L^o, de produit μ^o, et d'unité $\eta^o = \eta\sigma$, où σ est l'échange des facteurs de $B \otimes_k B$.

Définition. Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de base B. Un *antipode de $\mathcal{L}$* est un morphisme de (B, B)-bimodules $i : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{L}^o$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L} \otimes_B \mathcal{L} \arrow[r, "i \otimes_B 1_{\mathcal{L}}"] & \mathcal{L}^o \otimes_B \mathcal{L} \arrow[r, "\mu"] & \mathcal{L} \\
\mathcal{L} \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & B \arrow[u, "s"'] \arrow[d, "b"] \\
\mathcal{L} \otimes_B \mathcal{L} \arrow[r, "1_{\mathcal{L}} \otimes_B i"'] & \mathcal{L} \otimes_B \mathcal{L}^o \arrow[r, "\mu"'] & \mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

Si un antipode existe, il est unique; c'est un morphisme de k-bigébroïdes de $\mathcal{L}$ vers $\mathcal{L}^o$ [9]. Cependant il n'est pas nécéssairement bijectif. On dira que $\mathcal{L}$ est un *k-bigébroïde de Hopf* s'il admet un antipode bijectif.

Remarque. Un k-bigébroïde (de Hopf) de base k est exactement une k-bigèbre (de Hopf). D'autre part, comme nous le verrons dans la section 8, la donnée d'un bigèbroïde de Hopf commutatif (en tant qu'algèbre) équivaut à celle d'un groupoïde algébrique affine.

Exemple. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale (essentiellement petite), et ω un foncteur monoïdal de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}(B)$. Alors $L_k(\omega)$ est naturellement muni d'une structure de k-bigébroïde de base B.

Cela résulte des propriétés de fonctorialité énumérées au 4.3. D'après 4.3. (v), on a un isomorphisme $L_k(\omega) \otimes_{B \otimes_k B} L_k(\omega) \simeq L_k(\omega \otimes_B \omega)$. D'autre part, l'isomorphisme fonctoriel $\omega \otimes_B \omega \simeq \omega \circ \otimes$ induit un isomorphisme de k-cogébroïdes entre $L_k(\omega \otimes_B \omega)$ et $L_k(\omega \circ \otimes)$; enfin on a un morphisme naturel de k-cogébroïdes de $L_k(\omega \circ \otimes)$ vers $L_k(\omega)$, d'où par composition la multiplication $\mu : L_k(\omega) \otimes_{B \otimes_k B} L_k(\omega) \longrightarrow L_k(\omega)$. De même, soit $*$ la catégorie monoïdale initiale (qui a un seul objet et un seul morphisme) et $\mathbb{I}$ l'unique foncteur monoïdal de $*$ vers $\mathcal{C}$. Alors $L_k(\omega \circ \mathbb{I}) \simeq B \otimes_k B$ et η est le morphisme naturel $B \otimes_k B \simeq L_k(\omega \circ \mathbb{I}) \longrightarrow L_k(\omega)$.

On notera $\mathsf{End}_k(\omega)$ le k-bigébroïde ainsi défini. Si $f : B \longrightarrow B'$ est un morphisme de k-algèbres commutatives, on a $\mathsf{End}_k(\omega \otimes_B B') \simeq f_* \mathsf{End}_k(\omega)$ (voir 4.3. (i)).

Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale symétrique et ω est un foncteur monoïdal symétrique, $\mathsf{End}_k(\omega)$ est commutatif.

Lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale autonome à gauche, $\mathsf{End}_k(\omega)$ admet un antipode. Si $\mathcal{C}$ est autonome, $\mathsf{End}_k(\omega)$ est un k-bigébroïde de Hopf, qu'on notera $\mathsf{Aut}_k(\omega)$.

En effet, l'isomorphisme naturel $\omega({}^{\vee}\!A) \simeq \omega(A)^*$ induit par 4.3. (iv) un isomorphisme de k-cogébroïdes entre $L_k(\omega \circ {}^{\vee}?)$ et $L_k(\omega)^o$; on a d'autre part un morphisme naturel de $L_k(\omega \circ {}^{\vee}?)$ vers $L_k(\omega)$; d'ou par composition un morphisme i de $L_k(\omega)$ vers $L_k(\omega)^o$ qui est un antipode de $\mathsf{End}_k(\omega)$. Si $\mathcal{C}$ est autonome, le foncteur ${}^{\vee}?$ est une équivalence de catégories, donc le morphisme naturel de $L_k(\omega \circ {}^{\vee}?)$ vers $L_k(\omega)$ est un isomorphisme, ainsi que i.

Représentations d'un bigébroïde de Hopf.

Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de base B. On appelle *représentation de* $\mathcal{L}$ tout $\mathcal{L}$-comodule à droite; une *représentation de type fini de* $\mathcal{L}$ est une représentation de $\mathcal{L}$ dont le B-module sous-jacent est de type fini.

Soient V, V' deux $\mathcal{L}$-comodules à droite. Alors $V \otimes_k V'$ est un $\mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L}$-comodule à droite, donc par le changement de base $\mu_B : B \otimes_k B \longrightarrow B$, $V \otimes_B V' = \mu_{B*}(V \otimes_k V')$ est un $\mu_{B*}(\mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L})$-comodule à droite. On en déduit, via la multiplication $\mu : \mu_{B*}(\mathcal{L} \otimes_k \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{L}$ (qui est un morphisme de cogébroïdes), une coaction à droite de $\mathcal{L}$ sur $V \otimes_B V'$; d'où un bifoncteur

$$\otimes_B : \mathsf{Comod}(B : \mathcal{L}) \times \mathsf{Comod}(B : \mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Comod}(B : \mathcal{L}).$$

D'autre part, $s : B \longrightarrow \mathcal{L} \simeq B \otimes_B \mathcal{L}$ est une coaction à droite de L sur B, d'où une représentation de $\mathcal{L}$ appelée représentation unité, et notée I. Les endomorphismes de I sont les $x \in B$ vérifiant $s(x) = b(x)$.

Avec les contraintes d'associativité et d'unité héritées de $\mathsf{Mod}(B)$, la catégorie des représentations de $\mathcal{L}$ devient une catégorie monoïdale : c'est une catégorie de Penrose, qu'on notera $\mathsf{Rep}(B : \mathcal{L})$; on désigne par $\mathsf{rep}(B : \mathcal{L})$ la sous-catégorie monoïdale pleine de $\mathsf{Rep}(B : \mathcal{L})$ des représentations de type fini. Le foncteur oubli $U : \mathsf{Rep}(B : \mathcal{L}) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ est, par construction, muni d'une structure monoïdale.

