Chapitre 2 : Espaces vectoriels (2ème partie)

Dans cette partie, on fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Colinéarité

2.21 **Définition** : deux vecteurs $u, v \in E$ sont dits **colinéaires** si il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tels que $\lambda u = \mu v$.

On observe que le vecteur nul 0_E est colinéaire à tous les autres vecteurs de E.
Si $u \neq 0_E$ alors $\{v \in E \mid v \text{ et } u \text{ colinéaires}\} = \mathbb{K} \cdot u$.

Démonstration : $\boxed{\supset}$ si $v \in \mathbb{K} \cdot u$ alors $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ t.q. $v = \lambda \cdot u$
et donc $\lambda \cdot u = 1 \cdot v$.

$\boxed{\subset}$ si $\lambda \cdot u = \mu \cdot v$ alors

→ soit $v = 0_E$, donc $v = 0 \cdot u \in \mathbb{K} \cdot u$.

→ soit $v \neq 0_E$, auquel cas $\lambda \neq 0$ et $\mu \neq 0$.
Donc $v = \dfrac{\lambda}{\mu} \cdot u \in \mathbb{K} \cdot u$. $\square$

2.22 **Vocabulaire** : on dit aussi que la paire (u,v) est **liée** lorsque u et v sont colinéaires.
on dit que (u,v) est **libre** lorsque u et v ne sont pas colinéaires.
On a donc (u,v) libre si et seulement si $\lambda u = \mu v \Rightarrow \lambda = \mu = 0$.

2.23 **Exemple** [colinéarité dans $\mathbb{K}^n$] : commençons par le cas $n = 2$.

$$\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\ (\lambda,\mu) \neq (0,0) \iff \underset{\times \mu/\lambda}{\overset{\times \lambda/\mu}{\begin{array}{c|c} a & c \\ \hline b & d \end{array}}} \text{ ou } \iff ad = bc \iff \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \text{ pas inversible.}$$

Plus généralement $u = (a_1, \dots, a_n)$ et $v = (b_1, \dots, b_n)$ sont colinéaires si et seulement si pour tous $1 \leq i \neq j \leq n$ $a_i b_j = a_j b_i$.

2.24 **Exemple** [colinéarité sur $\mathbb{F}_2$] : on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ est le corps à 2 éléments.
Deux vecteurs u et v non nuls sont colinéaires si et seulement si ils sont égaux.

Démonstration : $\boxed{\Leftarrow}$: $u = v \Rightarrow u$ et v colinéaires (évident).

$\boxed{\Rightarrow}$: si $\lambda u = \mu v$ et que $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$,
alors $\lambda \neq \bar{0}$ et $\mu \neq \bar{0}$ [Rappel : $\mathbb{F} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$]

$\boxed{\Rightarrow}$: si $\lambda u = \mu v$ et que $u \neq 0_E$ et $v \neq 0_E$, alors $\lambda \neq \bar{0}$ et $\mu \neq \bar{0}$ [Rappel : $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$]
Donc $\lambda = \mu = \bar{1}$ et donc $u = v$.

Familles et combinaisons linéaires

Une **famille** de vecteurs indexée par un ensemble I et un élément $u = (u_i)_{i \in I} \in E^I$.

2.25 **Définition** : une famille de vecteurs $u = (u_i)_{i\in I} \in E^I$ est dite **liée** si il existe une famille de scalaires $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ vérifiant les propriétés qui suivent :
(a) les λ_i sont presque tous nuls.
(b) les λ_i ne sont pas tous nuls.
(c) $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E$.

- (a) signifie qu'il existe un ensemble fini $J \subset I$ tel que : $\forall i \notin J$, $\lambda_i = 0$.
- la somme du (c) est finie grâce à la condition (a). Une telle somme s'appelle une **combinaison linéaire** de la famille u.
- (b) signifie qu'on exclut le cas où tous les scalaires λ_i, qu'on appelle aussi les **coefficients** de la combinaison linéaire.
- On peut reformuler la définition comme suit : une famille u est liée si il existe une combinaison linéaire nulle dont les coefficients ne sont pas tous nuls.

  Une combinaison linéaire nulle est parfois appelée une **relation de dépendance linéaire**.

2.26 **Exemples** :
- $I = \{1\}$: une famille constituée d'un seul vecteur est liée si et seulement si il s'agit du vecteur 0_E.
- $I = \{1, 2\}$: une famille (u, v) constituée de deux vecteurs est liée si et seulement si u et v sont colinéaires. (en effet, quitte à changer μ en $-\mu$, on peut remplacer la contrainte $\lambda u = \mu v$ en $\lambda u + \mu v = 0$.
- $I = \{1, 2, 3\}$: • posons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  La famille (u_1, u_2, u_3) est liée dans $\mathbb{R}^3$ car $u_1 = \frac{1}{2} u_2 + u_3$ (et donc $u_1 - \frac{1}{2} u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$).
  • la famille $(\cos^2, \sin^2, 1)$ est liée

$u_1 = \frac{1}{2} u_2 + u_3$ (et donc $u_1 - \frac{1}{2} u_2 - u_3 = 0_{\mathbb{R}^3}$).

