HAX301X – Algèbre III

Réduction des Endomorphismes

Livret d'exercices

Introduction et rappels

Piste verte.

Exercice 1. Soit f une application linéaire de E dans E telle que $\ker(f) \neq \{0_E\}$. Peut-on trouver une base de E dans laquelle la matrice de f est inversible ?

Exercice 2. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ sont-elles sembables/conjuguées ?

Exercice 3. Calculer le carré des matrices diagonales $M := diag(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ et $N := diag(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}) \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Montrer que M et N ne sont pas semblables/conjuguées.

Piste bleue.

Exercice 4. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère la matrice de taille $N \times N$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \end{pmatrix}$$

où $a_0, \ldots, a_{N-1} \in \mathbb{K}$ sont des scalaires. Quel est le rang de C ?

Exercice 5. Considérons la matrice $P \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ définie comme

$$P := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer que $P^2 = \mathrm{I}_n$; puis calculer que pour tout $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, PAP^{-1} est la matrice dont le coefficient (i,j) est $a_{n-i+1\, n-j+1}$.

(2) Écrire P comme une matrice de passage, et ré-interpréter la question précédente en termes de changement de base.

Exercice 6. On appelle f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Écrire la matrice de f relativement à la base $\mathcal{B} = (w_1, w_2)$ de $\mathbb{R}^2$, avec $w_1 = (1, -2)$ et $w_2 = (1, -1)$.

(2) Déterminer la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ à la base $\mathcal{B}$.

(3) En déduire une expression en fonction de $n \in \mathbb{N}$ de A^n.

(4) Application : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_0 = 1 = v_0$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 7u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + v_n\,. \end{cases}$$

Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_n)_{n\ge 0}$ une suite croissante (pour l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $\cup_{n\ge 0} F_n$ est un sous-espace vectoriel de E.

Piste rouge.

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le N} \in \mathrm{Mat}_{N\times N}(\mathbb{K})$, $N \in \mathbb{N}$. On définit un endomorphisme A_E de E^N de la manière suivante :

$$A_E \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + \cdots + a_{1N}v_N \\ \vdots \\ a_{N1}v_1 + \cdots + a_{NN}v_N \end{pmatrix}.$$

Pour tout endomorphisme $\varphi : E \to E$ on définit une application linéaire $\Phi : E \to E^N$ et un endomorphisme $\varphi^{\times N} : E^N \to E^N$ comme suit :

$$\Phi(v) := \begin{pmatrix} v \\ \varphi(v) \\ \vdots \\ \varphi^{\circ(N-1)}(v) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \varphi^{\times N} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi(v_1) \\ \vdots \\ \varphi(v_N) \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que Φ induit un isomorphisme entre $\ker\big(a_0 \mathrm{id}_E + a_1\varphi + \cdots + a_{N-1}\varphi^{\circ N-1} - \varphi^{\circ N}\big)$ et $\ker\big(\varphi^{\times N} - A_C\big)$, où C est la matrice de l'Exercice 4.

(2) Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\varphi(u)_n := u_{n+1}$. Déduire du point précédent que le sous-espace vectoriel des suites numériques $(u_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$u_{n+N} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \cdots + a_{N-1} u_{n+N-1}$$

s'identifie à l'espace vectoriel des suites $(X_n)_{n\geq 0}$ à valeur dans $\mathbb{R}^N$ satisfaisant la relation de récurrence $X_{n+1} = CX_n$.

Permutations

Piste verte.

Exercice 9. Dans $\mathfrak{S}_4$, quel est l'inverse du cycle (1234) ?

Exercice 10. Effectuer les produits de permutations qui suivent :

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 11. Calculer la signature de toutes les permutations qui apparaissent dans les Exercices 9 et 10.

Exercice 12. Factoriser la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ en produit de cycles à supports disjoints. Puis faire de même avec $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

Piste bleue.

Exercice 13. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que pour tout $1 \leq i, j \leq n$ il n'y a que deux possibilités : soit $\mathcal{O}_\sigma(i) = \mathcal{O}_\sigma(j)$, soit $\mathcal{O}_\sigma(i) \cap \mathcal{O}_\sigma(j) = \emptyset$.

Exercice 14. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est abélien si et seulement si $n \in \{1, 2\}$.

Exercice 15. Montrer que la signature de toute transposition vaut -1. [Indication : on pourra montrer que le nombre d'inversions de la transposition $(i\,j)$ est $2|i-j|-1$.]

