JACQUET-LANGLANDS ET UNITARISABILITÉ

par Alexandru Ioan BADULESCU[1]

Abstract : We give a generalization of the local Jacquet-Langlands correspondence to all the smooth irreducible representations. This correspondence is characterized by the fact that it respects the classical Jacquet-Langlands correspondence and it commutes with the parabolic induction functor. It has good behavior with respect to the Jacquet's functor and the involution of Aubert-Schneider-Stuhler. Using this correspondence, we prove some particular cases of the global Jacquet-Langlands correspondence and we deduce that a certain class of representations of an inner form of GL_n over a p-adic field are unitarizable. This is the first step towards the proof of the conjecture U1 of Tadić.

Mathematics Subject Classification (2000) : 20G05-20G25-20G30

Table des matières

[1]Alexandru Ioan BADULESCU, Université de Poitiers, UFR Sciences SP2MI, Département de Mathématiques, Téléport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL CEDEX
E-mail : badulesc@math.univ-poitiers.fr

1. Introduction

Dans ce papier nous étudions une correspondance du type Jacquet-Langlands locale pour les représentations qui ne sont pas essentiellement de carré intégrable, et nous en tirons des conséquences sur la correspondance de Jacquet-Langlands globale et sur l'unitarisabilité de certaines représentations des formes intérieures (locales) du groupe linéaire. L'étude est motivée par la compréhension, à terme, d'une correspondance globale générale. Pour obtenir une telle correspondance il faut comprendre le transfert local pour les composantes locales des séries discrètes globales du groupe linéaire, et notre étude donne certains résultats partiels en ce sens. L'intérêt d'une correspondance globale serait la preuve du théorème de multiplicité un et la classification du spectre résiduel pour les formes intérieures de GL_n sur un corps global.

Si on pose $G = GL_n(F)$ où F est un corps local non archimédien et on note G' une forme intérieure de G, la correspondance locale que nous construisons ici est un morphisme de groupes entre les groupes de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de G et de G'. Ce morphisme respecte la relation de Jacquet-Langlands entre les caractères. Dans un sens qui reste à définir, ce morphisme commute aux foncteurs d'induction et de restriction paraboliques ainsi qu'à l'involution définie par Aubert et par Schneider et Stuhler dans le groupe de Grothendieck. L'involution joue un rôle central dans la compréhension de la correspondance pour les composantes locales des séries discrètes globales. Comme application de notre construction nous montrons quelques cas particuliers de correspondance de Jacquet-Langlands globale qui entraînent un résultat local : l'unitarisabilité de toute une classe de représentations d'une forme intérieure du groupe linéaire sur un corps local. Ce résultat local est en accord avec les conjectures de Tadić ([Ta2]) sur le spectre unitaire des formes intérieures de GL_n, et nous avons montré dans un papier avec Renard ([BR]) qu'il impliquait une de ces conjectures.

Après avoir fait des rappels et fixé des notations à la section 2, nous étudions une correspondance de Jacquet-Langlands au niveau des groupes de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie à la section 3. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque et $G' = GL_r(D)$ une forme intérieure de $G = GL_n(F)$, où D est une algèbre à division centrale de dimension d^2 ($d > 0$), sur F. Si $g \in G$ et $g' \in G'$ on dit que g et g' se correspondent si les polynômes caractéristiques de g et g' sont égaux et sans racine multiple sur une clôture algébrique de F. On note $Grot(G)$ (resp. $Grot(G')$) le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de G (resp. G'). Si π est un élément de $Grot(G)$ ou $Grot(G')$, on note χ_π le caractère de π. Nous montrons alors (prop. 3.2) :

Proposition. *Il existe un unique morphisme de groupes*

$$\mathbf{LJ}_r : Grot(G) \to Grot(G')$$

tel que, pour tout $\pi \in Grot(G)$, on ait $\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{LJ}_r(\pi)}(g')$ pour tous g et g' qui se correspondent. Ce morphisme est surjectif et prolonge la correspondance de Jacquet-Langlands.

