Chapitre 3 : Applications Linéaires (2ème partie)

Noyau et image

On rappelle que l'image d'une application $f : E \to F$ est l'image de l'asemble de départ : $\mathrm{Im}(f) := f(E) = \{ f(u) \mid u \in E \}$.

3.18 **Proposition :** l'image $f(V)$ d'un sous-espace vectoriel $V \subset E$ par une application linéaire $f : E \to F$ est un sous-espace vectoriel de F.
En particulier, l'image $\mathrm{Im}(f)$ d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Démonstration :
- $f(V)$ est non-vide car V est non-vide.
- si $\lambda \in \mathbb{K}$, et $u, v \in V$ alors
$\lambda f(u) + f(v) = f(\lambda u + v) \in f(V)$.
car f est supposée linéaire

Par conséquent $f(V)$ est un sous-espace vectoriel. □

La proposition précédente nous apprend qu'une application linéaire $f : E \to F$ induit une application, également notée $f : \mathrm{SSEV}(E) \to \mathrm{SSEV}(F)$, de l'ensemble $\mathrm{SSEV}(E)$ des sous-espaces vectoriels de E vers l'ensemble $\mathrm{SSEV}(F)$ des sous-espaces vectoriels de F.

3.19 **Corollaire :** si $f : E \to F$ est un isomorphisme, alors $f : \mathrm{SSEV}(E) \to \mathrm{SSEV}(F)$ est une bijection.

Démonstration : l'isomorphisme réciproque $g = f^{-1} : F \to E$ induit une application $g : \mathrm{SSEV}(F) \to \mathrm{SSEV}(E)$. Vérifier en exercice que c'est la réciproque de $f : \mathrm{SSEV}(E) \to \mathrm{SSEV}(F)$. □

3.20 **Définition :** le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble des antécédents du vecteur nul :

3.20 **Définition:** le **noyau** $Ker(f)$ d'une application linéaire $f : E \to F$ est l'ensemble des antécédents du vecteur nul :
$$Ker(f) := f^{-1}(0_F) = \{u \in E \mid f(u) = 0_F\}.$$

3.21 **Proposition:** $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration:
- $f(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in Ker(f)$.
- si $u, v \in Ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $f(\lambda u + v) \underset{f \text{ est linéaire}}{=} \lambda \underbrace{f(u)}_{=0_F} + \underbrace{f(v)}_{=0_F} = 0_F$.

Donc $\lambda u + v \in Ker(f)$.
Par conséquent $Ker(f)$ est un sous-espace vectoriel. $\square$

3.22 **Proposition:** une application linéaire $f : E \to F$ est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_E\}$.

Démonstration: $\boxed{\Rightarrow}$ si f est injective alors 0_F a au plus un antécédent.
Donc $Ker(f) = \{0_E\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$ supposons que $Ker(f) = \{0_E\}$.
Si $f(u) = f(v)$ alors $f(u-v) = 0_F$ et donc $u - v = 0_E$.
Donc $u = v$.
Par conséquent f est injective. $\square$

3.23 **Exemples:** 1) si $A \in M_{m \times n}(\mathbb{K})$ et que $\varphi(A) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ est l'application linéaire associée, alors le sous-espace vectoriel des solutions du système linéaire correspondant (cf. Exemple $\boxed{2.13}$) est le noyau de $\varphi(A)$: $S_A = Ker(\varphi(A))$.

2) on rappelle d'après l'Exemple $\boxed{3.5}$ qu'une équation différentielle linéaire homogène définit une application linéaire
$$L : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
$$y \longmapsto a_0 y + a_1 y' + \dots + a_n y^{(n)}$$

L'ensemble des solution d'une telle équation est par définition le noyau de L.

3) Pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a l'application linéaire d'évaluation $ev_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$; $P(X) \longmapsto P(a)$ (cf. Exemple $\boxed{3.3}$).

3) Pour tout $a \in \mathbb{K}$, on a l'application linéaire d'évaluation
$ev_a : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}$; $P(X) \mapsto P(a)$ (cf. Exemple $\boxed{3.3}$).

Proposition: $\ker(ev_a) = \{(X-a)Q(X) \mid Q(X) \in \mathbb{K}[X]\}$ est l'ensemble des polynômes divisibles par $X-a$.

