Chapitre 2 : Espaces vectoriels

Dans l'ensemble de ce chapitre, on fixe une fois pour toute un corps $\mathbb{K}$.
Stricto sensu, on devrait écrire $(\mathbb{K}, +, 0, \times, 1)$.

Lois de composition externe

2.1 **Définition :** Une loi de composition externe est une application $\bullet : F \times E \to E$.
On dit aussi que F opère sur E.

2.2 **Remarque :** La définition donnée ci-dessus est celle de loi de composition externe à gauche. On ne parlera pas ici de loi de composition externe à droite, mais l'histoire est complètement similaire.

2.3 **Exemples :**
- l'ensemble $M_n(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n \times n$ opère, via le produit des matrices, sur l'ensemble $M_{n\times m}(\mathbb{K})$ des matrices de taille $n \times m$.
- l'ensemble $\mathbb{K}$ (dont les éléments seront appelés les scalaires) opère sur $\mathcal{F}(X,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^X$ pour tout ensemble X de la manière suivante :
$$(\lambda \bullet f)(x) = \lambda \times f(x) \quad (\text{ici } f : X \to \mathbb{K},\ x \in X \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}).$$
L'exemple précédent couvre un vaste nombre de cas :
  - si $X = \{1, \dots, n\}$, alors $\mathbb{K}^X = \mathbb{K}^n$.
  - si $X = \mathbb{N}$, alors $\mathbb{K}^X$ est l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.
  - si $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$, alors $\mathbb{K}^X = M_{m\times n}(\mathbb{K})$.
  - si $X = \mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors $\mathbb{K}^X$ est l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle.
- l'ensemble des applications $Y \to Y$ opère, via la composition usuelle, sur l'ensemble des applications $X \to Y$.

Dans la suite de ce chapitre, on s'intéresse à la situation où $\mathbb{K}$ opère sur un ensemble E qui s'avère aussi être un groupe abélien, en vérifiant quelques propriétés très naturelles.
au sens où elles reproduisent les propriétés de la multiplication scalaire sur les vecteurs.

Espaces vectoriels : définition, exemples, et premières propriétés

2.4 **Définition :** un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (aussi appelé "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$", ou simplement "espace vectoriel" lorsqu'il n'y a pas de confusion possible

2.4 Définition : un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** (aussi appelé "espace vectoriel sur $\mathbb{K}$", ou simplement "espace vectoriel" lorsqu'il n'y a pas de confusion possible sur le choix de $\mathbb{K}$) est un groupe abélien $(E, +, 0_E)$ muni d'une loi de composition externe $\bullet : \mathbb{K} \times E \to E$ satisfaisant les propriétés qui suivent :

1) distributivité à gauche de $\bullet$ sur la loi $+$ de E :
$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \quad \lambda \bullet (u+v) = \lambda \bullet u + \lambda \bullet v$.

2) distributivité à droite de $\bullet$ sur la loi $+$ de $\mathbb{K}$:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad (\lambda + \mu) \bullet u = \lambda \bullet u + \mu \bullet u$.

3) associativité mixte de $\bullet$ et $\times$:
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall u \in E, \quad (\lambda \times \mu) \bullet u = \lambda \bullet (\mu \bullet u)$.

4) 1 est neutre à gauche pour $\bullet$:
$\forall u \in E, \quad 1 \bullet u = u$.

Les éléments de E sont appelés **vecteurs** alors que ceux de $\mathbb{K}$ sont appelés **scalaires**.

2.5 Proposition : quels que soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, $\lambda \bullet u = 0_E$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$.

Démonstration : $\boxed{\Leftarrow}$

$$0 \bullet u = (0+0) \bullet u \underset{\text{par distributivité à droite}}{=} 0 \bullet u + 0 \bullet u, \text{ donc } 0_E = 0 \bullet u.$$

$$\lambda \bullet 0_E = \lambda \bullet (0_E + 0_E) \underset{\text{par distributivité à gauche}}{=} \lambda \bullet 0_E + \lambda \bullet 0_E, \text{ donc } 0_E = \lambda \bullet 0_E.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ supposons que $\lambda \bullet u = 0_E$ et que $\lambda \neq 0$.

$$\text{Alors } u = 1 \bullet u \underset{\mathbb{K}\text{ est un corps : tout élément non nul est inversible}}{=} (\lambda^{-1} \times \lambda) \bullet u \underset{\text{associativité mixte}}{=} \lambda^{-1} \bullet (\lambda \bullet u) = \lambda^{-1} \bullet 0_E \underset{\text{d'après ce qui précède}}{=} 0_E. \quad \square$$

2.6 Proposition : quels que soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, $(-\lambda) \bullet u = -(\lambda \bullet u) = \lambda \bullet (-u)$.