Zelevinskii a muni $\mathcal{R}(F) = \otimes_{n\in\mathbb{N}} Grot(GL_n(F))$, $n \in \mathbb{N}$, d'une structure d'algèbre de Hopf avec involution (voir [Ze]), dans laquelle l'induction (resp. la restriction) parabolique sert à définir la multiplication (resp. la comultiplication). On peut en faire de même pour $\mathcal{R}(D) = \otimes_{n\in\mathbb{N}} Grot(GL_n(D))$ ([Ta2] pour la construction de l'algèbre de Hopf; on utilise [Au] pour définir l'involution). Nous montrons à la section 3, th. 3.6, que des morphismes comme dans le théorème énoncé plus haut induisent un isomorphisme d'algèbres de Hopf entre $\mathcal{R}(D)$ et un quotient de $\mathcal{R}(F)$. Ce morphisme entre les algèbres de Hopf traduit le fait que la correspondance $\mathbf{LJ}_r$ (étendue de façon naturelle aux sous-groupes de Levi standard de G et G') commute au foncteur d'induction parabolique et au foncteur de Jacquet de restriction. Une conséquence est que $\mathbf{LJ}_r$ commute aussi, à un signe près, aux involutions (th. 3.15). Dans certains cas nous savons montrer que la classe d'une représentation irréductible de G est envoyée par $\mathbf{LJ}_r$ soit sur zéro, soit la classe d'une représentation irréductible de G' à un signe près. C'est le cas des représentations génériques, de leurs duales et de toutes les représentations elliptiques (celles dont le caractère n'est pas identiquement nul sur l'ensemble des éléments elliptiques). Le seul résultat dont nous disposons dans le cas général est la prop. 3.9.

Dans la section 4.4, nous nous limitons à la caractéristique nulle et, en utilisant les résultats locaux de la section précédente, nous montrons quelques cas particuliers de correspondance de Jacquet-Langlands globale, construisant ainsi, par transfert, des séries discrètes d'une forme intérieure de GL_n sur un corps global.

Nous obtenons (sect. 4.5) comme corollaire de ces correspondances globales le fait que les représentations duales des représentations de carré intégrable de G' sont unitarisables. Plus généralement, soit k un diviseur positif de r, et notons ν le caractère valeur absolue de la norme réduite sur $M_{\frac{r}{k}}(D)$ et σ une représentation de carré intégrable de $GL_{\frac{r}{k}}(D)$. Nous montrons alors que le quotient de Langlands de la représentation induite à G' à partir de la représentation $\nu^{\frac{k-1}{2}}\sigma \otimes \nu^{\frac{k-3}{2}}\sigma \otimes$

$\ldots \otimes \nu^{-\frac{k-1}{2}}\sigma$ est unitaire, et que sa duale l'est aussi (corollaire 4.8). La preuve se fait en réalisant ces représentations comme composantes locales de séries discrètes globales. Avec Renard, nous avons montré dans [BR] que ces résultats impliquaient une conjecture de Tadić.

Dans la dernière section (4.6) nous prouvons un cas très particulier de correspondance de Jacquet-Langlands globale complète, qui implique un théorème de multiplicité un. Il s'agit de la correspondance entre $GL_{p^2}(F)$ et D^*, où F est un corps global de caractéristique nulle, p est un nombre premier et D est une algèbre à division centrale sur F de dimension p^4.

La première partie de ce travail provient d'une thèse écrite à l'Université d'Orsay, sous la direction de Guy Henniart et je voudrais le remercier ici pour son aide inestimable. Je remercie également Colette Moeglin, Hervé Jacquet, Bertrand Lemaire et Anne-Marie Aubert qui avaient lu le manuscrit à l'époque et lui avaient apporté des corrections. Le reste a été écrit a l'Université de Poitiers et à Institute for Advanced Study, Princeton. Je voudrais remercier toutes ces trois institutions pour leur accueil. À l'Institut, j'ai bénéficié d'une bourse de la National Science Foundation, que je remercie, sous le contrat no. DMS-0111298. Je remercie de nouveau Colette Moeglin pour ses suggestions sur une version finale du manuscrit.

2. Rappels et notations

2.1. $Grot(G)$**, représentations standard et la relation d'ordre** $<$**.** Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque, D une algèbre à division centrale sur F, de dimension finie, r un entier strictement positif et $G = GL_r(D)$. Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $dim_F D = d^2$.

