HAX202X - Espaces Vectoriels et Applications Linéaires (5)

Chapitre 3 : Applications Linéaires (1ère partie)

Définition et exemples

3.1 **Définition** : Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \to F$ est **linéaire** si, quels que soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $u_1, \dots, u_n \in E$,

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i).$$

Autrement dit, une application linéaire préserve les combinaisons linéaires.

3.2 **Proposition** : Soit $f : E \to F$ une application entre deux espaces vectoriels. Les affirmations qui suivent sont équivalentes :

(1) f est linéaire.

(2) f est un morphisme de groupe et $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u \in E$, $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

(3) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E$, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$.

Un morphisme de groupes se définit comme un isomorphisme de groupes (cf. définition $\boxed{1.15}$) mais sans la condition d'être une bijection : $f(0_E) = 0_F$ et $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Démonstration de la Proposition : • $\boxed{(1) \Rightarrow (3)}$: évident. En effet, $\lambda u + v$ est une combinaison linéaire.

• $\boxed{(3) \Rightarrow (2)}$: $f(0_E) = f((-1) \cdot u + u) = (-1) \cdot f(u) + f(u) = 0_F$.

$f(u+v) = f(1 \cdot u + v) = 1 \cdot f(u) + f(v) = f(u) + f(v)$.

$\Rightarrow$ morphisme de groupe

$f(\lambda u) = f(\lambda u + 0_E) = \lambda f(u) + f(0_E) = \lambda f(u)$.

$f(\lambda u) = f(\lambda u + 0_E) = \lambda f(u) + f(0_E) = \lambda f(u).$

• $\boxed{(2) \Rightarrow (1)}$: $f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i u_i)$

car f est un morphisme de groupes

$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(u_i)$

car $f(\lambda u) = \lambda f(u)$ □

Exercice : vérifier que les affirmations de la Proposition sont aussi équivalentes à ce qui suit :

(4) $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E, \ f(\lambda(u+v)) = \lambda(f(u) + f(v))$.

$\boxed{3.3}$ **Exemples :** • Soit $v = (v_i)_{i \in I}$ une famille d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors $c\ell_v : \mathbb{K}^{\oplus I} \to E$ est une application linéaire.

La définition de $c\ell_v$ est donnée en $\boxed{2.36}$.

Démonstration : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $x = (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{\oplus I}$ et $y = (y_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{\oplus I}$. On rappelle que $\lambda \cdot x + y = (\lambda x_i + y_i)_{i \in I}$. Calculons :

$$c\ell_v(\lambda \cdot x + y) = \sum_{i \in I} (\lambda x_i + y_i) v_i$$

$$= \sum_{i \in I} (\lambda x_i v_i + y_i v_i)$$

$$= \lambda \sum_{i \in I} x_i v_i + \sum_{i \in I} y_i v_i$$

$$= \lambda c\ell_v(x) + c\ell_v(y). \ \square$$

Exercice : démontrer que si $f : \mathbb{K}^{\oplus I} \to E$ est une application linéaire, alors il existe une unique famille $v \in E^I$ telle que $f = c\ell_v$.

• Si on spécifie l'exemple qui précède au cas où $E = \mathbb{K}^m$ et $I = \{1, \dots, n\}$ on trouve que pour toute matrice $M \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$, l'application $\varphi(M) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$

$E = \mathbb{K}^n$ et $I = \{1, \dots, n\}$ on trouve que pour toute matrice $M \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, l'application $\varphi(M) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est linéaire.

On rappelle que $\varphi(M)$ est définie par $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} \mapsto M \times \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix}$

Démonstration : en effet, $\varphi(M) = d_v$ avec $v = (v_1, \dots, v_n)$ la famille des vecteurs colonnes de M. $\square$

L'exercice précédent montre que l'ensemble des applications linéaires $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est en bijection avec l'ensemble des matrices de taille $m \times n$.

- Si on spécifie le premier exemple au cas où $E = \mathbb{K}$ et $I = \mathbb{N}$, on trouve qu'une application linéaire $\mathbb{K}[X] = \mathbb{K}^{\oplus \mathbb{N}} \to \mathbb{K}$ peut être déterminée par une suite $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Exemple : soit $a \in \mathbb{K}$. On considère la suite définie par $v_n = a^n$. On obtient alors l'application linéaire $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\sum_{i=0}^{n} c_i X^i = P(X) \longmapsto P(a) = \sum_{i=0}^{n} c_i a^i$$

On appelle cette application "évaluation en a" et on la note ev_a.