• la famille $(\cos^2, \sin^2, 1)$ est liée dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) - 1 = 0$.

$\boxed{2.27}$ **Remarques** :

→ une famille contenant le vecteur nul est toujours liée.

En effet : si $u_i = 0$ on pose $\lambda_i = 1$ et $\lambda_j = 0$ quel que soit $j \neq i$. On a bien $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E$.

→ une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Démonstration : $\boxed{\Leftarrow}$ supposons que $u_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j$, avec λ_j presque tous nuls.

Alors on pose $\lambda_i = -1$ et on obtient

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = -u_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j u_j = 0_E.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0_E$, avec λ_i presque tous nuls mais pas tous nuls : $\exists i_0 \in I$ t.q. $\lambda_{i_0} \neq 0$.

On a donc $\sum_{i \in I} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}} u_i = 0_E$.

Ainsi $u_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} \left(-\frac{\lambda_i}{\lambda_{i_0}}\right) u_i$. □

$\boxed{2.28}$ **Dans $\mathbb{K}^n$, comment vérifie-t-on si une famille de vecteurs est liée ou pas ?**

On s'intéresse uniquement au cas où la famille est finie : $I \simeq \{1, \dots, m\}$.
Autrement dit, on considère une suite finie $(u_1, \dots, u_m)$ de m vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
La famille $(u_1, \dots, u_m)$ est liée si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ tels que $(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \neq (0, \dots, 0)$ et $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = 0_{\mathbb{K}^n}$ (∗).

On rappelle que si $M = (u_1 \cdots u_m) \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ alors $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i = M \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$.

Donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est une solution de (∗) si et seulement si $M \times \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{K}^n}$.

Conséquence : $(u_1, \dots, u_m)$ liée $\Leftrightarrow$ $S_M \neq \{0_{\mathbb{K}^m}\}$.

Conséquence : $(u_1,\dots,u_m)$ liée $\Leftrightarrow$ $S_M \neq \{0_{\mathbb{K}^m}\}$.

Exemple : on cherche à savoir si, dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est liée. Pour cela, on s'intéresse aux solutions du système linéaire

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&5&1\\3&6&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1\\\lambda_2\\\lambda_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad (**)$$

$$\begin{pmatrix}1&4&2\\2&5&1\\3&6&0\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2-2L_1\\L_3-3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-3\\0&-6&-6\end{pmatrix} \underset{L_3+2L_2}{\sim} \begin{pmatrix}1&4&2\\0&-3&-3\\0&0&0\end{pmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_2}{\overset{L_1+L_2}{\sim}} \begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Donc $(**) \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3=0\\ \lambda_2+\lambda_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1=2\lambda_3\\ \lambda_2=-\lambda_3\end{cases}$

En particulier, $(2,-1,1)$ est une solution :

$$2\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} - 1\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

La famille est liée !

2.29 **Définition :** une famille qui n'est pas liée est dite **libre**.

Reformulations :

- $u=(u_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute combinaison linéaire nulle a tous ses coefficients nuls :

$$\sum_{i\in I}\lambda_i u_i = 0_E \Rightarrow \forall i\in I, \lambda_i=0.$$

- une famille est libre si aucun de ses vecteurs n'est combinaison linéaire des autres.

2.30 **Exemples :**

- dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(\cos,\sin)$ est libre.

  Démonstration : supposons que $\lambda\cdot\cos+\mu\cdot\sin=0$.
  Alors $\lambda=\lambda\cos(0)+\mu\sin(0)=0$.
  et $\mu=\lambda\cos(\frac{\pi}{2})+\mu\sin(\frac{\pi}{2})=0$. $\square$

- dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

→ dans $\mathbb{K}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Démonstration : étudions le système linéaire associé à la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & -3 & -1\\ 0 & -2 & -1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 1/3\\ 0 & 0 & -1/3\end{pmatrix}$$

L'ensemble des solutions est donc réduit au vecteur nul. La famille n'est pas liée ($\Leftrightarrow$ elle est libre). □

→ dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, \dots)$ est libre.

Démonstration : on rappelle que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, et que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, 0, 0, \dots)$$

Donc si $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i = 0$ alors $\lambda_0 = \dots = \lambda_n = 0$. □

Engendrement

Soit $A \subset E$ une partie.

2.31 **Définition** : on note **Vect(A)** l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A. On l'appelle le sous-espace vectoriel **engendré par A**.

On observe que $\mathrm{Vect}(A)$ est un sous-espace vectoriel de E.
On a vu que l'intersection de deux sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel, mais en réalité l'intersection $\bigcap_{i\in I} E_i$ d'une famille $(E_i)_{i\in I}$ de sous-espaces vectoriels est aussi un sous-espace vectoriel (y compris si I n'est pas fini).
$\mathrm{Vect}(A)$ est en fait le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A.