Idée de la démonstration: quitte à effectuer un changement de variable $Y = X-a$, on peut supposer sans perte de généralité que $a=0$.

à rédiger en détail à titre d'exercice

Dans ce cas, si $P(X) = b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n$, alors
$P(0) = 0 \Leftrightarrow b_0 = 0 \Leftrightarrow P(X) = X(b_1 + b_2 X + \dots + b_n X^{n-1})$.

$\boxed{3.24}$ Proposition: si $f : E \to F$ est une application linéaire et si $w \in F$, alors :

$$f^{-1}(w) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } w \notin \mathrm{Im}(f). \\ v + \ker(f) & \text{si } w = f(v). \end{cases}$$

$:= \{v + v_0 \mid v_0 \in \ker(f)\}$

Démonstration: • si $w \notin \mathrm{Im}(f)$ alors w n'a pas d'antécédent et $f^{-1}(w) = \emptyset$.

• si $w = f(v)$, montrons que $f^{-1}(w) = v + \ker(f)$.

$\boxed{\supset}$ si $v_0 \in \ker(f)$ alors $f(v+v_0) = f(v) + f(v_0) = w + 0_F = w$

Donc $v + v_0 \in f^{-1}(w)$.

$\boxed{\subset}$ si $v_1 \in f^{-1}(w)$, c'est-à-dire que $f(v_1) = w$

Alors $f(v_1 - v) = f(v_1) - f(v) = w - w = 0_F$.

Donc $v_1 = v + v_1 - v$, avec $v_1 - v \in \ker(f)$.

Donc $v_1 \in v + \ker(f)$. □

La proposition précédente peut se reformuler de la manière suivante: "toute solution de l'équation $f(x) = w$, où $x \in E$ est un vecteur inconnu, est de la forme $x = v_0 + v$, avec v_0 solution de l'équation homogène $f(x) = 0_F$."

inconnu, est de la forme $x = v_0 + v$, avec v_0 solution de l'équation homogène $f(x) = 0_F$."

3.25 **Exemples :** reprenons un à un les Exemples **3.23**.

1) la solution générale d'un système linéaire inhomogène $AX = B$ s'obtient en faisant la somme :

- de la solution générale X_0 du système linéaire homogène $AX = 0$
- avec une solution particulière du système inhomogène.

2) la solution générale d'une équation différentielle linéaire inhomogène $a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = b$ s'obtient en faisant la somme :

- de la solution générale y_0 de l'équation homogène $a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = 0$.
- avec une solution particulière de l'équation inhomogène.

3) tout polynôme $P(X)$ tel que $P(a) = b$ s'écrit $P(X) = b + (X-a)\,Q(X)$, avec $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$.

3.26 **Le cas des applications linéaire $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$**

- On peut aisément décrire $\mathrm{Im}(f)$ sous forme paramétrique :
  Si on note $v_i := f(e_i)$, alors
  $$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}.$$

- Pour décrire $\mathrm{Im}(f)$ sous forme cartésienne (c'est-à-dire comme ensemble de solutions d'un système) on procède comme suit :

1) On considère la matrice $M = (v_1 \cdots v_n)$ constituée des vecteurs colonnes v_i (c'est la matrice de f exprimée dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^m$).
2) on augmente cette matrice d'un vecteur colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.
3) on applique Gauss à la matrice augmentée.
Les lignes sans pivot nous donnent les équations satisfaites par les $x_1, \dots, x_m$ qui définissent $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}^m$.

satisfaites par les $x_1, \dots, x_m$ qui définissent $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}^m$.

- Le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des solutions du système linéaire associé à M. Il est donc naturellement donné sous forme cartésienne. Pour obtenir une forme paramétrique il faut résoudre le système.

Rang et dimension

Dans cette partie on suppose que tous les espaces vectoriels sont de dimension finie.

3.27 Définition : le **rang** d'une application linéaire $f: E \to F$ est la dimension de son image : $\mathrm{rg}(f) := \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f))$.

3.28 Exemple : • si $E = \mathbb{K}^n$ alors une application linéaire $f: \mathbb{K}^n \to F$ est complètement déterminée par la famille $(v_1, \dots, v_n) \in F^n$, où $v_i = f(e_i)$.