- Comme précédemment, on spécifie le premier exemple au cas où $I = \mathbb{N}$, mais désormais avec $E = \mathbb{K}[X]$. Ainsi une application linéaire $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ peut être déterminée par une suite de polynômes $Q = (Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]^{\mathbb{N}}$.

Exemple 1 : on pose $Q_n = (X+1)^n$. On obtient alors l'application linéaire

$$\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i X^i = P(X) \longmapsto P(X+1) = \sum_{i=0}^{n} c_i (X+1)^i.$$

Exemple 2 : on pose $Q_n = n X^{n-1} = (X^n)'$. On obtient

Exemple 2 : on pose $Q_n = nX^{n-1} = (X^n)'$. On obtient alors l'application linéaire

$$\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}[X]$$
$$\sum_{i=0}^{n} c_i X^i = P(X) \longmapsto P'(X) = \sum_{i=1}^{n} (c_i \times i) X^{i-1}.$$

3.4 **Propriétés :** (1) La composée de deux applications linéaires est linéaire.

(2) L'ensemble $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,F)$ des applications linéaires (entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels) est un sous-espace vectoriel de F^E.

(3) Si $f : E \to F^I$ est une application linéaire, alors il existe une unique famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications linéaires $f_i : E \to F$ telle que : $\forall u \in U$, $f(u)_i = f_i(u)$.

→ La propriété (2) nous dit qu'on peut faire la somme de deux applications linéaires, et les multiplier par un scalaire.

→ La propriété (3) nous dit que se donner une application linéaire allant vers F^n (dans le cas où $I = \{1, \dots, n\}$) revient à se donner n applications linéaires allant vers F.

Démonstration des propriétés : • (1) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Montrons que $g \circ f : E \to G$ est une application linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$. On calcule :

$$g\circ f(\lambda u + v) = g(f(\lambda u + v)) = g(\lambda f(u) + f(v))$$
$$= \lambda g(f(u)) + g(f(v))$$
$$= \lambda g\circ f(u) + g\circ f(v). \quad \square$$

car f est une application linéaire

car g est une application linéaire

• (2) L'application nulle est linéaire. Il suffit donc de montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g : E \to F$ sont deux applications linéaires, alors $\lambda f + g$ est une application linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$. Calculons :

$\lambda f + g$ est une application linéaire.

Soit $x \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$. Calculons :

$$(\lambda f+g)(xu+v) = \lambda f(xu+v) + g(xu+v)$$

car f et g sont supposées linéaires

$$= \lambda x f(u) + \lambda f(v) + x g(u) + g(v)$$
$$= x(\lambda f(u) + g(u)) + \lambda f(v) + g(v)$$
$$= x(\lambda f+g)(u) + (\lambda f+g)(v)$$

On a démontré que $\lambda f + g$ est linéaire. $\square$

• (3) Soit $f : E \to F^I$. Il existe une unique famille $(f_i)_{i\in I}$ d'applications telle que : $\forall u \in E,\ f(u)_i = f_i(u)$.

Pour l'instant, il s'agit juste de théorie des ensembles. Ça n'a rien à voir avec les espaces vectoriels et les applications linéaires

En effet, on définit $f_i : E \to F$ par $f_i(u) := f(u)_i$.

Montrons maintenant que f est linéaire si et seulement si les f_i le sont.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in E$:

$$f(\lambda u+v) = \lambda f(u) + f(v)$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in I,\ \underbrace{f(\lambda u+v)_i}_{= f_i(\lambda u+v)} = \underbrace{(\lambda f(u)+f(v))_i}_{= \lambda f(u)_i + f(v)_i = \lambda f_i(u) + f_i(v)}$$
$$\Leftrightarrow \forall i \in I,\ f_i(\lambda u+v) = \lambda f_i(u) + f_i(v). \quad \square$$

$\boxed{3.5}$ **Exemple** : on note $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ (sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles).

Montrer que c'est un espace vectoriel.

Comme dans le cas des polynômes, l'application "dérivée" $\begin{array}{l} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \quad y \longmapsto y' \end{array}$ est linéaire.

