Chapitre 2 : Espaces vectoriels (3ème partie)

Bases

2.36 Soit $u = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs.
On considère $\mathbb{K}^{\oplus I} \subset \mathbb{K}^I$ le sous-espace vectoriel constitué des familles de scalaires qui sont presque tous nuls, et on définit l'application "combinaisons linéaires de u" $cl_u : \mathbb{K}^{\oplus I} \longrightarrow E$

$$(\lambda_i)_{i \in I} \longmapsto \sum_{i \in I} \lambda_i u_i .$$

cette somme est finie car la famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ est presque nulle

Proposition : 1) u est libre si et seulement si cl_u est injective.

2) u est génératrice si et seulement si cl_u est surjective.

Démonstration : 1) $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que cl_u est injective.

Si $\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$, alors

$cl_u\left((\lambda_i)_{i \in I}\right) = 0_E = cl(0_{\mathbb{K}^{\oplus I}})$ et donc

$\lambda_i = 0$ quel que soit $i \in I$ (par injectivité).

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que u est libre. Alors si deux combinaisons linéaires de u sont égales, leurs coefficients sont les mêmes. Autrement dit :

$cl_u(\lambda) = cl_u(\mu) \Rightarrow \lambda = \mu.$

Cela signifie précisément que cl_u est injective.

2) Ecrivons "cl_u est surjective" :

$\forall v \in E, \exists \lambda \in \mathbb{K}^{\oplus I}$ t.q. $cl_u(\lambda) = v.$

Autrement dit : tout vecteur de E est une combinaison linéaire de u. C'est exactement la

Autrement dit : tout vecteur de E est une combinaison linéaire de u. C'est exactement la définition de "u est une famille génératrice". $\square$

2.37 **Définition :** une **base** est une famille qui est à la fois libre et génératrice.

Autrement dit, u est une base si et seulement si cl_u est bijective.

Exemples : • si on note $e_i = (0, \dots, 0, \underset{\text{i-ème coordonnée}}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$.
Cette base est appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$.
• $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Dimension

2.38 **Définition :** on dit que E **est de dimension $n \in \mathbb{N}$** si il possède une base de longueur n. On note alors $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$.

pour se souvenir que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On peut enlever le $\mathbb{K}$ si il n'y a aucune confusion possible

On dit que E est de dimension **infinie** lorsqu'il n'admet pas de base de longueur finie.

Exemples : $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, alors que $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

2.39 **Proposition :** si E est de dimension n, alors toutes ses bases sont de longueur n.

2.39 **Proposition :** Si E est de dimension n, alors toutes ses bases sont de longueur n.

Démonstration : Soit u une base de longueur n et soit v une base de longueur m.
Nous allons démontrer que $m = n$.
On considère l'application de "changement de base" $\varphi_{u,v} := cl_v^{-1} \circ cl_u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.
On rappelle que $cl_u(e_i) = u_i$, et on

vecteur de la base canonique

pose $\tilde{u}_i = \varphi_{u,v}(e_i) = cl_v^{-1}(u_i)$.
On trouve alors que :

$$\begin{aligned}\varphi_{u,v}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) &= \varphi_{u,v}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n) \\ &= \lambda_1 \tilde{u}_1 + \dots + \lambda_n \tilde{u}_n .\end{aligned}$$

Ainsi $\varphi_{u,v}$ est l'application linéaire donnée par la matrice $M_{u,v} = (\tilde{u}_1 \cdots \tilde{u}_n) \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$.
$\varphi_{u,v}$ étant bijective, $M_{u,v}$ est une matrice inversible. Or une matrice inversible est nécessairement carrée. Donc $m = n$. $\square$

2.40 **Proposition :** Soit E un espace vectoriel de dimension m, et soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ une famille.
(1) Si u est libre, alors $n \leq m$.
(2) Si u est génératrice, alors $n \geq m$.

Démonstration : Soit $v = (v_1, \dots, v_m)$ une base de E. On considère encore $\varphi_{u,v} = cl_v^{-1} \circ cl_u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Comme u n'est pas une base, on ne peut plus parler de "changement de base".

(1) Si u est libre alors cl_u est injective et donc $\varphi_{u,v}$ est injective aussi.

$\varphi_{u,v}$ exprime les combinaisons On a vu dans la démonstration de la

de "changement de base".
$\varphi_{u,v}$ exprime les combinaisons linéaires de u comme des combinaisons linéaires (uniques) de la base v.

et donc $\varphi_{u,v}$ est injective aussi.

On a vu dans la démonstration de la Proposition $\boxed{2.39}$ que $\varphi_{u,v} = \varphi(M_{u,v})$.