Si $\mathcal{L}$ est un k-bigébroïde de Hopf, toute représentation de $\mathcal{L}$ dont le B-module sous-jacent est projectif de type fini admet un dual à droite et un dual à gauche. En effet, soit V une telle représentation. Nous avons vu dans la section 3 que $V^* = {}^{\vee}V$ est naturellement muni d'une structure de $\mathcal{L}^o$-comodule à droite. Via le morphisme de k-cogébroïdes $i : \mathcal{L}^o \longrightarrow \mathcal{L}$ (resp. $i^{-1} : \mathcal{L}^o \longrightarrow \mathcal{L}$), on obtient une structure de $\mathcal{L}$-comodule à droite sur V^* qui en fait un dual à gauche (resp. à droite) de V (avec l'évaluation et la coévaluation usuelles).

Bigébroïdes transitifs.

Soient k un corps commutatif, et B une k-algèbre commutative.

Définition. Un k-bigébroïde $\mathcal{L}$ de base B est dit *transitif* (resp. *géométriquement transitif*) si c'est un k-bigébroïde de Hopf qui vérifie les conditions suivantes :

1) le k-cogébroïde de base B sous-jacent à $\mathcal{L}$ est semi-transitif (resp. géométriquement semi-transitif);
2) on a $B \neq 0$, et tout $x \in B$ tel que $s(x) = b(x)$ est dans k.

REMARQUES SUR LA DEFINITION. Soit I la représentation unité de $\mathcal{L}$. La condition 2) signifie $\mathsf{End}(I) = k$, car on a $\mathsf{End}(I) = \{x \in B \quad \text{t.q.} \quad s(x) = b(x)\}$.

Pour que $\mathcal{L}$ soit transitif (resp. géométriquement transitif), il suffit qu'il vérifie la condition 2), et que le k-cogébroïde sous-jacent L vérifie $\mathsf{ST1}$ et $\mathsf{ST2}$ (resp. soit projectif comme $B \otimes_k B$-module).

En effet, dans un cas comme dans l'autre, il s'agit de vérifier que L vérifie $\mathsf{ST3}$. Or, $\mathsf{comod}(B : L)$ est abélienne, et le foncteur oubli $U : \mathsf{comod}(B : L) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B)$ est fidèle exact, à valeurs dans $\mathsf{proj}(B)$, par 5.1. (resp. 6.2.). La catégorie monoïdale $\mathsf{rep}(B : \mathcal{L})$ est donc k-tensorielle (c'est ici que $\mathsf{End}(I) = k$ intervient), autonome (car les représentations de type fini sont projectives comme B-modules), et le foncteur oubli est un foncteur fibre non trivial; d'après (2.5.), $\mathsf{rep}(B : \mathcal{L})$ est localement de type fini, d'où $\mathsf{ST3}$.

Théorème 7.1.

1) Soient $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome (essentiellement petite) et ω un foncteur fibre non trivial de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}(B)$. Alors le k-bigébroïde de Hopf $\mathsf{Aut}_k(\omega)$ est transitif, et ω induit une équivalence de catégories monoïdales

$$\widetilde{\omega} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{rep}(B : \mathsf{Aut}_k(\omega))$$

qui s'étend en une équivalence de catégories monoïdales

$$\mathsf{Ind}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathsf{Rep}(B : \mathsf{Aut}_k(\omega)).$$

2) Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de Hopf transitif de base B, et supposons B non nul. Alors $\mathsf{rep}(B : \mathcal{L})$ est une catégorie k-tensorielle autonome, le foncteur oubli U de $\mathsf{rep}(B : \mathcal{L})$ vers $\mathsf{Mod}(B)$ est un foncteur fibre, et le morphisme naturel

$$\mathsf{Aut}_k(U) \longrightarrow \mathcal{L}$$

est un isomorphisme de k-bigébroïdes de base B.

Démonstration du théorème 7.1.

1) La catégorie $\mathcal{T}$ est abélienne k-linéaire, localement de type fini; en outre le foncteur ω est fidèle, exact, et à valeurs dans $\mathsf{proj}(B)$ (cf. 2.2, 2.3, et 2.5.). D'après le théorème 5.2, le k-cogébroïde sous-jacent à $\mathcal{L} = \mathsf{Aut}_k(\omega)$ est semi-transitif, la catégorie $\mathcal{T}$ est équivalente à $\mathsf{comod}(B : \mathcal{L})$, et $\mathsf{Ind}(\mathcal{T})$, à $\mathsf{Comod}(B : \mathcal{L})$. Ces équivalences sont naturellement munies d'une structure monoïdale.

La représentation unité de $\mathcal{L}$ s'identifie donc à l'objet unité I de $\mathcal{T}$, et comme on a $\mathsf{End}(I) = k$, $\mathcal{L}$ est transitif.

2) Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de Hopf transitif de base B. Comme on l'a vu dans la remarque ci-dessus, la catégorie $\mathsf{rep}(B:\mathcal{L})$ est k-tensorielle autonome, et le foncteur oubli U est naturellement muni d'une structure monoïdale qui en fait un foncteur fibre non trivial. Le morphisme naturel de k-cogébroïdes $\mathcal{L} \simeq L_k(U)$ est donc un isomorphisme, d'après la proposition 5.8. On vérifie que c'est un morphisme d'algèbres. □

Proposition 7.2. *Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de Hopf transitif de base B. Alors toute représentation non nulle de $\mathcal{L}$ est projective et fidèlement plate comme B-module.*

Démonstration. Toute représentation de $\mathcal{L}$ est projective, donc plate, comme B-module; en outre elle est limite inductive filtrante de ses sous-représentations de type fini (5.1. et ST2). Il suffit donc de vérifier que toute représentation de type fini, non nulle, est fidèlement plate. Soit C une B-algèbre commutative non nulle. Le foncteur monoïdal ω de $\mathsf{rep}(B:\mathcal{L})$ vers $\mathsf{Mod}(C)$ qui à toute représentation V de $\mathcal{L}$ associe le C-module $V \otimes_B C$, est exact à droite; c'est donc un foncteur fibre, non trivial; d'après (2.3.) il est fidèle, d'où la proposition. □

Les k-bigébroïdes de Hopf géométriquement transitifs admettent une caractérisation particulièrement simple.

Définition. Un k-bigébroïde de Hopf transitif est dit *séparable* si le k-cogébroïde sous-jacent est séparable, autrement dit si pour toute représentation simple de type fini V, le centre du corps $\mathsf{End}(V)$ est une extension séparable de k.

Si $\mathcal{L}$ est un k-bigébroïde de base B, notons $\mathcal{L}_K$ le K-bigébroïde $\mathcal{L} \otimes_k K$, de base $B_K = B \otimes_k K$, obtenu à partir de $\mathcal{L}$ par changement de scalaires.