Démonstration : 1) $(-\lambda) \bullet u + \lambda \bullet u \underset{\text{distributivité à droite.}}{=} ((-\lambda) + \lambda) \bullet u = 0 \bullet u = 0_E$

Donc $(-\lambda) \bullet u$ est l'opposé de $\lambda \bullet u$ pour la loi $+$ de E : $(-\lambda) \bullet u = -(\lambda \bullet u)$.

2) $\lambda \bullet (-u) + \lambda \bullet u \underset{\text{distributivité à gauche.}}{=} \lambda \bullet ((-u) + u) = \lambda \bullet 0_E = 0_E$

Donc $\lambda \bullet (-u) = -(\lambda \bullet u)$.

⚠ On a bien pris soin d'avoir une notation différente pour le neutre des deux

⚠ On a bien pris soin d'avoir une notation différente pour le neutre des deux lois + (0 pour celle de $\mathbb{K}$, 0_E pour celle de E). Néanmoins ces deux lois sont désignées par le même symbole et il faut faire attention.

ON NE DOIT JAMAIS ECRIRE "$\lambda + u$" avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (scalaire) et $u \in E$ (vecteur).

$\boxed{2.7}$ **Exemples :** si X est un ensemble, alors $\mathbb{K}^X = \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel avec la loi de composition externe donnée dans l'exemple $\boxed{2.3}$.

Démonstration : 1) on a déjà vu au chapitre précédent que c'est un groupe abélien avec la loi définie par $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

2) vérifions la distributivité à gauche : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, f, g : X \to \mathbb{K}, x \in X$:

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot (f+g))(x) &= \lambda \times ((f+g)(x)) = \lambda \times (f(x) + g(x)) \\ &= \lambda \times f(x) + \lambda \times g(x) = (\lambda \cdot f)(x) + (\lambda \cdot g)(x) \\ &= (\lambda \cdot f + \lambda \cdot g)(x)\end{aligned}$$

3) vérifions la distributivité à droite : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f : X \to \mathbb{K}, x \in X$:

$$\begin{aligned}((\lambda+\mu) \cdot f)(x) &= (\lambda + \mu) \times f(x) = \lambda \times f(x) + \mu \times f(x) \\ &= (\lambda \cdot f)(x) + (\mu \cdot f)(x) = (\lambda \cdot f + \mu \cdot f)(x)\end{aligned}$$

4) vérifions l'associativité mixte : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, f : X \to \mathbb{K}, x \in X$:

$$\begin{aligned}((\lambda \times \mu) \cdot f)(x) &= (\lambda \times \mu) \times f(x) = \lambda \times (\mu \times f(x)) \\ &= \lambda \times ((\mu \cdot f)(x)) = (\lambda \cdot (\mu \cdot f))(x).\end{aligned}$$

5) vérifions la neutralité à gauche de 1 : $\forall f : X \to \mathbb{K}, x \in X$:

$$(1 \cdot f)(x) = 1 \times f(x) = f(x).$$

□

Cette démonstration ne comporte pas de difficulté mais il est indispensable que vous sachiez justifier chaque égalité par une des propriétés du corps $\mathbb{K}$ ou par la définition de la loi $\cdot$ et de la loi $+$ sur E.

Dans la suite, on ne sera plus aussi détaillé.

Comme conséquences, on obtient que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de même que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, les matrices $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, ...

Sous-espaces vectoriels

$\boxed{2.8}$ **Définition :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$ une partie. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si c'est un sous-groupe qui est stable par la loi de composition externe $\cdot$.

F stable par la loi de composition externe signifie que : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F, \lambda \cdot u \in F$.

$\boxed{2.9}$ **Proposition :** Si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E, alors les lois induites font de F un espace vectoriel.

La démonstration est laissée en exercice.

$\boxed{2.10}$ **Proposition :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $F \subset E$ une partie. Les assertions qui suivent sont équivalentes :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E.

qui suivent sont équivalentes :

(i) F est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) F est non-vide et est stable par $+$ et par $\bullet$.

(iii) $0_E \in F$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall u,v \in F$, $\lambda \bullet u + v \in F$.