Exercice 16. Soient $(\alpha,\beta)\in\mathfrak{S}_q\times\mathfrak{S}_r$. On définit alors $\alpha\sqcup\beta\in\mathfrak{S}_{q+r}$ de la manière suivante :
$$\alpha\sqcup\beta := \begin{pmatrix} 1 & \cdots & q & q+1 & \cdots & q+r \\ \alpha(1) & \cdots & \alpha(q) & q+\beta(1) & \cdots & q+\beta(r)\end{pmatrix}.$$
Démontrer que $\varepsilon(\alpha\sqcup\beta)=\varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta)$.

Piste rouge.

Exercice 17. On rappelle que le support d'une permutation $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ est l'ensemble $supp(\sigma) := \{1\le i\le n \,|\, \sigma(i)\neq i\}$.

(1) Déterminer le support de $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6\\ 1 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$, et montrer que c'est un cycle.

(2) Montrer que pour tout $\sigma\in\mathfrak{S}_n$, si $i\in supp(\sigma)$ alors $\sigma(i)\in supp(\sigma)$.

(3) Montrer que deux permutations à supports disjoints commutent. [Indication : on pourra calculer $\sigma\tau(i)$ et $\tau\sigma(i)$ dans les trois cas qui suivent : $i\in supp(\sigma)$, $i\in supp(\tau)$, et $i\notin supp(\sigma)\cup supp(\tau)$.]

Exercice 18.

(1) Montrer que tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme produit de k transpositions, avec $k<n$.

(2) Soient $2\le i\neq j\le n$. Calculer $(1\,i)(1\,j)(1\,i)$. En déduire que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions $(1\,i)$ avec $i\ge 2$.

(3) Soient $1\le i<j\le n$. Écrire $(i\,j)$ comme produit de transpositions de la forme $(k\,k+1)$, avec $1\le k\le n-1$. En déduire que toute permutation peut s'écrire comme produit de transpositions $(k\,k+1)$ avec $1\le k\le n-1$.

Exercice 19. Soit σ une permutation d'ordre $\ell\in\mathbb{N}$. On note $\sigma=c_1\cdots c_m$ sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints, et on note ℓ_i l'ordre de c_i. Montrer que $\ell = ppcm(\ell_1,\ldots,\ell_m)$.

Déterminant

Piste verte.

Exercice 20. Montrer que le déterminant de $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 3 & 2\end{pmatrix}$ est nul de (au moins) deux manières différentes.

Exercice 21. Calculer $\det(\phi)$, pour $\phi : \mathbb{K}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{K}[X]_{\leq 3}$ l'application linéaire donnée par la dérivée. Même question avec l'application linéaire $\psi : \mathbb{K}[X]_{\leq 3} \to \mathbb{K}[X]_{\leq 3}$ définie par $\psi(P)(X) = P(X+1)$.

Piste bleue.

Exercice 22. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}$ et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une application. Montrer que si f est antisymétrique et linéaire en le premier argument, alors f est n-linéaire.

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée alors pour toute famille liée $(u_1, \ldots, u_n)$ de longueur n, $f(u_1, \ldots, u_n) = 0$.

Exercice 24. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Supposons que $E = F \oplus G$, pour F et G des sous-espaces vectoriels de dimension respective q et r (ainsi, $n = q+r$). On se donne une base $v = (v_1, \ldots, v_q)$ de F et une base $w = (w_1, \ldots, w_r)$ de G, de sorte que $u := v \sqcup w = (v_1, \ldots, v_q, w_1, \ldots, w_r)$ est une base de E. Soit $\phi \in \mathrm{End}(E)$ un endomorphisme.

(1) Démontrer que F est stable par ϕ si et seulement si $M_{u,u}(\phi)$ est une matrice triangulaire supérieure par blocs de type (q, r) ;

(2) Démontrer que G est stable par ϕ si et seulement si $M_{u,u}(\phi)$ est une matrice triangulaire inférieure par blocs de type (q, r) ;

(3) En déduire que F et G sont stables par ϕ si et seulement si $M_{u,u}(\phi)$ est diagonale par blocs de type (q, r).

Exercice 25. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$a_{22}\det(A) = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{vmatrix} .$$

Piste rouge.