Proposition 7.3. *Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de Hopf de base B. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

a) $\mathcal{L}$ est géométriquement transitif;

b) $\mathcal{L}$ est projectif et fidèlement plat comme $B \otimes_k B$-module, et $B \neq 0$;

c) Pour toute extension K de k, le K-bigébroïde de Hopf $\mathcal{L}_K$ est transitif de base B_K.

Démonstration. a) $\Longrightarrow$ b). Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de Hopf de base B, et soit I sa représentation unité. Supposons $\mathcal{L}$ géométriquement transitif, ce qui signifie qu'il est projectif comme $B \otimes_k B$-module, et que $\mathsf{End}(I) = k$ (cf. les remarques qui précèdent le théorème 7.1.). Alors $\mathcal{L}^o$ est un k-bigébroïde de Hopf géométriquement transitif de base B; notons I^o sa représentation unité. Soit $\mathcal{L}^e = \mathcal{L}^o \otimes_k \mathcal{L}$; c'est un k-bigébroïde de Hopf de base $B^e = B \otimes_k B$, projectif en tant que $B^e \otimes B^e$-module, et de représentation unité $I^e = I^o \otimes_k I$. D'après la proposition 5.11, on a $\mathsf{End}(I^e) = \mathsf{End}(I^o) \otimes_k \mathsf{End}(I) = k$, donc $\mathcal{L}^e$ est géométriquement transitif, et en particulier transitif; ainsi $\mathcal{L}$, naturellement muni d'une coaction à droite de $\mathcal{L}^e$, est fidèlement plat sur $B \otimes_k B$ en vertu de 7.2.

b) $\Longrightarrow$ a) et c). Supposons que $\mathcal{L}$ vérifie b). La condition de fidèle platitude entraîne l'injectivité de l'unité $\eta : B \otimes_k B \longrightarrow \mathcal{L}$ et donc tout $x \in B$ vérifiant $s(x) = b(x)$ est dans k. Ainsi, les endomorphismes de l'objet unité se réduisent à k. Comme L est projectif comme $B \otimes_k B$-module, il est donc géométriquement transitif (d'où a)), et en particulier transitif.

D'autre part, si $\mathcal{L}$ vérifie la condition b), $\mathcal{L}_K$ la vérifie pour toute extension K de k, d'où c).

c) $\Longrightarrow$ b). Soit $\mathcal{L}$ vérifiant c), et K une extension parfaite de k (par exemple, sa clôture algébrique). Alors $\mathcal{L}_K$ est transitif séparable, donc géométriquement transitif (6.7.), et il vérifie donc b). Il résulte alors du lemme 6.4. et de la fidèle platitude de K sur k, que $\mathcal{L}$ vérifie b), d'où la proposition 7.3. $\square$

Remarque. Deligne montre dans [2] que tout k-bigébroïde de Hopf transitif *commutatif* est géométriquement transitif; j'ignore encore si cela reste vrai dans le cadre non commutatif, lorsque k n'est pas parfait.

Étant donnés une catégorie k-tensorielle autonome (essentiellement petite) $\mathcal{T}$ et un foncteur fibre non trivial ω de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}(B)$, il est utile de préciser dans quels cas le k-bigébroïde transitif $\mathsf{Aut}_k(\omega)$ est de type fini en tant que $B \otimes_k B$-algèbre. (En effet, la moindre des choses qu'on puisse exiger d'un groupe quantique est qu'il soit de type fini en tant qu'algèbre.)

Définition. La catégorie k-tensorielle autonome $\mathcal{T}$ est dite *de type $\otimes$-fini* s'il existe un objet X de $\mathcal{T}$ tel que tout objet soit sous-quotient d'un $X^{\otimes n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 7.4. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(1) Le k-bigébroïde de Hopf $\mathsf{Aut}_k(\omega)$ est une $B \otimes_k B$-algèbre de type fini;
(2) la catégorie k-tensorielle autonome $\mathcal{T}$ est de type $\otimes$-fini.

Démonstration. Pour X objet de $\mathcal{T}$, soit L^X l'image de ${}^{\vee}\omega(X) \otimes_k \omega(X)$ dans $L = L_k(\omega)$. On a montré les faits suivants dans la section 5 (cf. (5.4.) et (5.6.)) :

1) les L^X constituent un désossage de L;

2) les sous-quotients des multiples de X correspondent aux L^X-comodules dans l'équivalence de catégories $\widetilde{\omega} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{comod}(B : L)$;

3) si Y est un objet de $\mathcal{T}^X$, $L^Y \subset L^X$.

D'autre part, on a $L^X \cdot L^Y = L^{X \otimes Y}$ par définition du produit de $\mathcal{L} = \mathsf{Aut}_k(\omega)$. Par conséquent, pour tout objet X de $\mathcal{T}$, la sous-algèbre de $\mathcal{L} = \mathsf{Aut}_k(\omega)$ engendrée par L^X est $C^X = \sum L^{X^{\otimes n}}$.

Supposons que tout objet de $\mathcal{T}$ soit sous-quotient d'un $X^{\otimes n}$. Alors C^X contient $L^{X^{\otimes n}}$ pour tout n, donc tous les L^Y, d'où $C^X = \mathcal{L}$, ce qui démontre (2)$\Rightarrow$(1).

Réciproquement, supposons $\mathcal{L}$ de type fini comme $B \otimes_k B$-algèbre. Il existe un objet Y de $\mathcal{T}$ tel que $C^Y = \mathcal{L}$; quitte à remplacer Y par $Y \oplus I$, on peut supposer que $Y^{\otimes n}$ est un sous-objet de $Y^{\otimes n+1}$; $\mathcal{L} = C^Y$ est alors la réunion croissante des $L^{Y^{\otimes n}}$. Posons $X = Y \oplus I$. Pour tout objet Z de $\mathcal{T}$, il existe n tel que $\widetilde{\omega}(Z)$ soit un $L^{Y^{\otimes n}}$-comodule, autrement dit, que Z soit un sous-quotient d'un multiple de $Y^{\otimes n}$, et donc d'un $X^{\otimes m}$, d'où (1)$\Rightarrow$(2). $\square$

Unicité du foncteur fibre et isomorphismes quantiques.

Remarques. Soit k un anneau commutatif. Soient $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale (essentiellement petite), B_1, B_2 deux k-algèbres commutatives et ω_1, ω_2 deux foncteurs monoïdaux de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}(B_1)$ et $\mathsf{proj}(B_2)$ respectivement. On a alors les faits suivants.