Le montrer en exercice.

En utilisant la propriété (1), on obtient que l'application "dérivée n-ième" $\begin{array}{l} C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \quad u \longmapsto u^{(n)} \end{array}$

l'application "dérivée n-ième" $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$y \longmapsto y^{(n)}$$

est linéaire.

En utilisant la propriété (3), on peut construire une application linéaire $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^{n+1}$

$$\text{(A)} \quad y \longmapsto \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$$

Etant donné des fonctions $a_0, \dots, a_n \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a une application linéaire $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})^{n+1} \to C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$\text{(B)} \quad \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \longmapsto (a_0 \cdots a_n) \times \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{n} a_i y_i .$$

Montrer que c'est une application linéaire.

En composant (A) et (B), on obtient une application linéaire $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$y \longmapsto \sum_{i=0}^{n} a_i\, y^{(i)} .$$

Une telle application s'appelle une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n.

Isomorphismes

3.6 **Définition :** Un **isomorphisme** entre deux espaces vectoriels est une application linéaire qui est bijective. On dit alors que les deux espaces vectoriels sont **isomorphes**.

Pour indiquer qu'une application linéaire $f: E \to F$ est un isomorphisme, on écrit parfois $f: E \xrightarrow{\sim} F$. On écrit aussi $E \simeq F$ pour exprimer que E et F sont isomorphes.

3.7 **Proposition :** Si $f: E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors sa bijection réciproque est aussi un isomorphisme.

$\boxed{3.7}$ **Proposition** : si $f : E \to F$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, alors sa bijection réciproque est aussi un isomorphisme.

Démonstration : notons $g : F \to E$ la bijection réciproque et montrons que g est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u, v \in F$:

$$f(\lambda g(u) + g(v)) = \lambda f(g(u)) + f(g(v)) = \lambda u + v = f(g(\lambda u + v))$$

car f est linéaire

car $f \circ g = \mathrm{id}$

Par conséquent $\lambda g(u) + g(v) = g(\lambda u + v)$ (car f est bijective). $\square$

$\boxed{3.8}$ **Exemples** :
- si $v = (v_i)_{i \in I}$ est une base de E, alors $cl_v : \mathbb{K}^{\oplus I} \to E$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

  Démonstration : on a déjà vu que cl_v est une application linéaire dans l'exemple $\boxed{3.3}$. Comme v est une base, tout élément $u \in E$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de v : $\exists ! \, (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{\oplus I}$ tel que $u = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i = cl_v((\lambda_i)_{i \in I})$.

  Autrement dit, tout élément de E a un unique antécédent par cl_v. L'application est bijective. $\square$

- l'application linéaire $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ de l'exemple $\boxed{3.3}$ est un isomorphisme. La bijection réciproque est donnée par $Q(X) \mapsto Q(X-1)$.

$\boxed{3.9}$ **Proposition** : Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et soit $u : I \to E$ une famille de E. On note $f(u) := f \circ u$.

(1) si $f(u)$ est libre alors u est libre.

(2) si f est un isomorphisme, alors $f(u)$ est libre si et seulement si u est libre.

(3) si f est un isomorphisme, alors $f(u)$ est génératrice si et

(3) si f est un isomorphisme, alors $f(u)$ est génératrice si et seulement si u est génératrice.

Démonstration : (1) Supposons que $f(u)$ est libre, et montrons que u est libre.

Si $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = 0_E$, avec $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{\oplus I}$, alors

$$\sum_{i\in I} \lambda_i f(u_i) \underset{\text{car } f \text{ est linéaire}}{=} f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i u_i\Big) = f(0_E) = 0_F. \text{ Donc } \lambda_i = 0$$

quel que soit $i \in I$ (car $\underbrace{f(u)}_{=(f(u_i))_{i\in I}}$ est libre). $\square$

(2) notons g la bijection réciproque de f, qui est aussi un isomorphisme (cf. Proposition $\boxed{3.7}$).

D'après (1) : $f(u)$ libre $\Rightarrow$ u libre

$u = g(f(u))$ libre $\Rightarrow$ $f(u)$ libre. $\square$

(3) Lemme : si $f : E \to F$ est linéaire et surjective et que u est génératrice, alors $f(u)$ est génératrice.