Exercice 26. Soient $A \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{K})$ et $v, w \in \mathbb{K}^3$. Montrer que

$$(Av) \wedge (Aw) = \mathrm{com}(A)(v \wedge w) .$$

Exercice 27. Soit $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. On note $X \cdot M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K}[X])$ la matrice dont le coefficient (i, j) est $m_{ij}X$. Montrer que $\det(\mathrm{I}_n + X \cdot M) \equiv 1 + X\mathrm{tr}(M) \bmod X^2$.

Exercice 28. Soient $k > 0$ et $n > 0$ deux entiers naturels, et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'objectif de cet exercice est de montrer que $\dim\big(\mathrm{Alt}_k(E)\big) = \binom{n}{k}$.

(1) Commencer par montrer que si $k > n$ alors $\dim\big(\mathrm{Alt}_k(E)\big) = 0$.

(2) Montrer que pour $k=1$, $\dim\big(\mathrm{Alt}_1(E)\big)=n$.

(3) Suppons que $(v_1,\dots,v_n)$ est une base de E. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Alt}_k(E) & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\binom{n}{k}} \\ f & \longmapsto & \big(f(v_{i_1},\dots,v_{i_k})\big)_{1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n} \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels [1].

Exercice 29. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on considère le déterminant $n\times n$

$$f_n := \begin{vmatrix} +1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ +1 & +1 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & +1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & +1 & +1 \end{vmatrix}.$$

Montrer que f_n est le terme numéro n de la suite de Fibonacci (définie par $f_0=f_1=1$ et la relation de récurrence $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$ quel que soit $n\in\mathbb{N}$). [Indication : pour montrer que la relation de récurrence est satisfaite, on pourra commencer par développer le déterminant suivant la première colonne.]

Exercice 30. On considère le déterminant des matrices de taille $n\times n$ à coefficients réels comme une fonction de n^2 variables $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Montrer que

$$\frac{\partial \det(A)}{\partial a_{ij}} = (-1)^{i+j}|A^{i,j}|\,.$$

[Indication : on pourra développer le déterminant suivant la j-ième colonne ou bien suivant la i-ième ligne.]

Piste noire.

Exercice 31. Le déterminant de Vandermonde est défini par

$$V(x_0,\dots,x_n) := \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

quel que soient $x_0,\dots,x_n\in\mathbb{K}$. C'est l'évaluation en $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ d'un polynôme en $n+1$ variable $V\in\mathbb{K}[X_0,\dots,X_n]$.

1. Vous pouvez vous inspirer de la démonstration de la Proposition 3.6 et du Lemme 3.7 dans le Chapitre 1 du cours.

(1) Fixons $x_0, \dots, x_{n-1}$, et considérons le polynôme $Q(Y) := V(x_0, \dots, x_{n-1}, Y) \in \mathbb{K}[Y]$. Montrer que Q est un multiple de $\prod_{i=0}^{n-1}(Y - x_i)$.

(2) Montrer que Q est de degré $\leq n$ et que le coefficient de Y^n est $V(x_0, \dots, x_{n-1})$. En déduire que $Q(Y) = V(x_0, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=0}^{n-1}(Y - x_i)$.

(3) Démontrer que

$$V(x_0, \dots, x_n) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)\,.$$

(4) En déduire que $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ sont distincts deux à deux si et seulement si l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X]_{\leq n} & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \dots, P(x_n)\big) \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On suppose désormais que nous sommes dans cette situation, de sorte que la matrice A définissant le déterminant de Vandermonde est inversible. On note L_i l'unique polynôme de degré $\leq n$ tel que $L_i(x_j) = \delta_{ij}$.

(5) Montrer que si $A^{-1} = (b_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$ alors $L_i(X) = b_{0i} + b_{1i}X + \dots + b_{ni}X^n$.

(6) Montrer que

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}\,.$$

(7) En déduire une formule pour l'inverse de la matrice de Vandermonde lorsque $n = 2$ (lorsque celle-ci est inversible). [On pourra utiliser a, b, c plutôt que x_0, x_1, x_2.]

Valeurs propres et polynôme caractéristique

Piste verte.

Exercice 32. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\pi : E \to E$ une projection. On note $q = \dim\big(\ker(\pi)\big)$ et $r = \dim\big(\mathrm{im}(\pi)\big)$. Donner le spectre et le polynôme caractéristique $\chi_\pi(X)$ π en fonction de q et r.