1) $L_k(\omega_1, \omega_2)$ est naturellement muni d'une structure de $(B_1 \otimes_k B_2)$-algèbre. En effet, considérons le foncteur monoïdal $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ de $\mathcal{C}$ vers $\mathsf{proj}(B_1 \times B_2)$; soit $\mathcal{L}$ le k-bigébroïde $\mathsf{End}_k(\omega)$, de base $B = B_1 \times B_2$; alors, en vertu de 4. 3. (i), $L_k(\omega_1, \omega_2)$ s'identifie à $B_1 \otimes_B \mathcal{L} \otimes_B B_2$, d'où la structure de $B_1 \otimes_k B_2$-algèbre en question. Il est utile de donner une description plus explicite de cette structure d'algèbre. Pour X objet de $\mathcal{C}$, posons $\Lambda_X = {}^{\vee}\omega_1(X) \otimes_k \omega_2(X)$, et notons a_X le morphisme naturel $\Lambda_X \longrightarrow L_k(\omega_1, \omega_2)$. Les structures monoïdales induisent des isomorphismes naturels $\Psi_{X,Y} : \Lambda_X \otimes_{B_1 \otimes_k B_2} \Lambda_Y \longrightarrow$

$\Lambda_{X\otimes Y}$ et $\Psi_0 : B_1 \otimes_k B_2 \longrightarrow \Lambda_I$. Alors la multiplication μ et l'unité η de $L_k(\omega_1, \omega_2)$ sont définies par : $\mu(a_X \otimes_{B_1 \otimes_k B_2} a_Y) = a_{X\otimes Y} \Psi_{X,Y}$ et $\eta = a_I \Psi_0$.

On désigne par $\mathsf{Hom}_k(\omega_2, \omega_1)$ cette algèbre (l'interversion est significative). Si $\mathcal{C}$ est autonome, on la note $\mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1)$.

2) Soit C une $B_1 \otimes_k B_2$-algèbre *commutative* (cette hypothèse est essentielle). Un morphisme de (B_1, B_2)-bimodules $\varphi : \mathsf{Hom}_k(\omega_2, \omega_1) \longrightarrow C$ correspond bijectivement à un morphisme fonctoriel de B_2-modules $\widetilde{\varphi} : \omega_2 \longrightarrow \omega_1 \otimes_{B_1} C$, et donc aussi à un morphisme fonctoriel de C-modules $\widehat{\varphi} : \omega_2 \otimes_{B_2} C \longrightarrow \omega_1 \otimes_{B_1} C$. On vérifie (en utilisant la description explicite de la structure d'algèbre de $\mathsf{Hom}_k(\omega_2, \omega_1)$ donnée ci-dessus) que $\widehat{\varphi}$ est monoïdal si et seulement si φ est un morphisme d'algèbre.

Ainsi, les morphismes fonctoriels monoïdaux de $\omega_2 \otimes_{B_2} C$ vers $\omega_1 \otimes_{B_1} C$ sont en bijection naturelle avec les morphismes de $B_1 \otimes_k B_2$-algèbres de $\mathsf{Hom}_k(\omega_2, \omega_1)$ vers C.

3) Lorsque $\mathsf{Hom}_k(\omega_2, \omega_1)$ est une algèbre commutative, elle représente donc le foncteur de la catégorie des $B_1 \otimes_k B_2$-algèbres commutatives vers $\mathcal{E}ns$ défini par

$$C \longmapsto \{\text{morphismes fonctoriels monoïdaux de } \omega_2 \otimes_{B_2} C \text{ vers } \omega_1 \otimes_{B_1} C\} \quad ,$$

ce qui justifie la notation.

Ces remarques inspirent la définition suivante. On suppose désormais que k est un corps commutatif.

Définition. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome (essentiellement petite), B_1 et B_2 deux k-algèbres commutatives, et ω_1, ω_2 deux foncteurs fibres de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}\, B_1$ et $\mathsf{Spec}\, B_2$ respectivement.

On dit que ω_1 et ω_2 sont *localement isomorphes au sens fpqc*[6] s'il existe une $B_1 \otimes_k B_2$-algèbre fidèlement plate C telle que les foncteurs fibres $\omega_1 \otimes_{B_1} C$ et $\omega_2 \otimes_{B_2} C$ de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}\, C$ soient isomorphes.

Proposition 7.5. *Supposons k parfait. Soient ω_1 et ω_2 deux foncteurs fibres non triviaux de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}\, B_1$ et $\mathsf{Spec}\, B_2$ respectivement. Si $\mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1)$ est commutatif, ω_1 et ω_2 sont localement isomorphes au sens fpqc. (C'est le cas en particulier si $\mathcal{T}$, ω_1 et ω_2 sont symétriques.)*

Démonstration. Soit $\omega = \omega_1 \times \omega_2$, et $B = B_1 \times B_2$. D'après le théorème 7.1, le k-bigébroïde de Hopf $\mathcal{L} = \mathsf{Aut}_k(\omega)$ est transitif, donc géométriquement transitif, de base B ; d'après (7.3.) il est fidèlement plat sur $B \otimes_k B$. Soit $C = \mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1) = B_1 \otimes_B \mathcal{L} \otimes_B B_2$. C'est une $B_1 \otimes_k B_2$ algèbre commutative fidèlement plate, et la remarque 3) s'applique; les foncteurs fibres ω_1 et ω_2, deviennent isomorphes après tensorisation par C.$\square$

Remarque. En général, $\mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1)$ n'est pas commutatif, et peut même n'admettre aucun quotient commutatif non nul. Aussi est-on amené à introduire une notion plus faible d'isomorphisme, qui permet d'énoncer un résultat d'unicité du foncteur fibre en toute généralité.

On suppose désormais que k est parfait.

Définition. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome (essentiellement petite), et ω_1, ω_2 deux foncteurs fibres non triviaux de $\mathcal{T}$. On dira que ω_1 et ω_2 sont *quantiquement isomorphes* si $\mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1)$ n'est pas nul.

---

[6] C'est-à-dire fidèlement plat quasi-compact.

Définition. On dira que deux k-bigébroïdes de Hopf transitifs $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, de bases respectives B_1 et B_2, sont *quantiquement isomorphes* s'il existe un k-bigébroïde de Hopf transitif $\mathcal{L}$, de base B, et deux morphismes d'algèbres de B vers B_1 et B_2 respectivement, de telle sorte que chacun des $\mathcal{L}_i$ soit isomorphe au k-bigébroïde de Hopf de base B_i obtenu à partir de $\mathcal{L}$ par changement de base.