Démonstration : Soit $w \in F$. Comme f est surjective, il existe $v \in E$ tel que $f(v) = w$. Comme u est génératrice, il existe $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^{\oplus I}$ tel que $\sum_{i\in I} \lambda_i u_i = v$.

Par conséquent $\sum_{i\in I} \lambda_i f(u_i) \underset{\text{car } f \text{ est linéaire}}{=} f\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i u_i\Big) = f(v) = w$. $\square$

Notons g la bijection réciproque de l'isomorphisme f.

D'après le lemme : u génératrice $\Rightarrow$ $f(u)$ génératrice.

$f(u)$ génératrice $\Rightarrow$ $u = g(f(u))$ génératrice. $\square$

Matrices et applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

$\boxed{3.10}$ **Proposition :** si $u : I \to E$ est une base de E, alors l'application "restriction" $res : \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,F) \to F^I$, $f \mapsto f(u)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Démonstration : commençons par montrer que res est linéaire. Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f,g : E \to F$ des applications linéaires :

$$res(\lambda f + g) = (\lambda f + g)(u) = \lambda f(u) + g(u).$$

Construisons maintenant la réciproque de res. On définit $ext : F^I \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,F)$ de la manière suivante :

$$\text{si } v = (v_i)_{i \in I} \in F^I,\ ext(v) := cl_v \circ cl_u^{-1} : E \to F.$$

En termes concrets, si $w = \underbrace{\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = cl_u(\lambda)}_{\text{écriture unique car } u \text{ base.}} \in E$,

alors $ext(v)(w) = cl_v(\lambda) = \sum_{i \in I} \lambda_i v_i$.

Exercice : montrer que res et ext sont réciproques l'une de l'autre. $\square$

Voici une autre manière de comprendre ce qui précède : si $u \in E^I$ est une base alors $cl_u : \mathbb{K}^{\oplus I} \to E$ est un isomorphisme (= bijection linéaire). Donc

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,F) \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\oplus I}, F),\quad f \mapsto f \circ cl_u$$

est aussi un isomorphisme (exercice : l'isomorphisme réciproque est $g \mapsto g \circ cl_u^{-1}$).
Or nous avons vu dans l'exemple $\boxed{3.3}$ que $\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^{\oplus I}, F)$ et F^I sont en bijections (ils sont en fait isomorphes).

$\boxed{3.11}$ Le même type de raisonnement nous permet de voir que si $v \in F^J$ est une base alors on a un isomorphisme

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E, \mathbb{K}^{\oplus J}) \to \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,F),\quad g \mapsto cl_v \circ g$$

d'isomorphisme réciproque $f \mapsto cl_v^{-1} \circ f$.
Conclusion : voici ce qu'on déduit de la discussion qui précède

d'isomorphisme réciproque $f \mapsto d_v \circ f$.

Conclusion : voici ce qu'on déduit de la discussion qui précède dans le cas où $I = \{1, \dots, n\}$ et $J = \{1, \dots, m\}$: il y a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(E,F) &\longrightarrow \mathrm{Lin}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) \simeq M_{m\times n}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto d_v^{-1} \circ f \circ d_u \end{aligned}$$

On note $M_{u,v}(f)$ la matrice correspondant à l'application linéaire $d_v^{-1} \circ f \circ d_u$.

Concrètement, on a $f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} v_i$, où b_{ij} est le coefficient de $M_{u,v}(f)$ qui se situe au croisement de la i-ème ligne et de la j-ème colonne. Autrement dit, $M_{u,v}(f)$ est la matrice des vecteurs de la famille $f(u) \in F^n$ exprimée dans la base v.

3.12 **Exemple :** $E = \mathbb{K}[X]_{\leq 2}$ et $F = \mathbb{K}[X]_{\leq 3}$. On choisit $u = (1, X, X^2)$ comme base de E et $v = (1, X, X^2, X^3)$ comme base de F. On pose $f(P) := P'$. Pour trouver $M_{u,v}(f)$, on doit décomposer les vecteurs de $f(u)$ dans la base v :

* $f(1) = 0 = 0\times 1 + 0\times X + 0 \times X^2 + 0\times X^3$.
* $f(X) = 1 = 1\times 1 + 0\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$.
* $f(X^2) = 2X = 0\times 1 + 2\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$.

Donc $M_{u,v}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 3}(\mathbb{K})$.