On a alors $\mathrm{rg}(f) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Im}(f)) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n))$
$= \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n)$.

• si de surcroît $F = \mathbb{K}^m$ alors $f = \varphi(M)$, avec $M = (v_1 \cdots v_n) \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, et $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_n) = \underbrace{\mathrm{rg}(M)}_{= \#\text{pivots}}$.

3.29 Théorème du rang : Soit $f: E \to F$ une application linéaire. Alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$.

Démonstration : • quitte à remplacer F par $\mathrm{Im}(f)$, on peut supposer sans perte de généralité que f est surjective, auquel cas $F = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$.

• lorsqu'on compose f avec un isomorphisme, les quantités en jeu dans le théorème du rang ne changent pas.

En effet si $\Phi: E' \to E$ et $\Psi: F \to F'$ sont des isomorphismes, alors

à démontrer en détail en exercice

+ $\mathrm{Im}(\Psi \circ f \circ \Phi) = \Psi(\mathrm{Im}(f))$, donc $\mathrm{rg}(\Psi \circ f \circ \Phi) = \mathrm{rg}(f)$
+ $\mathrm{Ker}(\Psi \circ f \circ \Phi) = \Phi(\mathrm{Ker}(f))$, donc
$\dim(\mathrm{Ker}(\Psi \circ f \circ \Phi)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$

a demander en détail en exercice

+ $\mathrm{Ker}(\Psi\circ f\circ\Phi) = \Phi(\mathrm{Ker}(f))$, donc
$$\dim(\mathrm{Ker}(\Psi\circ f\circ \Phi)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)).$$
+ $\dim(E') = \dim(E)$, car Φ est un isomorphisme.

Par conséquent, le théorème du rang pour f se déduit du théorème du rang pour $\Psi\circ f\circ\Phi$.

Par conséquent, en choisissant des bases u et v de E et F, et en posant $\Phi = \mathcal{C}\ell_u : \mathbb{K}^n \to E$ et $\Psi = \mathcal{C}\ell_v^{-1} : F \to \mathbb{K}^m$, on peut se ramener au cas d'une application linéaire $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, surjective de surcroît (voir plus haut).

- Supposons donc qu'on a une application linéaire surjective $f = \varphi(M) : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$, où $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ est de rang m (car f est supposée surjective).

Le théorème du rang devient
$$\underbrace{n}_{\substack{\dim(\mathbb{K}^n)\\ =\#\text{ colonnes}}} = \underbrace{\dim(Sol_M)}_{\mathrm{Ker}(f)} + \underbrace{m}_{\substack{\dim(\mathbb{K}^m)\\ =\#\text{ lignes}}}$$

On doit donc montrer que $\dim(Sol_M) = n-m$.

Les quantités en jeu ne changent pas lorsqu'on applique l'algorithme de Gauss ; on peut donc supposer que M est échelonnée réduite :

$$M = \left(\begin{array}{ccccc|c} \cdots & \boxed{1} & \cdots & & 0 & \\ & & \boxed{1} & \cdots & & A \\ & 0 & & \ddots & & \\ & & & & \boxed{1} & \end{array}\right)$$
$$\begin{array}{ccc} \text{colonne } i_1 & i_2 & i_m \end{array}$$

Il y a exactement m pivots car $rg(M) = m$.

Avec $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m\\ i_m+1\leq j\leq n}}$ on peut décrire aisément l'espace vectoriel des solutions du système :

$$Sol_M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{i_1} = -\sum_{j\geq i_m+1} a_{1j}\, x_j \\ \vdots \\ x_{i_m} = -\sum_{j\geq i_m+1} a_{i_m j}\, x_j \end{array} \right\}$$

Vous pouvez démontrer que cet espace vectoriel est de dimension $n-m$ en montrant que l'application linéaire
$$Sol_M \longrightarrow \mathbb{K}^{\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_m\}}$$

dimension $n-m$ et montrant que l'application linéaire
$$Sol_M \longrightarrow \mathbb{K}^{\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_m\}}$$
qui oublie les coordonnées numéro $i_1,\dots,i_m$ est un isomorphisme. $\square$

3.30 <u>Conséquences</u> : Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

- f injective $\Rightarrow \dim(E) \leq \dim(F)$.