On a alors le théorème d'unicité suivant :

Théorème 7.6. *(On suppose k parfait.)*

1) *Soit $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome (essentiellement petite). Si ω_1 et ω_2 sont deux foncteurs fibres non triviaux de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}\, B_1$ et $\mathsf{Spec}\, B_2$ respectivement, alors ω_1 et ω_2 sont quantiquement isomorphes; qui plus est, $\mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1)$ est projectif et fidèlement plat sur $B_1 \otimes_k B_2$; enfin, $\mathsf{Aut}_k(\omega_1)$ et $\mathsf{Aut}_k(\omega_2)$ sont quantiquement isomorphes.*
2) *Deux k-bigébroïdes transitifs sont quantiquement isomorphes si et seulement s'il existe une équivalence monoïdale k-linéaire entre leurs catégories de représentations de type fini.*

Démonstration. 1) Posons $B = B_1 \times B_2$, et considérons le foncteur fibre $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}\, B$; soit $\mathcal{L} = \mathsf{Aut}_k(\omega)$. Alors $\mathcal{L}$ est géométriquement transitif de base $B = B_1 \times B_2$, donc projectif et fidèlement plat sur $B \otimes_k B$. Par conséquent $\mathsf{Iso}_k(\omega_2, \omega_1)$ est projectif, fidèlement plat sur $B_1 \otimes_k B_2$, et en particulier non nul. En outre $\mathsf{Aut}_k(\omega_1)$ et $\mathsf{Aut}_k(\omega_2)$ s'obtiennent à partir de $\mathcal{L}$ par les changements de base définis par les projections $B \longrightarrow B_1$ et $B \longrightarrow B_2$.

2) Notons U_i le foncteur oubli $\mathsf{rep}(B_i : \mathcal{L}_i) \longrightarrow \mathsf{Mod}(B_i)$. Supposons donnée une équivalence de catégories monoïdales $a : \mathsf{rep}(B_1 : \mathcal{L}_1) \longrightarrow \mathsf{rep}(B_2 : \mathcal{L}_2)$. Alors U_1 et $U_2 \circ a$ sont des foncteurs fibres non triviaux de $\mathsf{rep}(B_1 : \mathcal{L}_1)$; il résulte de l'assertion 1) que $\mathsf{Aut}_k(U_1)$ et $\mathsf{Aut}_k(U_2 \circ a)$ sont quantiquement isomorphes; or on a $\mathsf{Aut}_k(U_i) \simeq \mathcal{L}_i$ d'après le théorème 7.1, et $\mathsf{Aut}_k(U_2 \circ a) \simeq \mathsf{Aut}_k(U_2)$ car a est une équivalence de catégories monoïdales, donc $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont quantiquement isomorphes.

Réciproquement, supposons qu'il existe un morphisme d'algèbres $f : B_1 \longrightarrow B_2$ tel que $\mathcal{L}_2 = f_* \mathcal{L}_1$; alors $U_1 \otimes_{B_1} B_2$ est un foncteur fibre non trivial de $\mathsf{rep}(B_1 : \mathcal{L}_1)$; on a $\mathsf{Aut}_k(U_1 \otimes_{B_1} B_2) \simeq f_* \mathsf{Aut}_k(U_1) \simeq \mathcal{L}_2$, donc d'après le théorème 7.1, $\mathsf{rep}(B_1 : \mathcal{L}_1)$ est monoïdalement équivalente à $\mathsf{rep}(B_2 : \mathcal{L}_2)$. $\square$

L'exemple de Maltsiniotis.

Soit k un corps commutatif. Rappelons que, pour p_0, q_0 non nuls dans k, on définit un groupe quantique $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0}$ de la façon suivante. Tout d'abord on construit une k-bigèbre M_{p_0,q_0} : en tant que k-algèbre, M_{p_0,q_0} est engendrée par des indéterminées a, b, c, d, avec les relations suivantes :

$$ba = q_0 ab, \quad dc = q_0 cd, \qquad ca = p_0 ac, \quad db = p_0 bd,$$
$$q_0 cb = p_0 bc, \qquad q_0 da = q_0 ad + (p_0 q_0 - 1) bc \quad .$$

Le coproduit $\Delta : M_{p_0,q_0} \longrightarrow M_{p_0,q_0} \otimes_k M_{p_0,q_0}$ et la coünité $\varepsilon : M_{p_0,q_0} \longrightarrow k$ sont les morphismes d'algèbres définis par les formules suivantes :

$$\Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d,$$
$$\varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1, \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \quad .$$

L'élément $\delta = ad - q_0^{-1}bc$ vérifie $M_{p_0,q_0}\delta = \delta M_{p_0,q_0}$, $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$ et $\varepsilon(\delta) = 1$. On pose $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0} = M_{p_0,q_0}[\delta^{-1}]$; alors $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0}$ hérite de M_{p_0,q_0} une structure de k-bigèbre. En outre, il existe un anti-homomorphisme d'algèbre unique i de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ vérifiant :

$$i(a) = d\delta^{-1}, \quad i(b) = -q_0 b\delta^{-1}, \quad i(c) = -q_0^{-1}c\delta^{-1}, \quad i(d) = a\delta^{-1},$$

et c'est un antipode bijectif de $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0}$.

Proposition 7.7. *Soient p_1, q_1, p_2, q_2 non nuls dans k. Les groupes quantiques $\mathsf{Gl}(2)_{p_1,q_1}$ et $\mathsf{Gl}(2)_{p_2,q_2}$ sont quantiquement isomorphes lorsqu'on a $p_1q_1 = p_2q_2$.*

La réciproque est vraie, mais nous ne la démontrerons pas. Pour démontrer 7.7, nous allons utiliser un bigébroïde de Hopf $\mathcal{L}$ construit par Maltsiniotis de la façon suivante [9].

Soient p, q des indéterminées, et notons B l'algèbre des polynômes de Laurent $k[p, q, p^{-1}, q^{-1}]$.

Dans $B \otimes_k B$, soit $p_s = 1 \otimes p$, $q_s = 1 \otimes q$, $p_b = p \otimes 1$ et $q_b = q \otimes 1$.