Démonstration : $\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$: Supposons que $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel.
En particulier F est un sous-groupe donc $0_E \in F$.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$ alors $\lambda \bullet u \in F$ (stabilité par $\bullet$)
et donc $\lambda \bullet u + v \in F$ (F sous-groupe).

$\boxed{(iii) \Rightarrow (ii)}$: Comme $0_E \in F$ par hypothèse (iii), alors $F \neq \emptyset$.
F stable par $+$: $\forall u, v \in F$, $u + v = 1 \bullet u + v \in F$ (d'après (iii)).
F stable par $\bullet$: $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in F$, $\lambda \bullet u = \lambda \bullet u + 0_E \in F$

(iii) nous dit que $0_E \in F$ — d'après (iii) également.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$: On sait par hypothèse (ii) que F est stable par $\bullet$, donc il suffit de montrer que F est un sous-groupe.
Mais l'hypothèse (ii) garantit que F est non-vide et stable par $+$, il suffit donc de montrer que F est stable par passage à l'opposé :
$\forall u \in F$, $-u = (-1) \bullet u \in F$. $\square$

2.11 Exemples :

- l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des suites presques nulles est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. (polynômes)
  En effet, c'est une partie non-vide, stable par $+$ et par $\bullet$.
- l'ensemble $\mathbb{K}[X]_n$ des suites nulles à partir du rang $n+1$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ → à faire en exercice. (polynômes de degré $\leq n$)
- l'ensemble $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- $\{0_E\} \subset E$ est un sous-espace vectoriel de E.
- E est un sous-espace vectoriel de lui-même.

2.12 Proposition : Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $F_1, F_2 \subset E$ sont deux sous-espaces vectoriels, alors $F_1 \cap F_2$ est un sous-espace vectoriel.

Démonstration :

- $0_E \in F_1 \cap F_2$ car $0_E \in F_1$ et $0_E \in F_2$.
- si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F_1 \cap F_2$ alors $\lambda u + v \in F_1$ et $\lambda \bullet u + v \in F_2$
  donc $\lambda \bullet u + v \in F_1 \cap F_2$. $\square$

2.13 Exemple : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n variables et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Rappel : un système de m équations linéaires homogènes à n variable vectoriel de $\mathbb{K}^n$.

Rappel: un système de m équations linéaires homogènes à n variable est de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

avec $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $x_1, \dots, x_n$ les variables inconnues.

Sous forme matricielle, on pose $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

et le système s'écrit $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =: 0_{\mathbb{K}^n}$

L'ensemble des solutions $S_A := \{X \in \mathbb{K}^n \mid AX = 0_{\mathbb{K}^n}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. En effet :

(a) $S_A \neq \emptyset$ car $0_{\mathbb{K}^n} \in S_A$.

(b) si U et V sont dans S_A et que $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$A \times (\lambda \cdot U + V) = \underbrace{A \times (\lambda \cdot U)}_{\lambda \cdot (\underbrace{A \times U}_{= 0_{\mathbb{K}^n}})} + \underbrace{A \times V}_{= 0_{\mathbb{K}^n}} = 0_{\mathbb{K}^n}.$$

Donc $\lambda \cdot U + V \in S_A$.

Remarque: $S_A \cap S_B = S_C$ avec $C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$.

2.14 ⚠ L'union de deux sous-espaces vectoriels n'est pas nécessairement un sous-espace vectoriel. En effet :

$E_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $E_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
Pourtant $E_1 \cup E_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, car cette partie n'est pas stable par $+$: $\underbrace{(1,0)}_{\in E_1} + \underbrace{(0,1)}_{\in E_2} = (1,1) \notin E_1 \cup E_2$.

2.15 Proposition: Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels.
$E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $E_1 \subset E_2$ ou $E_2 \subset E_1$.

Démonstration: $\boxed{\Leftarrow}$ si $E_1 \subset E_2$ alors $E_1 \cup E_2 = E_2$ est un sous-espace vectoriel.
et si $E_2 \subset E_1$ alors $E_1 \cup E_2 = E_1$ est un sous-espace vectoriel.