En effet, si f est injective alors $\dim(E) = rg(f) \leq \dim(F)$.

- f surjective $\Rightarrow \dim(E) \geq \dim(F)$.

En effet, si f est surjective alors $\dim(F) = rg(f) \leq \dim(E)$.

- f injective et $\dim(E) = \dim(F) \Leftrightarrow f$ isomorphisme.

Seule $\boxed{\Rightarrow}$ nécessite une démonstration.

On a $rg(f) \underset{\text{car } f \text{ injective}}{=} \dim(E) = \dim(F)$. Donc $\mathrm{Im}(f) = F$.

Donc f est également surjective.

- f surjective et $\dim(E) = \dim(F) \Leftrightarrow f$ isomorphisme.

Seule $\boxed{\Rightarrow}$ nécessite une démonstration.

On a $rg(f) \underset{\text{car } f \text{ surjective}}{=} \dim(F) = \dim(E)$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Donc f est également injective.

<u>Exercice</u> : démontrer ces 4 conséquences sans utiliser le théorème du rang.

3.31 <u>Exemples</u> : 1) $f = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

On applique Gauss :
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{-7} & -7 \end{pmatrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$
Il y a un pivot sur chaque ligne donc f est surjective, et $rg(f) = 2$.

On remarque que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$. En effet :
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3-4 \\ 2-1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3 - 2 = 1$.

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Or d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3-2 = 1$.
Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$.

2) $g = \varphi\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\\ 4 & 1\end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Les deux vecteurs colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires donc g est injective et $\mathrm{rg}(g) = 2$.
Donc $\mathrm{Im}(g)$ est le plan vectoriel $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

Pour trouver l'équation qui caractérise ce plan, on applique l'algorithme de Gauss à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x\\ 3 & -1 & y\\ 4 & 1 & z\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & x\\ 0 & \boxed{-7} & y-3x\\ 0 & 0 & \boxed{z-x-y}\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1\\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1\end{array}$$

L'équation est donnée par la ligne sans pivot :
$$\mathrm{Im}(g) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z-x-y = 0\}.$$

Projections

Une application linéaire $f : E \to E$ s'appelle un **endomorphisme** de l'espace vectoriel E. On note $\mathrm{End}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

$\boxed{3.32}$ Définition : une **projection** (aussi appelée un **projecteur**) est un endomorphisme $p : E \to E$ tel que $p \circ p = p$.

$\boxed{3.33}$ Exemple : si $F, G \subset E$ sont deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$, alors on peut considérer la **projection sur F parallèlement à G** : pour tout $v \in F$ et tout $w \in G$,
$$p_F^G(v+w) := v.$$
Comme tout vecteur de E se décompose uniquement en somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, l'endomorphisme p_F^G est bien défini.
p_F^G est bien une projection : $p_F^G \circ p_F^G = p_F^G$.
En effet : si $v \in F$ et $w \in G$ alors

p_F^G est donc une projection : $p_F^G \circ p_F^G = p_F^G$.

En effet : si $v \in F$ et $w \in G$ alors
$$p_F^G(p_F^G(v+w)) = p_F^G(v) = p_F^G(v+0_E) = v = p_F^G(v+w).$$

Déclinons maintenant cet exemple en plusieurs "sous-exemples".

- $E = E \oplus \{0_E\}$.
  La projection $p_E^{\{0_E\}}$ sur E le long de $\{0_E\}$ est id_E.
- $E = \{0_E\} \oplus E$.
  La projection $p_{\{0_E\}}^{E}$ sur $\{0_E\}$ le long de E est l'application constante égale à 0_E.
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\{0\} \oplus \{0\}\times\mathbb{R}$.
  La projection sur $\mathbb{R}\times\{0\}$ le long de $\{0\}\times\mathbb{R}$ est l'application donnée par $(x,y)\mapsto(x,0)$.
- l'exemple qui précède est un cas particulier de projection orthogonale. Si $F \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel, alors $F^\perp := \{w \in \mathbb{R}^n \mid \forall v \in F, \langle v,w\rangle = 0\}$ est un sous-espace vectoriel supplémentaire de F.

  à montrer en exercice pour réviser le chapitre 2

  La projection orthogonale $p_F^\perp$ sur F est par définition la projection $p_F^{F^\perp}$ sur F le long de $F^\perp$.