Exercice 33. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\sigma : E \to E$ une symétrie. On suppose que la caractéristique de $\mathbb{K}$ est différente de 2. On note $q = \dim\big(\ker(\sigma - \mathrm{id})\big)$ et $r = \dim\big(\ker(\sigma + \mathrm{id})\big)$. Donner le spectre et le polynôme caractéristique $\chi_\sigma(X)$ de σ en fonction de q et r.

Exercice 34. Dans $\mathbb{R}^3$, donner deux vecteurs propres non colinéaires de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Peut-on en trouver un troisième qui ne soit pas combinaison linéaire des deux autres ?

Piste bleue.

Exercice 35. Trouver les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Montrer qu'elle est diagonalisable et donner une base de vecteurs propres.

Exercice 36. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et en déduire que cette matrice est diagonalisable. Donner une base de vecteurs propres.

Exercice 37. Même chose avec $\begin{pmatrix}5 & -3 & 2\\ 6 & -4 & 4\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}$. En déduire qu'elle est semblable/conjuguée à la matrice de l'exercice précédent.

Exercice 38. Soient $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ des scalaires. On leur associe une matrice de taille $n \times n$

$$C = \begin{pmatrix}0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2}\\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1}\end{pmatrix}$$

Montrer que $\chi_C(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$. [Indication : on pourra développer le déterminant selon la dernière colonne.]
On dit que C est la **matrice compagnon** de ce polynôme unitaire.

Exercice 39. Soient $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathrm{Mat}_{n\times m}(\mathbb{K})$. On considèrent les matrices par bloc qui suivent :

$$M := \begin{pmatrix}X\cdot \mathrm{I}_m & -A\\ \mathbf{0} & \mathrm{I}_n\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N := \begin{pmatrix}\mathrm{I}_m & A\\ B & X\cdot \mathrm{I}_n\end{pmatrix}$$

(1) Calculer MN et NM.
(2) En déduire que $X^n\chi_{AB}(X) = X^m\chi_{BA}(X)$.
(3) Conclure que si $m = n$ alors $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}$.
(4) Soit $C = (a_i b_j)_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, où les a_i et les b_j sont des scalaires quelconques. Montrer que $\chi_C(X) = X^n - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) X^{n-1}$.

Piste rouge.

Exercice 40. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et en déduire que cette matrice est trigonalisable. Décrire ses sous-espaces propres et en déduire qu'elle n'est pas diagonalisable. Trigonaliser la matrice.

Exercice 41. Même chose avec la matrice $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire qu'elle est semblable/conjuguée à la matrice de l'exercice précédent. Par quelle matrice ?

Exercice 42. Soit $E \subset C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des fonctions qui sont 2π-périodiques. On considère l'endomorphisme $\phi : E \to E$ défini par $\phi(f) = f''$.

(1) Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $-n^2$ est une valeur propre de ϕ, dont on donnera un vecteur propre associé.

(2) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, donner une base du sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini comme
$$E_\lambda := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f'' = \lambda f\}.$$
[Indication : on pourra distinguer 3 cas : $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.

(3) En déduire que ϕ n'a pas d'autre valeur propre que celles de la question (1).

(4) Pour chaque valeur propre $\lambda = -n^2$ de ϕ donner la dimension de $\ker(\phi + n^2\mathrm{id}_E)$. [Attention : il y a 2 situations possibles.]

Diagonalisation, trigonalisation, polynômes d'endomorphismes

Piste verte.

Exercice 43. Soit $A = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$ et soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(A) = diag\big(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n)\big)$.

Exercice 44. Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal des trois matrices qui suivent :
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Piste bleue.

Exercice 45. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E vérifiant $f^{\circ 3} = 4f$. Montrer que la trace de f est un entier pair.

Exercice 46. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathrm{End}(E)$ tel que $f^{\circ 2}$ soit une projection.

(1) Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1, 0, 1\}$.

(2) Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f^{\circ 3} = f$.

Exercice 47. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathrm{End}(E)$. Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes :

(1) χ_f est scindé.

(2) μ_f est scindé.

(3) Il existe un polynôme scindé annulateur de f.

Exercice 48. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $\phi : E \to E$ un endomorphisme tel que $\phi^n = \mathrm{id}_E$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ est diagonalisable. Est-ce toujours le cas si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 49. Soit C la matrice compagnon de l'Exercice 38.