3.13 **Exemple :** si $m=n$, on peut se demander quelle est l'application linéaire $f : E \to F$ telle que $M_{u,v}(f) = \mathrm{Id}_n$. C'est $f = d_v \circ d_u^{-1}$. Quel que soit $i \in \{1, \dots, n\}$, $f(u_i) = d_v(d_u^{-1}(u_i)) = d_v(e_i) = v_i$.

3.14 **Proposition :** si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont des applications linéaires entre des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et si $u \in E^n$, $v \in F^m$ et $w \in G^\ell$ sont des bases, alors $M_{u,w}(g\circ f) = M_{v,w}(g) \times M_{u,v}(f)$.

Démonstration : $M_{u,v}(f)$ est la matrice de l'application linéaire $d_v^{-1} \circ f \circ d_u$.

$u = (u_1, \dots, u_n)$ famille de E $\rightsquigarrow$ $f(u) = (f(u_1), \dots, f(u_n))$ famille de F $\rightsquigarrow$ $f(u)$ exprimée dans v donne $M_{u,v}(f)$

Démonstration : $M_{u,v}(f)$ est la matrice de l'application linéaire $d_v^{-1}\circ f\circ d_u$.

$M_{v,w}(g)$ est la matrice de l'application linéaire $d_w^{-1}\circ g\circ d_v$.

Donc $M_{v,w}(g)\times M_{u,v}(f)$ est la matrice de l'application linéaire $d_w^{-1}\circ g\circ \underbrace{d_v\circ d_v^{-1}}_{=id_F}\circ f\circ d_u = d_w^{-1}\circ g\circ f\circ d_u$, dont la matrice est $M_{u,w}(g\circ f)$. □

Changement de base

Soit E un espace vectoriel de dimension $n\in\mathbb{N}$, et deux bases $u\in E^n$ et $v\in E^n$.

$\boxed{3.15}$ **Définition :** on note $P_u^v = M_{v,u}(id_E)$ la matrice de passage (aussi appelée matrice de changement de base) de u à v.

Concrètement, P_u^v s'obtient en mettant en colonne les vecteurs de la famille v exprimés dans la base u. exercice : exprimer P_u^v avec d_u et d_v.

$\boxed{3.16}$ **Propriétés :** 1) $P_u^v = (P_v^u)^{-1}$.

2) si u, v et w sont des bases de E, alors $P_u^v P_v^w = P_u^w$.

3) si u_1, u_2 sont des bases de E, v_1, v_2 sont des bases de F, et si $f : E\to F$ est une application linéaire, alors

$$P_{v_2}^{v_1} M_{u_1,v_1}(f) = M_{u_2,v_2}(f)\, P_{u_2}^{u_1}. \qquad \times P_{u_1}^{u_2}$$

$$P_{v_2}^{v_1} M_{u_1,v_1}(f)\, P_{u_1}^{u_2} = M_{u_2,v_2}(f)$$

4) si $x\in E$ et $x_u = d_u^{-1}(x)\in\mathbb{K}^n$ alors $P_v^u x_u = x_v$.

Démonstration : 1) Il suffit de démontrer que $P_u^v P_v^u = Id_n$. Or, d'après la Proposition $\boxed{3.14}$:

$$P_u^v P_v^u = M_{v,u}(id_E)\times M_{u,v}(id_E) = M_{u,u}(id_E) = Id_n.$$

2) En utilisant encore la Proposition $\boxed{3.14}$ on calcule :

$$P_u^v P_v^w = M_{v,u}(id_E)\times M_{w,v}(id_E) = M_{w,u}(id_E) = P_u^w$$

3) Cette fois-ci on utilise deux fois la Proposition $\boxed{3.14}$:

$$P_{v_2}^{v_1} M_{u_1,v_1}(f) = M_{v_1,v_2}(id_F)\times M_{u_1,v_1}(f)$$

$$= M \quad (f)$$

$$P^{v_1}_{v_2} M_{u_1,v_1}(f) = M_{v_1,v_2}(id_F)\times M_{u_1,v_1}(f)$$
$$= M_{u_1,v_2}(f)$$
$$= M_{u_2,v_2}(f)\times M_{u_1,u_2}(id_E) = M_{u_2,v_2}(f)\, P^{u_1}_{u_2}.$$

4) P_v^u étant la matrice de $\varphi_v^{-1}\circ\varphi_u : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$, on trouve que $P_v^u x_u = \varphi_v^{-1}\circ \underbrace{\varphi_u\,(\varphi_u^{-1}}_{\varphi_u\circ\varphi_u^{-1} = id}(x)) = \varphi_v^{-1}(x) = x_v$. $\square$

3.17 Quelques exemples

1) $E = \mathbb{K}[X]_{\leq 3}$. Base $u = (1, X, X^2, X^3)$.
Base $v = (1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3)$.