On note $\Psi(G)$ l'ensemble des caractères complexes lisses non ramifiés de G. Alors la composition avec la norme réduite induit un isomorphisme de groupes de $\Psi(GL_1(F))$ sur $\Psi(G)$. Nous notons ν_G l'élément de $\Psi(G)$ qui correspond au caractère valeur absolue de $\Psi(GL_1(F))$.

Si D' est une autre algèbre à division centrale sur F, de dimension finie, si r' est un autre entier strictement positif, si $G' = GL_{r'}(D')$, on obtient donc un isomorphisme canonique de $\Psi(G)$ sur $\Psi(G')$ et nous identifierons tacitement ces deux groupes. ν_G s'identifie ainsi à $\nu_{G'}$ et nous allons utiliser simplement la notation ν en général pour désigner ce caractère car il sera toujours évident sur quel groupe il vit.

Soit $Irr(G)$ l'ensemble des classes d'équivalence de représentations lisses irréductibles de G. Nous identifierons systématiquement une représentation lisse irréductible avec sa classe dans $Irr(G)$ (et parlerons de représentations égales au lieu d'équivalentes). Soit $Grot(G)$ le groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie de G. $Irr(G)$ est une base du $\mathbb{Z}$-module $Grot(G)$; $Grot(G)$ admet une autre $\mathbb{Z}$-base remarquable, celle des représentations standard, que nous décrivons plus bas.

Si $\pi \in Grot(G)$, on note χ_π le caractère de π.

On dit que L est un *sous-groupe de Levi standard* de G s'il existe une partition $A_1 \coprod A_2 \coprod ... \coprod A_k$ de l'ensemble $\{1, 2 ... r\}$ où $A_1 = \{1, 2 ... r_1\}$, $A_2 = \{r_1 + 1, r_1 + 2 ... r_1 + r_2\}$ etc. telle que L soit l'ensemble des matrices $M = (m_{ij})_{1 \leq i,j \leq r} \in G$ telles que m_{ij} est nul si $(i; j) \notin \cup_{u=1}^k A_u \times A_u$. Nous identifions alors L au produit $GL_{r_1}(D) \times GL_{r_2}(D) \times ... \times GL_{r_k}(D)$. C'est le groupe des matrices inversibles diagonales par blocs de taille $r_1, r_2, ..., r_n$. Les notations du paragraphe précédent s'appliquent aussi à tout sous-groupe de Levi standard de G. Les ensembles A_1, A_2,..., A_k sont appelés les *sections* de L. On pose aussi $|L| = r - k$.

Pour appliquer le foncteur d'induction parabolique à une représentation d'un sous-groupe de Levi standard L de G, il faut spécifier un sous-groupe parabolique dont L est un sous-groupe de Levi. Nous choisirons toujours le sous-groupe parabolique engendré par L et les matrices triangulaires supérieures, sans le spécifier à chaque fois. Même choix pour le foncteur de restriction. Tenant compte de cette convention, nous écrirons dorénavant simplement ind_L^G et res_L^G. Si π_1, π_2... π_k sont des représentations de $GL_{r_1}(D)$, $GL_{r_2}(D)$, ..., $GL_{r_k}(D)$, on notera tout simplement $\pi_1 \times \pi_2 \times ... \times \pi_k$ la représentation induite à $GL_{r_1+..+r_k}(D)$ à partir de $\pi_1 \otimes \pi_2 \otimes ... \otimes \pi_k$.

Soit Z le centre de G. Une représentation admissible de G est dite *de carré intégrable* si elle est irréductible, unitaire, et possède un coefficient non nul qui est une fonction de carré intégrable sur G/Z. Nous écrirons de façon abrégée *r.c.i.* pour représentation(s) de carré intégrable. On note $\Pi_u^2(G)$ le sous-ensemble de $Irr(G)$ formé des classes de représentations de carré intégrable de G.

Si L est un sous-groupe de Levi standard de G, nous définissons $\Pi_u^2(L)$ de la même manière.