  Exercice : dans $\mathbb{R}^3$, on suppose que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et que $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0\}$.
  Trouver un vecteur qui engendre $F^\perp$ et déterminer une formule pour $p_F^\perp$.

- $\mathbb{K}[X] = \underbrace{\mathbb{K}}_{\text{polynômes constants}} \oplus \mathrm{Ker}(ev_a)$, pour $a \in \mathbb{K}$.
  La projection correspondante est l'application qui envoie $P(X)$ sur le polynôme constant égal à $P(a)$.

Dans l'exemple qui précède, on vérifie facilement que $\mathrm{Im}(p_F^G) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F^G) = G$. Nous allons voir que toute projection est la projection sur son image parallèlement à son noyau :

3.34 **Proposition** : Soit $p : E \to E$ une projection. Si $F := \mathrm{Im}(p)$ et $G := \mathrm{Ker}(p)$, alors $E = F \oplus G$ et $p = p_F^G$.

Démonstration : • On commence par montrer que $E = F+G$.

Démonstration : • on commence par montrer que $E = F + G$.

Soit $v \in E$. Alors $v = p(v) + (v - p(v))$.

On a $p(v) \in \mathrm{Im}(p) = F$ (par définition)

et $p(v - p(v)) \underset{p \text{ linéaire}}{=} p(v) - p(p(v)) \underset{p \circ p = p}{=} p(v) - p(v) = 0_E$

Donc $v - p(v) \in \mathrm{Ker}(p) = G$.

• montrons maintenant que $F \cap G = \{0_E\}$ (et donc que $E = F \oplus G$)

Si $v = p(u)$ et $p(v) = 0_E$, alors $0_E = p(v) = p(p(u)) = p(u) = v$.

• montrons finalement que $p = p_F^G$.

si $v \in F = \mathrm{Im}(p)$, alors $v = p(u)$ et $p(v) = p(p(u)) = p(u) = v$.

si $w \in G = \mathrm{Ker}(p)$, alors $p(w) = 0_E$.

Donc $p(v+w) = v = p_F^G(v+w)$. □

Symétries

Définition : une symétrie est un endomorphisme $\sigma : E \to E$ vérifiant

$\sigma \circ \sigma = id_E$.

Exemple : si $F, G \subset E$ sont deux sous-espaces vectoriels tels que $E = F \oplus G$, alors on peut considérer la symétrie par rapport à F parallèlement à G : pour tout $v \in F$, $\sigma_F^G(v) = v$, et pour tout $w \in G$, $\sigma_F^G(w) = -w$ (autrement dit : $\sigma_F^G(v+w) = v - w$).

On a bien $\sigma_F^G(\sigma_F^G(v+w)) = \sigma_F^G(v-w) = v + w$.

On décline cet exemple en plusieurs "sous-exemples" :

- $E = E \oplus \{0_E\}$: $\sigma_E^{\{0_E\}} = id_E$.
- $E = \{0_E\} \oplus E$: $\sigma_{\{0_E\}}^E = -id_E$.
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \{0\} \oplus \{0\} \times \mathbb{R}$: $\sigma_{\mathbb{R} \times \{0\}}^{\{0\} \times \mathbb{R}}(x, y) = (x, -y)$.
- $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\} \oplus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = -y\}$.

  La symétrie correspondante est $(x, y) \mapsto (y, x)$

  Démontrez-le en exercice !
- les deux exemples qui précèdent sont des cas particuliers de symétries orthogonales.

  Si $F \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel, alors on de symétries orthogonales.

Si $F \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel, alors on rappelle (cf. $\boxed{3.33}$) que $\mathbb{R}^n = F \oplus F^\perp$. La symétrie orthogonale par rapport à F est $\sigma_F^\perp := \sigma_F^{F^\perp}$.

Exercice: (1) voir pourquoi les deux exemples précédents sont des symétries orthogonales.
(2) écrire la formule de la symétrie orthogonale par rapport à un plan d'équation $ax+by+cz=0$ dans $\mathbb{R}^3$.