On déduit le résultat voulu de ce qui suit :

Lemme : si $M \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ et si $\varphi(M)$ est injective, alors $n \leq m$.

Démo : quitte à multiplier M par une matrice inversible (ce qui revient à composer $\varphi(M)$ par une bijection et ne change rien à la propriété d'être injective), on peut supposer que M est échelonnée réduite :

$$M = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{smallmatrix} & A \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0}\end{array}\right)}_{n}\Bigg\}m$$

Pour que $\varphi(M)$ soit injective, il ne doit pas y avoir de colonne nulle.

[en effet, si la i-ème colonne est nulle alors $\varphi(M)(e_i) = 0_{\mathbb{K}^m} = \varphi(M)(0_{\mathbb{K}^n})$.]

Donc $$M = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} Id_k & A \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0}\end{array}\right)}_{n}\Bigg\}m$$

Si A a au moins une colonne, alors on écrit $A = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \\ \vdots & B \\ \lambda_k & \end{array}\right)$ et on trouve

que $\varphi(M)(e_{k+1}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$

que $\varphi(M)(e_{k+1}) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k$
$= \varphi(M)(\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_k e_k)$
et alors $\varphi(M)$ n'est pas injective.
Ainsi, si $\varphi(M)$ est injective alors

$$M = \left(\begin{array}{c} Id_n \\ \hline 0 \end{array}\right) \Big\} m$$ et donc $m \geqslant n$. $\square$

(2) si u est génératrice, alors cl_u est surjective et $\varphi_{u,v}$ aussi. Comme $\varphi_{u,v} = \varphi(M_{u,v})$ on déduit le résultat voulu de ce qui suit :

Lemme : si $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ et si $\varphi(M)$ est surjective, alors $n \geqslant m$.

Démo : ici encore, quitte à multiplier M par une matrice inversible, on peut la supposer échelonnée réduite :

$$M = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \boxed{1} & & 0 \\ & \boxed{1} \ddots & \\ 0 & & \boxed{1} \end{matrix} & A \\ \hline \multicolumn{2}{c}{0} \end{array}\right)}_{n} \Big\} m$$

Si il y a au moins une ligne de 0, alors $\varphi(M)(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = (*, *, \ldots, *, 0)$ et donc $\varphi(M)$ n'est pas surjective.

Donc $$M = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \boxed{1} & & 0 \\ & \boxed{1} \ddots & \\ 0 & & \boxed{1} \end{matrix} & A \end{array}\right)}_{n} \Big\} m$$

et ainsi $n \geqslant m$. $\square$

$\square$

$\boxed{2.41}$ **Proposition** : Soit E un espace vectoriel de dimension n.

(1) toute famille libre de longueur n est une base.
(2) toute famille génératrice de longueur n est une base.

Démonstration : Soit $v = (v_1, \dots, v_n)$ une base de E et soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ une famille.

(1) si u est libre, en reprenant la démonstration de la Proposition $\boxed{2.40}$ et en utilisant le "Lemme rouge" avec $m = n$, on trouve que $M_{u,v} = P \times N$ avec P inversible et $N = Id_n$. Donc $\varphi_{u,v} = d_v^{-1} \circ d_u$ est bijective. Ainsi d_u est bijective et donc u est une base.

(2) si u est génératrice, en reprenant la démonstration de la Proposition $\boxed{2.40}$ et en utilisant le "Lemme bleu" avec $m = n$, on trouve que $M_{u,v} = P \times N$ avec P inversible et

$$N = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & & 0 & \\ & \boxed{1} & & A \\ 0 & & \boxed{1} & \end{array}\right)$$

carrée. Cela implique que $N = Id_n$. Ainsi $M_{u,v}$ est inversible et $\varphi_{u,v}$ est une bijection. Par conséquent d_u est bijective et u est une base. $\square$

Base incomplète et base extraite

$\boxed{2.42}$ **Théorème de la base extraite**

2.42 **Théorème de la base extraite**

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors il existe $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$ tels que $(u_{i_1}, \dots, u_{i_k})$ est une base.

[Dit autrement, de toute famille génératrice on peut extraire une sous-famille qui est une base.]

Démonstration : on suppose que $E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$. On procède par récurrence inverse sur la longueur de la famille, et on distingue deux cas :

(a) si $(u_1, \dots, u_m)$ est libre, alors c'est une base et on a gagné.

(b) si $(u_1, \dots, u_m)$ est liée, alors l'un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres ; on peut le retirer de la famille tout en conservant la propriété d'être génératrice. Autrement dit, il existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tel que

$$E = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_{j-1}, u_{j+1}, \dots, u_m).$$

On a donc extrait une sous-famille génératrice de longueur plus petite.