Proposition 2.1. *Si L est un sous-groupe de Levi standard de G, si $\pi \in \Pi_u^2(L)$, alors $ind_L^G \pi \in Irr(G)$.*

Démonstration. [Be] pour $D = F$. [DKV] pour D quelconque de caractéristique nulle. Ça marche aussi en caractéristique non nulle ([Ba2]). □

Une représentation σ de G est dite *essentiellement de carré intégrable* si elle est du type $\nu^{e(\sigma)}\sigma'$ avec $e(\sigma)$ un nombre réel et $\sigma' \in \Pi_u^2(G)$. Le réel $e(\sigma)$ et l'élément σ' de $\Pi_u^2(G)$ sont alors uniquement déterminés par σ. Nous abrégerons ici représentation(s) essentiellement de carré intégrable par *r.e.c.i.*. On note $\Pi^2(G)$ le sous-ensemble de $Irr(G)$ formé des r.e.c.i. de G.

Si $L = \times_{i=1}^k GL_{r_i}(D)$ est un sous-groupe de Levi standard de G, si $\sigma_i \in Irr(GL_{r_i}(D))$, on dit que $\sigma = \sigma_1 \otimes \sigma_2 \otimes ... \otimes \sigma_k \in Irr(L)$ est une r.e.c.i. de L si, pour tout i, σ_i est une r.e.c.i. de $GL_{r_i}(D)$. On note $\Pi^2(L)$ le sous-ensemble de $Irr(L)$ formé de r.e.c.i. de L. Soit $\sigma \in \Pi^2(L)$ comme plus haut. On dit que σ est une r.e.c.i. *ordonnée* de L si l'on a $e(\sigma_i) \geq e(\sigma_{i+1})$ pour tout $1 \leq i \leq k-1$. On dit alors que $ind_L^G \sigma$ est une *représentation standard*. Toute représentation standard a un unique quotient irréductible. On le note $Lg(\sigma)$.

Pour toute représentation lisse irréductible π' de G il existe un σ comme plus haut tel que $\pi' = Lg(\sigma)$. La représentation σ est unique modulo les opérations qui consistent à permuter entre eux des σ_i qui ont le même coefficient $e(\sigma_i)$. (On reconnaît là la théorie générale du quotient de Langlands améliorée dans le cas de G grâce à la prop. 2.1).

Nous allons souvent regarder, sans le préciser à chaque fois, ind_L^G comme un morphisme de $Grot(L)$ dans $Grot(G)$ et res_L^G comme un morphisme de $Grot(G)$ dans $Grot(L)$, quand les notions de quotient ou sous-représentation n'interviendront plus et seuls compteront les sous-quotients en général. Par représentation standard on sous-entendra donc souvent la classe d'une représentation standard dans $Grot(G)$.

On a ([Ze], [DKV] et [Ta2]) que, sur la base $Irr(G)$ de $Grot(G)$, toute représentation standard $ind_L^G\sigma$ s'écrit :

$$ind_L^G\sigma = Lg(\sigma) + \sum_{i=1}^{p} a_i Lg(\sigma_i)$$

ou les a_i sont des entiers non nuls et $Lg(\sigma)$ et les $Lg(\sigma_i)$ sont deux à deux distincts et ont le même support cuspidal qui est aussi celui de σ.

Nous savons aussi qu'on peut définir une relation d'ordre partielle sur $Irr(G)$ en posant que les représentations strictement inférieures à $Lg(\sigma)$ sont par définition exactement les $Lg(\sigma_i)$, $1 \leq i \leq p$. Si $\pi < \pi'$, π et π' ont donc le même support cuspidal (qui est aussi celui d'une σ telle que $\pi = Lg(\sigma)$). Dès lors, toute suite monotone dans $Irr(G)$ est finie. Les détails dans [Ze], [DKV] et [Ta2].

Cette relation d'ordre peut être définie, aussi, par $Lg(\sigma) \leq Lg(\sigma')$ si et seulement si le multisegment de σ peut être obtenu du multisegment de σ' par un nombre fini d'opérations élémentaires consécutives (voir [Ze] et [Ta2] pour les définitions).