- Soient u et v deux vecteurs non colinéaires dans $\mathbb{R}^2$.
Alors $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(u) \oplus \mathrm{Vect}(v)$.
La symétrie correspondante est donnée par $\lambda u + \mu v \mapsto \lambda u - \mu v$
(Faire un dessin !) $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

cf. Observation $\boxed{1.27}$

Proposition: Supposons que la caractéristique de $\mathbb{K}$ n'est pas 2.
Posons $F := \mathrm{Ker}(\sigma - id_E)$ et $G := \mathrm{Ker}(\sigma + id_E)$.
Alors $\sigma = \sigma_F^G$.

Démonstration: • commençons par montrer que $E = F \oplus G$.
→ montrons d'abord que $E = F + G$.
Soit $u \in E$. Posons $v := \frac{\sigma(u)+u}{2}$ et $w := \frac{u - \sigma(u)}{2}$.

pour cela il faut que $2 \neq 0$ dans $\mathbb{K}$ (I.e. $car(\mathbb{K}) \neq 2$)

On a bien $u = v + w$.
De plus, $\sigma(v) - v = \dfrac{u + \sigma(u) - \sigma(u) - u}{2} = 0_E$

et $\sigma(w) + w = \dfrac{\sigma(u) - u + u - \sigma(u)}{2} = 0_E$.

Donc $v \in \underbrace{\mathrm{Ker}(\sigma - id_E)}_{=F}$ et $w \in \underbrace{\mathrm{Ker}(\sigma + id_E)}_{=G}$.
→ montrons ensuite que $F \cap G = \{0_E\}$.
Si $u \in F \cap G$ alors $u = \sigma(u) = -u$.
Donc $2u = 0_E$ et ainsi $u = 0_E$

• montrons finalement que $\sigma = \sigma_F^G$.
Si $v \in F = \mathrm{Ker}(\sigma - id_E)$, alors $\sigma(v) = v$.
Si $w \in G = \mathrm{Ker}(\sigma + id_E)$, alors $\sigma(w) = -w$. □

Si $v \in F = \mathrm{Ker}(\sigma - id_E)$, alors $\sigma(v) = v$.
Si $w \in G = \mathrm{Ker}(\sigma + id_E)$, alors $\sigma(w) = -w$. $\square$

Rappelons que $O(n) = \{\Phi \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \langle \Phi(u), \Phi(v) \rangle = \langle u, v \rangle\}$ est l'ensemble des isométries linéaires de $\mathbb{R}^n$.

Proposition: une symétrie $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une isométrie si et seulement si $\mathrm{Ker}(\sigma - id_{\mathbb{R}^n})^\perp = \mathrm{Ker}(\sigma + id_{\mathbb{R}^n})$.

Démonstration: • notons $F := \mathrm{Ker}(\sigma - id_{\mathbb{R}^n})$ et $G := \mathrm{Ker}(\sigma + id_{\mathbb{R}^n})$, de sorte que $\sigma = \sigma_F^G$. On veut montrer que σ_F^G est une isométrie si et seulement si $G = F^\perp$.

• Soient $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$. Calculons :

$$\langle \sigma(v+w), \sigma(v'+w') \rangle = \langle v-w, v'-w' \rangle$$
$$= \langle v, v' \rangle - \langle v, w' \rangle - \langle v', w \rangle + \langle w, w' \rangle.$$

alors que $\langle v+w, v'+w' \rangle = \langle v, v' \rangle + \langle v, w' \rangle + \langle v', w \rangle + \langle w, w' \rangle$

Par conséquent σ est une isométrie si et seulement si $\langle v, w' \rangle + \langle v', w \rangle = 0$ quels que soient $v, v' \in F$, $w, w' \in G$.

$\boxed{\Rightarrow}$ si σ est une isométrie, alors en choisissant $v' = w = 0$, on trouve que $\langle v, w' \rangle = 0$ quels que soient $v \in F$ et $w' \in G$.
Donc $F^\perp = G$ (car $F \oplus G = E$).

$\boxed{\Leftarrow}$ si $F^\perp = G$ alors $\langle v, w' \rangle = 0 = \langle v', w \rangle$ et donc $\langle v, w' \rangle + \langle v', w \rangle = 0$, quels que soient $v, v' \in F$ et $w, w' \in G$.
Par conséquent σ est une isométrie. $\square$

Théorème: toute isométrie linéaire est la composée d'un nombre fini de symétries orthogonales.

Démonstration: ADMISE.