On remarque que $v = f(u)$, où f est l'isomorphisme défini par $f(P(X)) := P(X+1)$. Comme v est l'image d'une base (u) par un isomorphisme (f), alors c'est une base.

Pour calculer P_u^v on doit exprimer les vecteurs de v dans la base u:

$$1 = 1\times 1 + 0\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$$
$$X+1 = 1\times 1 + 1\times X + 0\times X^2 + 0\times X^3$$
$$(X+1)^2 = 1\times 1 + 2\times X + 1\times X^2 + 0\times X^3$$
$$(X+1)^3 = 1\times 1 + 3\times X + 3\times X^2 + 1\times X^3$$

Donc $P_u^v = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← on reconnait le triangle de Pascal !!!

Exercice : montrer que $P_u^v = M_{u,u}(f)$. ← car $v = f(u)$ (f est un isomorphisme)

Calculons maintenant $P_v^u = (P_u^v)^{-1}$. En effectuant le changement de variable $Y = X+1$, on a $v = (1, Y, Y^2, Y^3)$ et on trouve :

$$1 = 1\times 1 + 0\times Y + 0\times Y^2 + 0\times Y^3$$
$$X = Y-1 = -1\times 1 + 1\times Y + 0\times Y^2 + 0\times Y^3$$
$$X^2 = (Y-1)^2 = 1\times 1 - 2\times Y + 1\times Y^2 + 0\times Y^3$$
$$X^3 = (Y-1)^3 = -1\times 1 + 3\times Y - 3\times Y^2 + 1\times Y^3$$

Donc $P_v^u = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

Donc $P_v^u = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ← Vérifier par le calcul que $P_v^u P_u^v = Id_4$

En utilisant l'exercice précédent, on aurait aussi pu remarquer que $(P_u^v)^{-1} = M_{u,u}(f)^{-1} = M_{u,u}(f^{-1})$ avec $f^{-1}: P(X) \to P(X-1)$.

2] L'exemple qui vient vise à illustrer le fait suivant : si la base v est obtenue en permutant les vecteurs de la base u, alors la matrice de passage P_u^v est une matrice de permutation ← Voir Exemple $\boxed{1.19}$ et Exercice 7 de la Feuille TD no. 1

On considère $u = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{K}^3$, et $v = (e_3, e_1, e_2)$.

Vérifier en exercice qu'on a bien :

$$P_u^v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_v^u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_u^v P_v^u = Id_3$$

3] $E = \mathbb{K}^2$, $F = \mathbb{K}^3$. On se donne :

- 2 bases de E : $u = (e_1, e_2)$ et $u' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.
- 2 bases de F : $v = (e_1, e_2, e_3)$ et $v' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice : vérifier que v' est bien une base de $\mathbb{K}^3$.

Calculons les matrices de passage.

- $P_u^{u'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P_{u'}^u = (P_u^{u'})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On aurait aussi pu trouver $P_{u'}^u$ en remarquant que :

$$e_1 = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- $P_v^{v'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Pour calculer son inverse $P_{v'}^v = (P_v^{v'})^{-1}$, on applique l'algorithme de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow -L_2 + \frac{1}{2} L_3 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

Par conséquent, $P_{v'}^{v} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Donnons-nous maintenant une application linéaire $f : \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^3$ de matrice canonique $M_{u,v}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Autrement dit, $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

On souhaite calculer $M_{u',v'}(f)$, c'est-à-dire exprimer $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans la base v'. Pour cela on utilise les Propriétés $\boxed{3.16}$ et on trouve :

$$M_{u',v'}(f) = P_{v'}^{v} M_{u,v}(f) P_{u}^{u'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 5 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}}_{M_{u',v}(f)}$$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 5 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Vérifions : on a bien $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \end{pmatrix}$

Vérifions : on a bien $f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

et $f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\10\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.