Soit $\mathcal{L}_0$ la $B \otimes_k B$-algèbre engendrée par les indéterminées a, b, c, d, avec les relations :

$$\begin{gathered} ba = q_s ab, \quad dc = q_s cd, \qquad ca = p_b ac, \quad db = p_b bd, \\ q_s cb = p_b bc, \qquad q_b da = q_s ad + (p_s q_s - 1)bc, \qquad p_s q_s = p_b q_b \quad . \end{gathered}$$

On définit des morphismes d'algèbre $\Delta : \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \otimes_B \mathcal{L}_0$ et $\varepsilon : \mathcal{L}_0 \longrightarrow B$ par les formules suivantes :

$$\begin{gathered} \Delta(p_s) = 1 \otimes p_s, \quad \Delta(q_s) = 1 \otimes q_s, \quad \Delta(p_b) = p_b \otimes 1, \quad \Delta(q_b) = q_b \otimes 1, \\ \Delta(a) = a \otimes a + b \otimes c, \quad \Delta(b) = a \otimes b + b \otimes d, \quad \Delta(c) = c \otimes a + d \otimes c, \quad \Delta(d) = c \otimes b + d \otimes d, \\ \varepsilon(p_s) = \varepsilon(p_b) = p, \quad \varepsilon(q_s) = \varepsilon(q_b) = q, \qquad \varepsilon(a) = \varepsilon(d) = 1, \quad \varepsilon(b) = \varepsilon(c) = 0 \quad . \end{gathered}$$

Ainsi, $\mathcal{L}_0$ est muni d'une structure de k-bigébroïde de base B. Soit $\delta = ad - q_s^{-1}bc \in \mathcal{L}_0$. Alors $\mathcal{L}_0\,\delta = \delta\,\mathcal{L}_0$, $\Delta(\delta) = \delta \otimes \delta$, et $\varepsilon(\delta) = 1$. Soit $\mathcal{L}$ l'algèbre $\mathcal{L}_0[\delta^{-1}]$. Alors $\mathcal{L}$ hérite de $\mathcal{L}_0$ une structure de k-bigèbroïde de base B. En outre, il existe un anti-homomorphisme d'algèbres unique i de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{L}$ vérifiant :

$$\begin{gathered} i(p_s) = p_b, \quad i(q_s) = q_b, \quad i(p_b) = p_s, \quad i(q_b) = q_s, \\ i(a) = d\delta^{-1}, \quad i(b) = -q_b b\delta^{-1}, \quad i(c) = -q_s^{-1}c\delta^{-1}, \quad i(d) = q_s^{-1}q_b a\delta^{-1}, \end{gathered}$$

et c'est un antipode bijectif de $\mathcal{L}$.

Ainsi, $\mathcal{L}$ est un k-bigébroïde de Hopf de base B : c'est l'exemple de Maltsiniotis.

Remarque. Soient p_0 et q_0 deux éléments non nuls de k, et $j_0 : B \longrightarrow k$ le morphisme d'algèbres défini par $p \longrightarrow p_0$ et $q \longrightarrow q_0$. Alors la k-bigèbre de Hopf $j_{0*}\mathcal{L}$ n'est autre que le groupe quantique $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,q_0}$.

Notons que $\mathcal{L}$ ne peut pas être transitif : à cause de la relation $p_s q_s = p_b q_b$, l'unité $B \otimes_k B \longrightarrow \mathcal{L}$ n'est pas injective. On peut y remédier de la façon suivante.

Soient r un élément non nul de k, et $B_r = B/(pq = r)$. Soit $\mathcal{L}_r$ le k-bigébroïde de Hopf de base B_r obtenu à partir de $\mathcal{L}$ par changement de base (autrement dit, en ajoutant la relation $r = p_s q_s (= p_b q_b)$). Alors $\mathcal{L}_r$ est transitif. (En effet, on vérifie que $\mathcal{L}_r$

est un $B_r \otimes_k B_r$-module libre admettant pour base la famille des monômes de la forme $a^j b^k c^l d^m \delta^{-n}$, où $(j,k,l,m,n) \in \mathbb{N}^4$ avec $inf(j,m) = 0$ ou $n = 0$.)

Si $p_1 q_1 = p_2 q_2 = r$, $\mathsf{Gl}(2)_{p_1,q_1}$ et $\mathsf{Gl}(2)_{p_2,q_2}$ s'obtiennent à partir de $\mathcal{L}_r$ par changement de base : ils sont donc quantiquement isomorphes. $\square$

Remarque. La bigèbre de Hopf $\mathsf{Gl}(2)_{p_0,p_0^{-1}}$ n'est pas commutative si $p_0 \neq 1$; or elle est, d'après la proposition, quantiquement isomorphe à $\mathsf{Gl}(2)_{1,1}$, qui est une bigèbre de Hopf commutative.

Il me semble que la morale de tout ceci est qu'il faudra considérer un groupe quantique non comme la donnée d'une bigèbre de Hopf, mais comme la donnée d'une classe d'isomorphisme quantique de bigèbres de Hopf (ce qui revient à se donner la catégorie de ses représentations de type fini). Naturellement, il faudra faire des hypothèses plus fortes que cela, si on veut eviter des objets trop pathologiques : vraisemblablement, il faudra supposer que la catégorie des représentations soit un “tortil” (c'est-à-dire qu'elle soit tressée et balancée [4]).

8—Deux cas particuliers

Le cas des bigèbres de Hopf

Soit k un corps algébriquement clos, $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome. Si $\mathcal{T}$ admet un foncteur fibre non trivial ω sur un k-schéma S de type fini, alors elle admet un foncteur fibre sur $\mathsf{Spec}(k)$, car S a au moins un point à valeurs dans k.

Le théorème 7.1. et la proposition 7.4. prennent la forme suivante lorsque la base B est réduite au corps de base k.

Théorème 8.1. *Soit k un corps commutatif.*

1) Soit $\mathcal{T}$ une catégorie k-tensorielle autonome (essentiellement petite) et ω un foncteur fibre de $\mathcal{T}$ sur $\mathsf{Spec}(k)$. Alors ω induit une équivalence de catégories monoïdales

$$\widetilde{\omega} : \mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{rep}(\mathsf{Aut}_k(\omega))$$

qui s'étend en une équivalence de catégories monoïdales

$$\mathsf{Ind}(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathsf{Rep}(\mathsf{Aut}_k(\omega)) \quad .$$

En outre, la k-bigèbre de Hopf $\mathsf{Aut}_k(\omega)$ est de type fini comme k-algèbre si et seulement si $\mathcal{T}$ est de type $\otimes$-fini.

2) Si $\mathcal{L}$ est une k-bigèbre de Hopf non nulle, et U le foncteur oubli de $\mathsf{rep}(\mathcal{L})$ vers $\mathsf{vect}(k)$, le morphisme naturel $\mathsf{Aut}_k(U) \longrightarrow \mathcal{L}$ est un isomorphisme de k-bigèbres. $\square$

Remarque. Cette situation a déja été étudiée en détail, voir notemment [5], [6], [8], [11], [12], [13], [14]. Il est important de noter que la démonstration directe du théorème 8.1. est beaucoup plus simple que celle du théorème 7.1. La raison en est qu'une k-cogèbre est toujours un k-cogébroïde géométriquement semi-transitif, car un module sur un corps est toujours projectif.