Soit $\mathcal{B}_G$ le sous-ensemble de $Grot(G)$ formé des représentations standard. Par "sous-ensemble" ici nous entendons en particulier que l'on ne garde qu'une seule fois un élément qui peut par ailleurs être la classe dans le groupe de Grothendieck de deux représentations induites à partir de r.e.c.i. distinctes.

Si L est un sous-groupe de Levi standard de G et σ est une r.e.c.i. ordonnée de L, on pose $ind_L^G(\sigma) \mapsto Lg(\sigma)$. On obtient une bijection bien définie de $\mathcal{B}_G$ sur $Irr(G)$ qui induit aussi une relation d'ordre sur $\mathcal{B}_G$. L'application réciproque se prolonge donc de façon unique en un $\mathbb{Z}$-endomorphisme E de $Grot(G)$. Si l'on partitionne $Irr(G)$ en sous-ensembles finis maximaux d'éléments ayant le même support cuspidal, alors les sous-modules engendrés par ces sous-ensembles sont stables sous E. Si π et π' se trouvent dans des sous-ensembles de ce type disjoints, il ne peut pas y avoir de relation d'ordre entre π et π'. Si l'on ordonne un tel sous-ensemble A de telle sorte que, si $\pi < \pi'$, alors π précède π', on peut vérifier facilement que la matrice de la restriction de E au sous-module engendré par A dans la base A est triangulaire supérieure unipotente. On a la

Proposition 2.2. *$\mathcal{B}_G$ une base de $Grot(G)$.*

Voir [Ze], [DKV] (A.4.f) et la prop. 2.1 de [Ta2] pour plus de détailles.

On note $W(G)$ le groupe formé par les matrices de permutation dans G qu'on identifie aussi avec le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, 2 \dots r\}$.

Remarquons que, si L est un sous-groupe de Levi standard de G et $\sigma \in \Pi^2(L)$, alors on peut trouver un $w \in W(G)$ tel que $w\sigma w^{-1}$ soit une r.e.c.i. ordonnée de $w^{-1}Lw$. Comme on a $ind_L^G(\sigma) = ind_{w^{-1}Lw}^G(w\sigma w^{-1})$ dans $Grot(G)$, $ind_L^G(\sigma)$ est une représentation standard, un élément de $\mathcal{B}_G$.

2.2. **Correspondance de Jacquet-Langlands.** Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque, D une algèbre à division centrale sur F, de dimension finie d^2, et r un entier strictement positif. Posons $n = rd$, $G = GL_n(F)$ et $G' = GL_r(D)$. On dit que G' est une *forme intérieure* de G. Nous adoptons les notations et conventions de la section précédente pour G et G'. Si g est un élément de G ou de G' on dit que g est *semisimple régulier* si son polynôme caractéristique est séparable (i.e. ses racines dans une clôture algébrique de F sont simples). Si $g \in G$ et $g' \in G'$ on dit que g et g' *se correspondent* s'ils sont semisimples réguliers et ont le même polynôme caractéristique. Rappelons l'énoncé de la correspondance de Jacquet-Langlands :

> **Théorème 2.3. (Correspondance de Jacquet-Langlands)** *Il existe une unique correspondance bijective* $\mathbf{C} : \Pi^2(G) \to \Pi^2(G')$ *qui vérifie, pour toute r.e.c.i. π de G :*
>
> $$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{C}(\pi)}(g')$$
>
> *pour tous g et g' qui se correspondent.*

Pour la preuve, [DKV] en caractéristique nulle et [Ba1] en caractéristique non nulle.

2.3. **Classification des r.e.c.i. : $Z(\rho, l)$, $T(\rho', l')$ et $s(\sigma')$.** À un sous-groupe de Levi standard L' de G' correspond un unique sous-groupe de Levi standard L de G de la façon suivante : si r_1, r_2,...,r_k sont, dans l'ordre, les cardinaux des sections de L', alors les cardinaux des sections de L seront, dans l'ordre, dr_1, dr_2,...,dr_k. Alors la correspondance de Jacquet-Langlands entre $GL_{r_i}(D)$ et $GL_{dr_i}(F)$, pour tout $1 \leq i \leq k$, induit une correspondance bijective de $\Pi^2(L)$ sur $\Pi^2(L')$. Nous noterons cette correspondance aussi $\mathbf{C}$, quand il n'y aura pas d'ambiguïté.