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel et supposons que $E_1 \not\subset E_2$, ce qui signifie qu'il existe $v \in E_1$ tel que $v \notin E_2$.
Montrons que $E_2 \subset E_1$.
Soit $u \in E_2$. Alors $u + v \in E_1 \cup E_2$ ($E_1 \cup E_2$ sous-espace vectoriel). Or $u + v \notin E_2$, car sinon $v = u + v - u \in E_2$, ce qui contredirait l'hypothèse que $v \notin E_2$.
Donc $u + v \in E_1$, et ainsi $u = u + v - v \in E_1$. □

2.16 Plutôt que leur union, on préfèrera faire la somme de deux sous-espaces vectoriels :

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $E_1, E_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. On définit :

$$E_1 + E_2 := \{u+v \mid u \in E_1, v \in E_2\}.$$

La somme de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel. En effet :

(a) $0_E \in E_1 + E_2$ (car $0_E \in E_1$ et $0_E \in E_2$, et donc $0_E = 0_E + 0_E \in E_1 + E_2$).

(b) si $u, u' \in E_1$ et $v, v' \in E_2$, alors $\lambda \cdot (u+v) + u' + v' = \underbrace{\lambda \cdot u + u'}_{\in E_1} + \underbrace{\lambda \cdot v + v'}_{\in E_2} \in E_1 + E_2$.

2.17 Si de surcroît $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ alors on dit que E_1 et E_2 sont en somme directe et on note $E_1 \oplus E_2$.

Exemples : dans $E = \mathbb{K}^4$: $\to \{0\} \times \mathbb{K}^2 \times \{0\} + \{(0,0)\} \times \mathbb{K}^2 = \{0\} \times \mathbb{K}^3$. La somme n'est pas directe !

$\to \mathbb{K}^2 \times \{(0,0)\} \oplus \{(0,0)\} \times \mathbb{K} \times \{0\} = \mathbb{K}^3 \times \{0\}$.

À faire en exercice

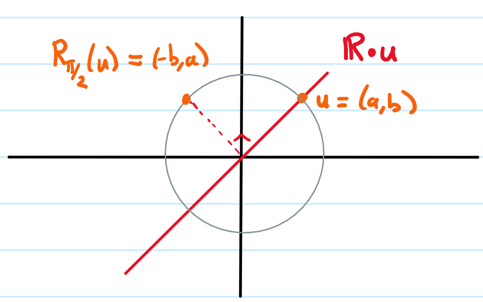
2.18 **Définition :** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Un supplémentaire de F dans E est un sous-espace vectoriel $G \subset E$ tel que $F \oplus G = E$.

Par exemple, $\mathbb{K} \times \{(0,0)\}$ est un supplémentaire de $\{0\} \times \mathbb{K}^2$ dans $\mathbb{K}^3$.

2.19 **Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$**

On a évidemment $\{(0,0)\}$ et $\mathbb{R}^2$. Quels sont les autres ?

Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un sous-espace vectoriel. On suppose que $E \neq \{(0,0)\}$, et on choisit $u \in E \setminus \{(0,0)\}$. Alors $\mathbb{R} \cdot u = \{\lambda \cdot u \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset E$ est un sous-espace vectoriel :



Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R} \cdot u$ peut être décrit comme le sous-espace vectoriel des solutions d'une équation linéaire homogène :

$$\mathbb{R} \cdot u = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -b \times x + a \times y = 0\} = S_{(-b\ a)}.$$

On remarque que $\mathbb{R} \cdot u = \mathbb{R} \cdot v$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ t.q. $\lambda \cdot u = v$.

[On appelle "droites vectoriels" les sous-espaces vectoriels de la forme $\mathbb{K} \cdot u$, pour $u \neq 0_E$.]

Y a-t-il d'autres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Revenons à E, et supposons que $\mathbb{R} \cdot u \subsetneq E$. Il existe alors

Y a-t-il d'autres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
Revenons à E, et supposons que $\mathbb{R}\cdot u \subsetneq E$. Il existe alors $v \in E \setminus \mathbb{R}\cdot u$. Par conséquent, $\mathbb{R}\cdot u + \mathbb{R}\cdot v \subset E$, et de surcroît la somme est directe (← à montrer en exercice).

Montrons que $\mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v = \mathbb{R}^2$

Démonstration 1 : posons $M := (u\ v) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ $\left(u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)$.

On observe que $M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{pmatrix} = x\cdot u + y \cdot v$

Comme u et v ne sont pas proportionnel, $ad \neq bc$ (produit en croix), et donc $ad - bc \neq 0$. On en déduit que M est inversible d'inverse $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ (← vérifier en exercice).