L'intérêt du théorème 7.1. est ailleurs. D'une part, il permet de traîter les cas où il n'existe pas de foncteur fibre sur $\mathsf{Spec}(k)$; cela peut se produire notamment lorsque k n'est pas algébriquement clos. D'autre part, il permet de travailler sur des familles de bigèbres de Hopf dépendant d'un ou plusieurs paramètres, comme dans l'exemple de Maltsiniotis (section 7) : on peut voir un bigébroïde de Hopf transitif comme la donnée d'une famille de bigèbres de Hopf deux à deux quantiquement isomorphes.

Les résultats tannakiens classiques.

Les résultats tannakiens classiques se formulent en termes de k-groupoïdes algébriques, et non de k-bigébroïdes. Il s'agit maintenant de faire le lien entre ces notions : les résultats classiques seront alors conséquence du théorème 7.1. (au moins pour k parfait).

Soit k un corps commutatif. Un *k-groupoïde (algébrique)* est un groupoïde dans la catégorie des k-schémas.

De façon explicite, c'est la donnée

— de deux k-schémas G et S,
— de deux morphismes s et b de G vers S appelés respectivement *source* et *but*,
— d'un morphisme de $S \times S$-schémas $\circ : {}_bG_s \times_S {}_bG_s \longrightarrow {}_bG_s$ appelé *composition*,

astreinte à la condition que nous allons maintenant formuler.

Soit T un k-schéma. On note $G(T)$ et $S(T)$ l'ensemble des morphismes de T vers G et S respectivement. Alors s et b induisent des applications s_T, b_T de $G(T)$ vers $S(T)$, et $\circ$ induit une loi de composition $\circ_T$ partiellement définie sur $G(T)$. On demande que pour tout T, ces données définissent un petit groupoïde (ensembliste) $\mathcal{G}(T)$ dont les flèches sont les éléments de $G(T)$ et les objets, les éléments de $S(T)$. Ainsi on définit un foncteur contravariant $\mathcal{G}$ de la catégorie des k-schémas vers la catégorie des petits groupoïdes.

Le k-groupoïde sera généralement désigné par la seule lettre G; le schéma S est la *base* du groupoïde.

Le k-groupoïde G est dit *affine* si le morphisme $(s,b) : G \longrightarrow S \times S$ est affine. Il est dit *transitif* si (s,b) est couvrant pour la topologie fpqc.

À présent, soit B une k-algèbre commutative, $S = \mathsf{Spec}\, B$, et G un k-groupoïde affine de base S. Alors la k-algèbre $\mathcal{L} = \mathcal{O}(G)$ est naturellement munie d'une structure de k-bigébroïde de Hopf commutatif de base B. Réciproquement, si $\mathcal{L}$ est un k-bigébroïde de Hopf commutatif de base B, alors $G = \mathsf{Spec}\, \mathcal{L}$ devient naturellememt un k-groupoïde affine de base $S = \mathsf{Spec}\, B$.

En outre, lorsque G et $\mathcal{L}$ se correspondent ainsi, la donnée d'une représentation de G est équivalente à la donnée d'un $\mathcal{L}$-comodule à droite. Tout morphisme de schémas affines $p : T \longrightarrow S$ définit par changement de base un k-groupoïde de base T noté p^*G; à toute représentation de G correspond fonctoriellement une représentation de p^*G notée p^*V.

Théorème 8.2. *Soit $\mathcal{L}$ un k-bigébroïde de Hopf commutatif de base $B \neq 0$, et G le k-groupoïde associé. Alors G est transitif si et seulement si $\mathcal{L}$ est géométriquement transitif.*

Démonstration du théorème. Conservons les notations ci-dessus. Rappelons que si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme de k-schémas affines, f est couvrant pour la topologie fpqc si et seulement s'il existe T affine et un morphisme $g : T \longrightarrow X$ tel que T soit fidèlement plat sur Y ; c'est en particulier le cas si X lui-même est fidèlement plat sur Y. Or si $\mathcal{L}$ est géométriquement transitif, il est fidèlement plat sur $B \otimes_k B$, d'après (7.3.), et donc G est transitif.

Supposons à présent G transitif, et montrons que $\mathcal{L}$ est géométriquement transitif si $B \neq 0$. Si K est une extension de k, le K-groupoïde $G_K = \mathsf{Spec}\,\mathcal{L}_K$, obtenu à partir de G par changement de scalaires, est encore un K-groupoïde transitif; de sorte qu'en vertu de (7.3.), il suffit de montrer que $\mathcal{L}$ est transitif.

Or il résulte de la transitivité de G que l'unité $\eta : B \otimes_k B \longrightarrow \mathcal{L}$ est injective; on a donc $\mathsf{End}(I) = k$ si $B \neq 0$. Il suffit donc de vérifier que le k-cogébroïde L sous-jacent à $\mathcal{L}$ satisfait aux conditions $\mathsf{ST1}$ et $\mathsf{ST2}$. Cela reposera sur le lemme suivant.

Lemme 8.3. *Soit G un k-groupoïde affine transitif de base S. Soit $\mathcal{P}$ une propriété de S-schémas affines. On suppose que $\mathcal{P}$ verifie les conditions suivantes :*
(1) soit $p : T \longrightarrow S$ et $q : T' \longrightarrow T$; alors $\mathcal{P}(p) \Rightarrow \mathcal{P}(pq)$;
(2) avec les mêmes notations, si q est fidèlement plat, alors $\mathcal{P}(pq) \Rightarrow \mathcal{P}(p)$;
(3) soit T un k-schéma affine, et p, q deux morphismes de T vers S, c'est-à-dire deux éléments de $S(T)$. Si p et q sont isomorphes dans $\mathcal{G}(T)$, alors $\mathcal{P}(p) \Leftrightarrow \mathcal{P}(q)$;

Alors si $\mathcal{P}$ est vérifiée par un S-schéma affine non vide, elle est vérifiée par tous.

Démonstration du lemme. Soit T un schéma affine, et α_1, α_2 deux éléments de $S(T)$. Nous dirons que α_1 et α_2 sont *localement isomorphes (au sens fpqc)* s'il existe un schéma affine T' et un morphisme q de T' vers T tel que T' soit fidèlement plat sur T, et que $\alpha_1 q$ et $\alpha_2 q$ soient isomorphes dans $\mathcal{G}(T')$.

Si α_1 et α_2 sont localement isomorphes, alors $\mathcal{P}(\alpha_1) \Leftrightarrow \mathcal{P}(\alpha_2)$.