Un sous-groupe de Levi standard L de G correspond de cette façon à un sous-groupe de Levi standard L' de G' si et seulement si les sections de L sont toutes divisibles par d. L' est, dans ce cas, unique. On dit alors que L *se transfère.*

Rappelons la classification des r.e.c.i. de $G = GL_n(F)$ selon Zelevinskii ([Ze]). Si l est un entier positif divisant n et ρ est une représentation cuspidale de $GL_{\frac{n}{l}}(F)$, alors la représentation

$$\rho \times \nu\rho \times ... \times \nu^{l-1}\rho$$

a un unique quotient irréductible. C'est une r.e.c.i.. Toute r.e.c.i. σ s'obtient ainsi. On dit que σ *correspond* au segment (de Zelevinskii) $[\rho, \nu^{l-1}\rho]$. L'entier l et la représentation ρ sont déterminés par σ. On note aussi $\sigma = Z(\rho, l)$. On dit que l est la *longueur* du segment $[\rho, \nu^{l-1}\rho]$.

Lemme 2.4. *a) Soit $\sigma = Z(\rho, l)$ une r.e.c.i. de G, où ρ est une représentation cuspidale de $GL_k(F)$, $lk = n$. Soient L un sous-groupe de Levi standard de G et $n_1, n_2, ..., n_p$ les cardinaux de ses sections. Si k ne divise pas tous les n_i, alors $\mathbf{r}_L^G\sigma = 0$. Si k divise tous les n_i, alors on pose $k_i = \frac{n_i}{k}$ et on a $\mathbf{r}_L^G\sigma = \otimes_{i=1}^p Z(\nu^{\sum_{j=1}^{i-1} k_j}\rho, k_i) \in \Pi^2(L)$.*

b) Soient σ' une r.e.c.i. de G' et L' un sous-groupe de Levi standard de G'. Soit $\sigma = \mathbf{C}^{-1}(\sigma')$ et posons $\sigma = Z(\rho, l)$. Soit L le sous-groupe de Levi standard de G qui correspond à L'. Si $\mathbf{r}_L^G\sigma = 0$, alors $\mathbf{r}_{L'}^{G'}\sigma' = 0$. Sinon, $\mathbf{r}_{L'}^{G'}\sigma' = \mathbf{C}(\mathbf{r}_L^G\sigma)$.

c) Si σ est une représentation cuspidale de G, alors $\mathbf{C}(\sigma)$ est une représentation cuspidale de G'.

Démonstration. Le point a) est la proposition 9.5 de [Ze]. Le point b) est alors la conséquence directe de [DKV], th. B.2.b (voir [Ba1], prop. A, page 736, pour la caractéristique non nulle). c) est une conséquence immédiate de b). □

Soit ρ' une représentation cuspidale de $G' = GL_r(D)$. Elle correspond par Jacquet-Langlands à une r.e.c.i. $Z(\rho, l)$ de G. On pose alors $s(\rho') = l$, invariant introduit par Tadić dans [Ta2]. Tadić y développe sur G' une théorie de classification des r.e.c.i. analogue à celle de Zelevinskii :

Si l' est un entier positif qui divise r et ρ' est une représentation cuspidale de $GL_{\frac{r}{l'}}(D)$, alors la représentation

$$\rho' \times \nu^{s(\rho')}\rho' \times \nu^{2s(\rho')}\rho' ... \times \nu^{(l'-1)s(\rho')}\rho'$$

a un unique quotient irréductible. C'est une r.e.c.i.. Toute r.e.c.i. σ' de G' s'obtient ainsi. On dit que σ' *correspond* au segment (de Tadić) $[\rho', \nu^{(l'-1)s(\rho')}\rho']$. L'entier l' et la représentation ρ' sont déterminés par σ'. On note $\sigma' = T(\rho', l')$. On dit que l' est la *longueur* du segment $[\rho', \nu^{(l'-1)s(\rho')}\rho']$. On pose enfin $s(\sigma') = s(\rho')$. ([Ta2] est écrit en caractéristique nulle, mais en utilisant [Ba1] et [Ba2] on peut lever cette contrainte).