Considérons $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ et posons $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Alors $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M M^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot u + y \cdot v \in \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}\cdot v$. $\square$

Démonstration 2 : Notons $w = R_{\pi/2}(u) = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\cdot u \Leftrightarrow \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \right\rangle = 0$.

en effet : $\left\langle v - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\cdot w, w \right\rangle = 0$

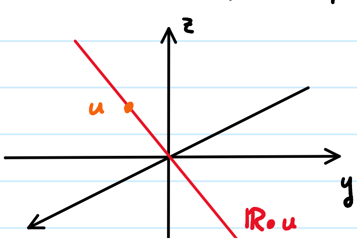
Par conséquent, $v - \frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\cdot w \in \mathbb{R}\cdot u$

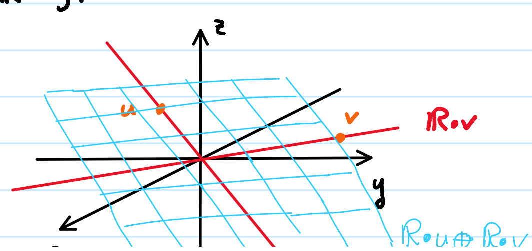
Ainsi, si $v \notin \mathbb{R}\cdot u$, alors $\langle v,w\rangle \neq 0$ et donc
$$w = \frac{\|w\|^2}{\langle v,w\rangle}\cdot \Big(\underbrace{\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|^2}\cdot w - v}_{\in \mathbb{R}\cdot u} + \underbrace{v}_{\in \mathbb{R}\cdot v} \Big) \in \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v.$$

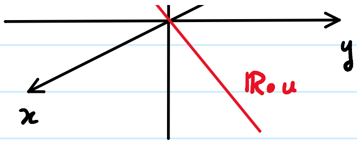
Quel que soit $z \in \mathbb{R}^2$, $z = \underbrace{\frac{\langle z,u\rangle}{\|u\|^2}\cdot u}_{\in \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v} + \underbrace{\frac{\langle z,w\rangle}{\|w\|^2}\cdot w}_{\in \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v} \in \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v$. $\square$

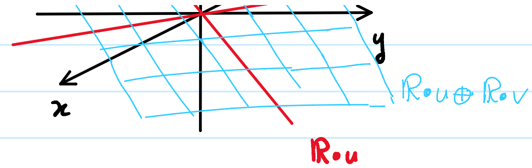
2.20 Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$

Comme précédemment, on a $\{(0,0,0)\}$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}\cdot u$ (u non nul) et $\mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v$ (u, v non nuls et $u \neq \lambda \cdot v$ quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$).









Remarques :

→ le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\cdot u$ peut être décrit comme le sous-espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène : si $u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, alors $\mathbb{R}\cdot u = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -bx + ay = 0 \text{ et } -cy + bz = 0\} = S_{\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ 0 & -c & b \end{pmatrix}}$.

→ le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v$ peut être décrit comme le sous-espace vectoriel des solutions d'une équation linéaire homogène : si $u \wedge v = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$

$$= S_{(a\ b\ c)}.$$

Y a-t-il d'autres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

Supposons que $E \subset \mathbb{R}^3$ soit un sous-espace vectoriel tel que $\mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v \subsetneq E$.

Alors il existe $w \in E \setminus \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v$.

Montrons que $\mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v \oplus \mathbb{R}\cdot w = \mathbb{R}^3$.

Démonstration : rappelons pour commencer que $z \in \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v \Leftrightarrow \langle z, u\wedge v\rangle = 0$.

Donc $\langle w, u\wedge v\rangle \neq 0$. Ainsi

$$u \wedge v = \frac{\|u\wedge v\|^2}{\langle w, u\wedge v\rangle} \cdot \Big(\underbrace{\frac{\langle w, u\wedge v\rangle}{\|u\wedge v\|^2} u\wedge v - w}_{\in\, \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v} + \underbrace{w}_{\in\, \mathbb{R}\cdot w} \Big) \in \mathbb{R}u \oplus \mathbb{R}v \oplus \mathbb{R}w.$$

Quel que soit $z \in \mathbb{R}^3$,
$$z = \underbrace{z - \frac{\langle z, u\wedge v\rangle}{\|u\wedge v\|^2} u\wedge v}_{\in\, \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v} + \underbrace{\frac{\langle z, u\wedge v\rangle}{\|u\wedge v\|^2} u\wedge v}_{\in\, \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v \oplus \mathbb{R}\cdot w}.$$

Donc $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\cdot u \oplus \mathbb{R}\cdot v \oplus \mathbb{R}\cdot w$. $\square$