(1) Montrer par récurrence sur $1 \leq k \leq n-1$ que la première colonne de la matrice C^k est le vecteur e_{k+1} de la base canonique de $\mathbb{K}^n$, de sorte que la famille $(e_1, Ce_1, \ldots, C^{n-1}e_1)$ est exactement la base canonique.

(2) En déduire que si $P \in \mathbb{K}[X]_{\leq n-1}$ est un polynôme annulateur de C alors $P = 0$.

(3) En déduire que le polynôme minimal de C est égal à son polynôme caractéristique, et donc que $\mu_C(X) = \chi_C(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$.

Piste rouge.

Exercice 50. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et soient $f, g \in \mathrm{End}(E)$ deux endomorphismes qui commutent : $f \circ g = g \circ f$.

(1) Montrer que pour toute valeur propre λ de g, le sous-espace vectoriel $E_\lambda(g)$ est stable par f. En déduire que si f est diagonalisable alors la restriction $f_{|E_\lambda(g)}$ est diagonalisable comme endomorphisme de $E_\lambda(g)$.

(2) Montrer que si f et g sont diagonalisables alors il existe une base commune de diagonalisation de f et g (autrement dit, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$ et $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(g)$ sont toutes les deux diagonales).

(3) En déduire que si f et g sont diagonalisables alors $f \circ g$ et $g \circ f$ sont diagonalisables.

(4) Illustrer ce résultat avec les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

HAX301X – Algèbre III

Réduction des Endomorphismes

Exercices supplémentaires

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $f : E \to E$ un endomorphisme de rang 1.

(1) Montrer que 0 est une valeur propre de f et que sa multiplicité géométrique $m_g(0)$ est $n-1$.

(2) En déduire que $\chi_f(X) = X^{n-1}(X-\lambda)$, avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

(3) Montrer que $\lambda = \mathrm{tr}(f)$, et en déduire que f est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(f) \neq 0$.

Exercice 2. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme et $v \in E$ un vecteur tel que $f^{\circ q}(v) = 0_E$ et $f^{\circ(q-1)}(v) \neq 0_E$, pour un certain entier $q \geq 1$.

(1) Montrer que la famille $\mathcal{B}_v := \left(f^{\circ k}(v)\right)_{0 \leq k \leq q-1}$ est libre.

(2) Montrer que $H_v := \mathrm{Vect}\{f^{\circ k}(v) \,|\, 0 \leq k \leq q-1\}$ est stable par f.

(3) Donner la matrice de $f_{|H_v}$ dans la base $\mathcal{B}_v$.

Exercice 3. Décrire le terme général des suites **à valeurs réelles** $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence

$$u_{n+3} = u_n - u_{n+1} + u_{n+2}\,.$$

[*Indication : pour la formule du terme général, on pourra faire une disjonction de cas en fonction de la parité de n*]

Exercice 4. Même question que l'exercice précédent, avec la relation de récurrence

$$u_{n+4} = 2u_{n+2} - u_n\,.$$

Exercice 5. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E := \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions d'une variable réelle de classe $\mathcal{C}^1$. On rappelle que $F := \{y \in E \,|\, y'' - y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E [*HAX202X : l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un* *sous-espace vectoriel*]. On admettra que $G := \left\{(u,v) \in E^2 \mid \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de E^2.

(1) Montrer que l'application linéaire $\varphi : E \to E^2$ définie par $\varphi(y) = (y, y')$ induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre F et G.
[*Indication : il suffit de montrer que φ est injective et que $\varphi(F) = G$.*]

(2) Trouver une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(3) En déduire que $(u,v) \in G$ si et seulement si il existe des constantes $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $(u+v)'(t) = a\exp(t)$ et $(u-v)'(t) = b\exp(-t)$.

(4) Conclure : $y \in F$ si et seulement si il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ telles que $y(t) = \lambda\exp(t) + \mu\exp(-t)$.

Piste noire.

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel complexe de dimension finie non nulle. Soient f et g des endomorphismes de E.

(1) On suppose f et g commutent. Montrer que qu'il existe une base commune de trigonalisation pour f et g (on dit que f et g sont *cotrigonalisables*).

(2) On suppose que $f \circ g - g \circ f = \lambda f$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer que f est nilpotent, et que f et g sont cotrigonalisables.

(3) On suppose que $f \circ g - g \circ f = \lambda f + \mu g$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Montrer que f et g sont cotrigonalisables.