Si $u \in E^I$ est une famille de vecteurs, alors on définit
$$\mathrm{Vect}(u) := \mathrm{Vect}(\mathrm{Im}(u)) = \mathrm{Vect}\{u_i \mid i \in I\}.$$

2.32 **Proposition** : $\mathrm{Vect}(u)$ coïncide avec l'ensemble des combinaisons linéaires de u.

Démonstration : $\boxed{\supset}$: un sous-espace vectoriel est toujours stable par combinaisons linéaires de ses éléments. Comme $u_i \in \mathrm{Vect}(u)$ quel que soit $i \in I$, ...

Démonstration : $\boxed{\supset}$: Un sous-espace vectoriel est toujours stable par combinaisons linéaires de ses éléments. Comme $u_i \in \mathrm{Vect}(u)$ quel que soit $i \in I$, tout combinaison linéaire de u est dans $\mathrm{Vect}(u)$.

$\boxed{\subset}$: l'ensemble des combinaisons linéaires de u est un sous-espace vectoriel (← à montrer en exercice). Il contient tous les u_i, donc il contient $\mathrm{Vect}(u)$, car $\mathrm{Vect}(u)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant tous les u_i. □

Remarque : toute partie $A \subset E$ peut être vue comme une famille indexée par A : $(v)_{v \in A}$.

2.33 **Proposition :** Soient $F_1, F_2 \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Alors $\mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2) = F_1 + F_2$.

Démonstration : $\boxed{\supset}$: soit $u_1 \in F_1$, $u_2 \in F_2$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$.
Alors $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in F_1 + F_2$ est une combinaison linéaire d'éléments de $F_1 \cup F_2$, donc $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2)$.

$\boxed{\subset}$: $F_1 \cup F_2 \subset F_1 + F_2$, donc $\mathrm{Vect}(F_1 \cup F_2) \subset F_1 + F_2$. □

2.34 **Exemples :**
- $\mathrm{Vect}(\{v\}) = \mathbb{K} \cdot v$.
- $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
- si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel, alors $\mathrm{Vect}(F) = F$.
- Considérons $u_1 = (1, 0, 1)$ et $u_2 = (1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2) = \{(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2) \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$$

description paramétrique

$$= \{(x, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

description cartésienne

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$$

Interprétation matricielle : on cherche les $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ avec $(u_1, u_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z - x \end{pmatrix}$$

$\{\lambda_1 + \lambda_2 = x$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \quad z \quad \underset{L_3-L_1}{} \quad \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} \quad z-x$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y \\ 0 = z - x \end{cases}$$

→ poursuivons avec $u_3 = (0,1,0)$ et cherchons à déterminer $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$. On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underset{L_3-L_1}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_2 + \lambda_3 = y \\ 0 = z - x \end{cases}$$

Donc $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$.

→ variante avec $v_3 = (1,1,0)$: on cherche à déterminer $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_3)$. On a

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{M = PN} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \underset{L_3-L_1}{\rightsquigarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=N} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-x \end{pmatrix}}_{P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$

On remarque que N, et donc M, est inversible.

Donc $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} := M^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est tel que

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_3 = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Conclusion : $\mathrm{Vect}(u_1, u_2, v_3) = \mathbb{R}^3$.

$\boxed{2.35}$ Quelques observations importantes à tirer des 3 derniers exemples

- Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.

Pour savoir si $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est dans $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$, on cherche à déterminer si le système $M \times \lambda = v$ admet (au moins) une solution, où $M = (u_1 \cdots u_m) \in \mathrm{Mat}_{n \times m}(\mathbb{K})$ est $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ est le vecteur des inconnues.

une solution, où $M = (u_1 \cdots u_m) \in Mat_{n\times m}(\mathbb{K})$ est $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ est le vecteur des inconnues.

- si par des opérations sur les lignes de M on peut se ramener à une matrice A échelonnée réduite :

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & * \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array} \right) \}k \quad , M = PA,\ P \in GL_n(\mathbb{R})$$

Alors $M \times \lambda = v \Leftrightarrow A \times \lambda = P^{-1} \times v$ et les équations définissant $Vect(u_1, \dots, u_m)$ sont données par les k dernières lignes de $P^{-1} \times v$.

- si $u_{m+1} \in Vect(u_1, \dots, u_m)$ alors $Vect(u_1, \dots, u_{m+1}) = Vect(u_1, \dots, u_m)$.

Par exemple : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_2 - u_1$.

Donc $Vect(u_1, u_2, u_3) = Vect(u_1, u_2)$.

- si $M = N \times Q$, avec $Q \in Gl_m(\mathbb{K})$, cela signifie que les vecteurs colonnes de M (les u_i) peuvent s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs colonnes de N (qu'on appellera $v_1, \dots, v_m$). Par conséquent : $Vect(u_1, \dots, u_m) = Vect(v_1, \dots, v_m)$.

Par exemple : $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\text{cette matrice est inversible, d'inverse } \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Donc $Vect(u_1, u_2) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$$= \{ (x, y, x) \mid x, y \in \mathbb{R} \}.$$