# Chapitre 2 : Espaces vectoriels (3ème partie - suite)

## Formule de Grassmann

2.47 **Lemme** : soit $E$ un espace vectoriel de dimension supérieure ou égale à $n \in \mathbb{N}$.
Alors $E$ admet une famille libre de longueur $n$.

$\Rightarrow$ Par la contraposée : si $E$ n'admet pas de famille libre de longueur $n$, alors $E$ est de dimension finie strictement inférieure à $n$.

**Démonstration du lemme** : à faire en exercice. Il faut construire une famille libre de longueur $n$ par récurrence, en suivant la même stratégie que dans la démonstration du théorème de la base incomplète (version 1). Vous pouvez partir de la famille vide (qui est libre). $\square$

2.48 **Corollaire** : soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$.
Tout sous-espace vectoriel de $E$ est de dimension finie inférieure ou égale à $n$.

**Démonstration** : soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel.
Toute famille libre de $F$ est aussi une famille libre de $E$.
Comme $E$ n'a pas de famille libre de longueur strictement supérieure à $n$, alors $F$ non plus. Donc $F$ est de dimension inférieure ou égale à $n$. $\square$

2.49 **Théorème** [Formule de Grassmann] : Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie, et soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels.
Alors $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

**Démonstration** : Soit $u = (u_1, \dots, u_k)$ une base de $F \cap G$.
On complète $u$ en une base $v = (u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_m)$ de $F$.
On remarque que $v_{k+1}, \dots, v_m \notin G$.
On complète $u$ en une base $w = (u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n)$ de $G$.
De la même manière : $w_{k+1}, \dots, w_n \notin F$.

On complète $u$ en une base $w = (u_1, \dots, u_k, w_{k+1}, \dots, w_n)$ de $G$.

De la même manière : $w_{k+1}, \dots, w_n \notin F$.

On note $v \cup w = (u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_m, w_{k+1}, \dots, w_n)$, qui est une famille de $F+G$.

**Lemme:** $v \cup w$ est une base de $F+G$.

**Démonstration :** • commençons par démontrer que $v \cup w$ est une famille génératrice de $F+G$.

Soit $x+y \in F+G$ (avec $x \in F$ et $y \in G$).

Alors $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j$ ← car $v$ engendre $F$

et $y = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i u_i + \sum_{l=k+1}^{n} \delta_l w_l$. ← car $w$ engendre $G$

Par conséquent $x+y = \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \gamma_i) u_i + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j + \sum_{l=k+1}^{n} \delta_l w_l$

$\in \mathrm{Vect}(v \cup w)$.

• démontrons maintenant que $v \cup w$ est une famille libre.

Supposons que $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j + \sum_{l=k+1}^{n} \gamma_l w_l = 0_E$.

Alors $\underbrace{\sum_{l=k+1}^{n} \gamma_l w_l}_{\in G} = \underbrace{- \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i - \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j}_{\in F} \in F \cap G$.

Par conséquent $\sum_{l=k+1}^{n} \gamma_l w_l = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i$ ← car $u$ engendre $F \cap G$.

Comme $w$ est une base de $G$ (et donc est libre), on en déduit que $\gamma_{k+1} = \dots = \gamma_n = 0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i + \sum_{j=k+1}^{m} \beta_j v_j = 0_E$, et comme $v$ est une base (et donc est libre), on en déduit que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_m = 0$.

$v \cup w$ est donc bien libre. □

On déduit du lemme que
$$\begin{aligned}\dim(F+G) &= \text{longueur}(v \cup w) \\ &= m + n - k \\ &= \text{longueur}(v) + \text{longueur}(w) - \text{longueur}(u) \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G).\end{aligned}$$ □

2.50 **Exemple:** $E := \mathbb{R}^4$, $F := \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $G := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x - y + z + t = 0 \right\}$.

2.30 **Exemple :** $E := \mathbb{R}^4$, $F := \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$, $G := \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z+t=0\right\}$.

- $\dim(F)=2$. En effet, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, ils forment donc une famille libre qui engendrent de surcroît $F$ (par définition de $F$), et ainsi une base de $F$.

  exercice : donner une description cartésienne de $F$.

- $G = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x-y+z+t=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\x+z+t\\z\\t\end{pmatrix} \mid x,z,t \in \mathbb{R}\right\}$

$$= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

  exercice : vérifier que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

  $\Rightarrow$ on en déduit que $\dim(G)=3$.

- $F \cap G = \left\{\begin{pmatrix}x\\x\\z\\z\end{pmatrix} \mid x,z \in \mathbb{R} \text{ et } \underbrace{x-x+z+z=0}_{\Leftrightarrow z=0}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\x\\0\\0\end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\right\} = \mathbb{R}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Donc $\dim(F\cap G) = 1$.

- $F+G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

  exercice : vérifier que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice dans $\mathbb{R}^4$.

  $\Rightarrow$ on en déduit que $\dim(F+G)=4$.

La formule de Grassmann est bien satisfaite :

$$\dim(F+G) = 4 = 2+3-1 = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G).$$

Sur les quatre calculs de dimension que nous avons fait, nous aurions pu (en utilisant la formule de Grassmann n'en effectuer que trois et déduire le dernier).