On itère le processus jusqu'à se retrouver dans le cas (a), c'est-à-dire avec une famille libre et génératrice.

On est assurés de tomber au bout d'un certain temps sur (a). En effet, comme la longueur de la famille diminue à chaque longueur de la famille diminue à chaque étape, dans le pire des cas on tombera sur la famille vide (de longueur 0, qui est alors base de $E = \{0\} = \mathrm{Vect}(\emptyset)$). $\square$

Remarque: si on connait la dimension de E, alors on sait, d'après la Proposition $\boxed{2.41}$, le nombre k de vecteurs qu'il faut retirer pour obtenir une base : $k = m - \dim_{\mathbb{K}}(E)$.

Exemple: dans $\mathbb{R}^3$, on cherche à extraire une base de (u_1, u_2, u_3, u_4), avec

il faut avoir montré au préalable que cette famille est génératrice. (exercice!!!)

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On doit trouver une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de cette famille. Plus précisément, on cherche des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4} \lambda_i u_i}_{= (u_1\, u_2\, u_3\, u_4) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix}} = 0_{\mathbb{R}^3}.$$

On applique donc l'algorithme de Gauss à la matrice $M = (u_1\, u_2\, u_3\, u_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$:

$$M \underset{L_3 \to L_3 - 3L_1}{\overset{L_2 \to -L_2 + 2L_1}{\rightsquigarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to -\frac{1}{2} L_3 - \frac{3}{2} L_2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\underset{L_3 \to -\frac{1}{2}L_3 - \frac{3}{2}L_2}{} \begin{pmatrix} & & & \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \to L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

On s'est donc ramenés à chercher une solution non nulle de $\begin{cases} \lambda_1 + \frac{1}{2}\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 + \frac{1}{2}\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 - \frac{1}{2}\lambda_4 = 0 \end{cases}$

On peut par exemple choisir $\lambda_4 = 2$, et donc $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$. On peut vérifier qu'on a bien $-u_1 - u_2 + u_3 + 2u_4 = 0_{\mathbb{R}^3}$.
En particulier, $u_1 = -u_2 + u_3 + 2u_4$, et donc (u_2, u_3, u_4) est encore une famille génératrice. Comme sa longueur est la dimension de $\mathbb{R}^3$, c'est une base.

Remarque : dans l'exemple précédent, comme tous les coefficients de la relation de dépendance linéaire trouvée sont non nuls, on pouvait exprimer chaque vecteur en fonction des autres. Par conséquent, on aurait pu retirer n'importe lequel des vecteurs.

2.43 Théorème de la base incomplète (version 1)

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe des vecteurs $u_{m+1}, \dots, u_n \in E$

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille libre de E où E est un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$. Alors il existe des vecteurs $u_{m+1}, \dots, u_n \in E$ tels que $(u_1, \dots, u_n)$ soit une base.

[Dit autrement, toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.]

<u>Démonstration</u> : on procède par récurrence, et on distingue deux cas :

(a) si $(u_1, \dots, u_m)$ est génératrice, alors c'est une base et on a gagné.

(b) si $(u_1, \dots, u_m)$ n'est pas génératrice, alors $\exists\, u_{m+1} \in E \setminus \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$.
Par conséquent $(u_1, \dots, u_{m+1})$ est libre.
On itère le processus jusqu'à se retrouver dans le cas (a), c'est-à-dire avec une base.
On est assurés de tomber sur le cas (a) au bout d'un nombre fini d'itération. En effet, on sait que la longueur d'une famille libre est inférieure ou égale à n. $\square$

2.44 <u>Théorème de la base incomplète</u> (version 2)

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille libre de E et soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille génératrice de E. Alors il existe $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ tels que $(u_1, \dots, u_m, v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ soit une base.

[Autrement dit, lorsqu'on complète une famille libre en une base, on peut le faire en piochant les vecteurs que l'on ajoute au sein d'une famille génératrice prescrite

[une base, on peut le faire en piochant les vecteurs que l'on ajoute au sein d'une famille génératrice prescrite]

Démonstration: on procède par récurrence, et on distingue deux cas :

(a) si $(u_1, \dots, u_m)$ est génératrice, alors c'est une base et on a gagné.

(b) si $(u_1, \dots, u_m)$ n'est pas génératrice alors $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m) \subsetneq E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n)$.

Donc il existe $i \in [1, \dots, n]$ tel que $v_i \notin \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$, et donc $(u_1, \dots, u_m, v_i)$ est une famille libre.