Soit $\sigma' = T(\rho', l') \in \Pi^2(G')$ et posons $\mathbf{C}^{-1}(\sigma') = \sigma = Z(\rho, l)$. Alors $l'|l$ et on a $s(\sigma') = \frac{l}{l'}$. On a aussi $s(\sigma') = \frac{p.p.c.m.(n,ld)}{n}$. En particulier, comme $l|n$ on a que

$s(\sigma')$ divise toujours d. Ces relations peuvent être retrouvées par exemple grâce au lemme 2.4.

2.4. **Classification des r.c.i. : $Z^u(\rho,l)$ et $T^u(\rho',l')$.** Si $\sigma = Z(\rho,l)$ est une r.e.c.i. de G, alors σ est unitaire si et seulement si $\nu^{\frac{l-1}{2}}\rho$ est unitaire (c'est une conséquence immédiate du fait qu'une r.e.c.i. est unitaire si et seulement si son caractère central l'est). En posant alors $\rho^u = \nu^{\frac{l-1}{2}}\rho$, on dit que σ correspond au segment de Zelevinskii "centré" $[\nu^{-\frac{l-1}{2}}\rho^u, ..., \nu^{\frac{l-1}{2}}\rho^u]$, où ρ^u est une représentation cuspidale unitaire. En général, on pose $\sigma = Z^u(\rho,l)$ en sous-entendant alors que σ et ρ sont unitaires et le segment est centré. Les segments de Tadić centrés et la notation $\sigma' = T^u(\rho',l')$ sur G' sont définis de façon analogue.

2.5. **Les représentations elliptiques.** Ici G désigne $GL_n(F)$ ou $GL_r(D)$. Un élément $g \in G$ est dit *elliptique régulier* s'il est semisimple régulier et son polynôme caractéristique est irréductible. On dit qu'un élément de $Grot(G)$ est *elliptique* si son caractère n'est pas identiquement nul sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers. Une r.e.c.i. est toujours elliptique (par le théorème d'orthogonalité des caractères par exemple) et une représentation induite à partir d'un sous-groupe parabolique propre n'est jamais elliptique. En particulier, les éléments de $\mathcal{B}_G$ qui sont elliptiques sont exactement les r.e.c.i.. Une conséquence est la classification des représentations lisses irréductibles elliptiques en général que voici :

Soit π une représentation lisse irréductible elliptique de G. Écrivons $\pi = \sum a_i\pi_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}^*$ et $\pi_i \in \mathcal{B}_G$ distincts. Au moins une représentation π_{i_0} parmi les π_i est une r.e.c.i. car π est elliptique. Comme π et tous les π_i ont le même support cuspidal, on trouve que ce support cuspidal est le segment de Zelevinskii/Tadić associé à π_{i_0}. En particulier, π_{i_0} est la seule r.e.c.i. parmi les π_i.

Maintenant, les représentations cuspidales qui entrent en la composition d'un segment de Zelevinskii/Tadić sont distinctes deux à deux. Donc tous les sous-quotients de la représentation standard obtenue par induction à partir d'un tel segment T apparaissent avec multiplicité un. On peut montrer alors par une inversion du type Moebius (voir [Ze], prop. 9.13) que le coefficient a_{i_0} de π_{i_0} plus haut est ± 1.

3. Correspondance de Jacquet-Langlands étendue

3.1. **Correspondance entre les groupes de Grothendieck.** Soit $\mathbf{JL}_r$ l'application de $\mathcal{B}_{G'}$ dans $\mathcal{B}_G$ définie pour tout sous-groupe de Levi standard L' de G' et toute $\sigma' \in \Pi^2(L')$ par

$$\mathbf{JL}_r(ind_{L'}^{G'}\sigma') = ind_L^G\sigma$$

où L correspond à L' et $\sigma = \mathbf{C}^{-1}(\sigma')$. Il est facile à vérifier que cette application est bien définie. Grâce à la proposition 2.2, $\mathbf{JL}_r$ s'étend de façon unique en un morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules de $Grot(G')$ dans $Grot(G)$.