Montrons que lorsque G est transitif, deux éléments de $S(T)$ sont toujours localement isomorphes. La transitivité se traduit par l'existence d'un schéma affine Z et d'un morphisme $Z \longrightarrow G$ de telle sorte que Z soit fidèlement plat sur $S \times S$. Soit pr_1, pr_2 les deux projections de $S \times S$ sur S, et ϕ le morphisme de Z vers $S \times S$. Le fait que ϕ se relève à G signifie que $pr_1\phi$ et $pr_2\phi$ sont isomorphes dans $\mathcal{G}(Z)$. Ainsi, pr_1 et pr_2 sont localement isomorphes. Soit à présent α_1, $\alpha_2 \in S(T)$; alors $\alpha_i = pr_i(\alpha_1, \alpha_2)$, donc α_1 et α_2 sont localement isomorphes.

Considérons T_1, T_2 deux schémas affines, et $q_1 \in S(T_1)$, $q_2 \in S(T_2)$. Soit $T = T_1 \times T_2$, p_i la projection de T sur T_i, $\alpha_i = q_i p_i$ (pour $i = 1,\ 2$). Alors $\mathcal{P}(q_i) \Leftrightarrow \mathcal{P}(\alpha_i)$ et $\mathcal{P}(\alpha_1) \Leftrightarrow \mathcal{P}(\alpha_2)$, d'où le lemme.$\square$

Nous allons utiliser ce lemme à trois reprises.

Étant donné un S-schéma affine $p : T \longrightarrow S$, et une représentation V de G, soit $\mathcal{P}$ la propriété : p^*V est un $O(T)$-module plat.

Il est clair que la propriété $\mathcal{P}$ vérifie les conditions (1), (2), (3) du lemme; elle est vraie lorsque T est le spectre d'un corps; elle est donc toujours vraie. Ainsi toute représentation de G est plate sur S;

En appliquant ceci à $\mathcal{L} = \mathcal{O}(G)$, on voit que G est plat à droite sur S, et à gauche aussi par raison de symétrie. Or pour tout S-schéma $p : T \longrightarrow S$, le k-groupoïde p^*G est encore transitif de base T; on en déduit que p^*G est plat à droite et à gauche sur T.

Soit à présent V une représentation de type fini de G, et $\mathcal{P}$ la propriété : p^*V est un $\mathcal{O}(T)$-module projectif de type fini.

Le raisonnement ci-dessus s'applique, le seul point délicat étant de s'assurer que $\mathcal{P}$ vérifie (2), ce qui résulte immédiatement du lemme classique suivant.

Lemme. *Soit A un anneau commutatif et B une A-algèbre fidèlement plate. Soit N un A-module. Si $N \otimes_A B$ est projectif de type fini sur B, N est projectif de type fini sur A.*

Démonstration. Soit $N_B = N \otimes_A B$, et supposons N_B projectif de type fini. Il est en particulier plat, et comme B est fidèlement plat sur A, N est plat. D'autre part N_B est de présentation finie, donc N aussi en vertu de (3.6.). Or un module de type fini sur un anneau commutatif est projectif si et seulement s'il est plat et de présentation finie, d'où le lemme. $\square$

On en déduit que $\mathcal{P}$ est toujours vraie, et donc L vérifie $\mathsf{ST1}$.

De même, soit V une représentation quelconque de G, et $\mathcal{P}$ la propriété : p^*V est limite inductive filtrante de sous-représentations de type fini.

Là encore, on fait le même raisonnement, et la seule difficulté est de montrer que $\mathcal{P}$ vérifie la condition (2); or pour tout S-schéma affine $p : T \longrightarrow S$, p^*G est plat à gauche sur T. D'après la proposition 3.7, tout morphisme fidèlement plat de schémas affines $q : T' \longrightarrow T$ induit une équivalence de catégories q^* entre les représentations de p^*G et celles de $(pq)^*G$; de plus les représentations de type fini se correspondent par q^*; d'où la condition (2). Lorsque T est le spectre d'un corps, $\mathcal{P}$ est vraie en vertu de (3.3.); par conséquent $\mathcal{P}$ est toujours vraie, et donc L vérifie $\mathsf{ST3}$, d'où le théorème 8.2. $\square$

Remarque. Pour un groupoïde, la transitivité s'exprime en termes de fidèle platitude; l'essentiel de la démonstration ci-dessus consiste à vérifier que, dans le cas commutatif, un k-bigébroïde de Hopf fidèlement plat sur $B \otimes_k B$ est projectif sur $B \otimes_k B$. J'ignore si cette propriété reste vraie lorsque le bigébroïde n'est plus supposé commutatif. (La démonstration ci-dessus n'est plus valable dans ce cas.) Cependant, je crois que la définition de la transitivité d'un bigébroïde de Hopf donnée dans la section 7 est la bonne dans la mesure où elle est issue de la théorie des cogébroïdes.

Références bibliographiques.

[1] L. Breen, *Tannakian Categories*, preprint (1992).

[2] P. Deligne, Catégories tannakiennes, in *The Grothendieck Festschrift*, II, Progress in Mathematics **87**, Birkhäuser, pp. 111–195 (1990).

[3] P. Deligne et J. S. Milne, *Tannakian Categories* in *Hodge Cycles, Motives, and Shimura Varieties*, Lecture Notes in Mathematics **900**, Springer Verlag, pp. 101–228 (1982).

[4] A. Joyal et R. Street, *An Introduction to Tannaka Duality and Quantum Groups*, in *Category Theory (Proceedings Como 1990)* Lecture Notes in Mathematics **1488**, pp. 413-492 (1991).

[5] V. Lyubashenko, *Tangles and Hopf Algebras in Braided Categories*, preprint (1991).

[6] V. Lyubashenko, *Modular Transformations for Tensor Categories*, preprint (1992).

[7] S. MacLane , *Categories for the Working Mathematician*, Graduate Texts in Math. **5**, Springer Verlag (1971).

[8] S. Majid, *Reconstruction Theorems and Rational Conformal Field Theories*, preprint DAMTP/89-40 (1989).

[9] G. Maltsiniotis, *Groupoïdes quantiques*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **314**, Série I, pp. 249–252 (1992).

[10] N. Saavedra Rivano, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Mathematics **265**, Springer Verlag (1972).

[11] P. Schauenburg, *Tannaka Duality for Arbitrary Hopf Algebras*, Algebra Berichte **66**, Verlag Reinhard Fischer, München (1992).

[12] K.–H. Ulbrich, *On Hopf Algebras and Rigid Monoidal Categories*, Israel J. Math. **72**, pp. 225–256 (1990).

[13] K.–H. Ulbrich, *Tannakian Categories for Non-Commutative Hopf Algebras*, preprint.

[14] D. N. Yetter, *Coalgebras, Comodules, Coends and Reconstruction*, preprint.