On ré-itère le raisonnement avec cette nouvelle famille libre. On finira forcément par tomber sur le cas (a) car la longueur d'une famille libre de E est forcément inférieure ou égale à n (puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est génératrice). $\square$

Exemple: on considère $E = \mathbb{R}^3$, $m = 1$, $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $n = 3$, $(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3)$ (← base canonique)

→ (u_1) est libre mais pas génératrice. Comme u_1 et e_1 ne sont pas colinéaires (u_1, e_1) est libre, et on recommence.

→ (u_1, e_1) n'est pas génératrice (car $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3) = 3$).

Donc il existe $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que (u_1, e_1, e_i) est libre, d'après le théorème.

Or on voit que :
- (u_1, e_1, e_1) n'est pas libre
- (u_1, e_1, e_2) n'est pas libre car $u_1 = e_1 + 2e_2$.

Vous devez impérativement comprendre pourquoi

Donc (u_1, e_1, e_3) est libre.

impérativement comprendre pourquoi c'est évident.

$u_1 = e_1 + 2e_2$.

Donc (u_1, e_1, e_3) est libre.

$\rightarrow$ c'est une base car c'est une famille libre de longueur $3 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$.

Rang d'une famille de vecteurs

2.45 **Définition :** le **rang** d'une famille $(u_1, \dots, u_m)$ est la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$, que l'on note $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_m)$.

Exercice : montrer que si $(u_1, \dots, u_m)$ est libre alors son rang est m, et que si $(u_1, \dots, u_m)$ est génératrice alors son rang est $\dim_{\mathbb{K}}(E)$. Montrer aussi que $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_m) \leq m$.

2.46 **Comment calculer le rang d'une famille dans $\mathbb{K}^n$?**

Soit $(u_1, \dots, u_m)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
On note $M = (u_1 \cdots u_m)$ la matrice des vecteurs colonnes de cette famille.

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m) = \left\{ M \times \lambda \;\middle|\; \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Rappel : $M \times \lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i$.

Ainsi $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^n$ t.q. $M \times \lambda = X$

$\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^n$ t.q. $N \times \lambda = P^{-1} X$, avec

P inversible et N échelonnée réduite :

colonne i_1 colonne i_2 ...   colonne i_k

$$N = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & & & & 0 & \\ & \boxed{1} & & & & A \\ 0 & & \ddots & & & \\ & & & \boxed{1} & & \\ \hline & & & 0 & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\\1\end{array}}\right\} k \text{ lignes} \\ \left.\vphantom{1}\right\} n-k \text{ lignes} \end{array}$$

colonne i_1, colonne i_2 … colonne i_k

On appelle $i_1 < \dots < i_k$ les numéros des colonnes des pivots, et on note $v_j = P \times e_j$.

Exercice : vérifier que $\varphi(P) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ coïncide avec $\mathcal{C}\ell_{(v_1, \dots, v_n)} : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$.

P étant inversible, cette application est une bijection et donc $(v_1, \dots, v_n)$ est une base.

Montrons que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$. Ceci implique que $\mathrm{rg}(u_1, \dots, u_m) = k = \#\{\text{pivots de } N\}$.

Démonstration : $\boxed{\supset}$ Il suffit de montrer que $\forall \alpha \in [\![1, k]\!]$, $v_\alpha \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m)$.

Or $N \times e_{i_\alpha} = e_\alpha$, donc

$$v_\alpha = P \times e_\alpha = P \times N \times e_{i_\alpha} = M \times e_{i_\alpha} \in \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m).$$

$\boxed{\subset}$ $N \times \lambda$ est une combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_k)$. Par conséquent, $M \times \lambda = P \times N \times \lambda$ est une combinaison linéaire de $(v_1, \dots, v_k)$. $\square$

En effet les lignes numéro $k+1, \dots, n$ de N sont nulles, donc

$$N \times \lambda = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} k \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} n-k \end{array}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^4$, on cherche à déterminer le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

Pour cela on applique l'algorithme de Gauss à la

Pour cela on applique l'algorithme de Gauss à la matrice des vecteurs colonnes. On va en fait l'appliquer à la matrice augmentée du vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, ce qui nous permettra en "bonus" d'obtenir des équations caractérisant l'espace vectoriel engendré (cf. Exemple $\boxed{2.34}$).

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 2 & 1 & 1 & x_3 \\ 1 & 2 & 1 & x_4 \end{array}\right) \xrightarrow[L_4 \to L_4 - L_1]{L_3 \to L_3 - L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 - x_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2 \to L_2 - 2L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & x_1 \\ 0 & \boxed{-3} & -1 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x_3 - x_2} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{x_4 - x_1} \end{array}\right) \Big\} 2$$

2 pivots $\Rightarrow$ le rang de la famille est 2

De plus, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{array}{l} x_3 = x_2 \\ x_4 = x_1 \end{array} \right\}$