Théorème 3.1. *a) Le morphisme injectif de $\mathbb{Z}$-modules*

$$\mathbf{JL}_r \ : Grot(G') \to Grot(G)$$

prolonge $\mathbf{C}^{-1}$, commute à la torsion par des éléments de $\Psi(G) = \Psi(G')$, et on a

$$\chi_{\pi'}(g') = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g)$$

pour tous $g \in G$ et $g' \in G'$ qui se correspondent.

b) Soit $\mathbf{S}_{G,G'}$ le sous-module de $Grot(G)$ engendré par l'ensemble des représentations induites des r.e.c.i. de tous les sous-groupes de Levi de G qui ne se transfèrent pas. Alors $\mathbf{S}_{G,G'}$ est un supplémentaire de l'image $Im(\mathbf{JL}_r)$ de $\mathbf{JL}_r$ dans $Grot(G)$ et $\mathbf{JL}_r$ induit un isomorphisme de groupes

$$\overline{\mathbf{JL}_r} : Grot(G') \simeq Grot(G)/\mathbf{S}_{G,G'}.$$

Démonstration. a) Soient $g \in G$ et $g' \in G'$ qui se correspondent. Pour vérifier qu'on a

$$\chi_{\pi'}(g') = (-1)^{n-r}\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g)$$

pour tout $\pi' \in Grot(G')$ il suffit de le vérifier pour tout $\pi' \in \mathcal{B}_{G'}$. Si π' est une r.e.c.i. on a $\mathbf{JL}_r(\pi') = \mathbf{C}^{-1}(\pi')$ et c'est évident. Si π' est l'induite d'une r.e.c.i. à partir d'un sous-groupe de Levi propre, cela résulte de la définition de $\mathbf{JL}_r(\pi')$ et de la formule du caractère d'une représentation induite ([vD], ou [Cl] prop. 3).

Pour montrer que $\mathbf{JL}_r$ commute à la torsion par $\chi \in \Psi(G')$ il suffit de le montrer sur la base $\mathcal{B}_{G'}$. Il est clair pour les r.e.c.i. elles-mêmes par égalité des caractères, donc l'application $\mathbf{C}^{-1}$ commute a la torsion par les éléments de $\Psi(G')$.

Si $\sigma' \in \Pi^2(L')$, alors on a

$$\chi \otimes ind_{L'}^{G'}\sigma' = ind_{L'}^{G'}((res_{L'}^{G'}\chi) \otimes \sigma').$$

Or, $(res_{L'}^{G'}\chi) \otimes \sigma'$ est une r.e.c.i. de L'. On a alors par la définition de $\mathbf{JL}_r$:

$$\mathbf{JL}_r(ind_{L'}^{G'}((res_{L'}^{G'}\chi) \otimes \sigma')) = ind_L^G(\mathbf{C}^{-1}((res_{L'}^{G'}\chi \otimes \sigma'))) =$$

$$= ind_L^G((res_L^G\chi) \otimes \mathbf{C}^{-1}(\sigma')) = \chi \otimes ind_L^G\mathbf{C}^{-1}(\sigma').$$

b) Le fait que $\mathbf{S}_{G,G'}$ est un sous-module supplémentaire de $Im(\mathbf{JL}_r)$ dans $Grot(G)$ est une conséquence immédiate du fait que $\mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'}) \subset \mathcal{B}_G$ et $\mathcal{B}_G \setminus \mathbf{JL}_r(\mathcal{B}_{G'})$ est par définition une base de $\mathbf{S}_{G,G'}$. Le fait que le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $Grot(G') \to Grot(G)/\mathbf{S}_{G,G'}$ obtenu par composition de la projection $Grot(G) \to Grot(G)/\mathbf{S}_{G,G'}$ avec $\mathbf{JL}_r$ est un isomorphisme s'ensuit, parce que $\mathbf{JL}_r$ est injectif et réalise donc une bijection de $Grot(G')$ sur son image. $\square$

Remarque. Le morphisme $\mathbf{JL}_r$ n'envoie pas toute représentation irréductible de G' sur une représentation irréductible de G, sauf si $d = 1$ ou $r = 1$. Donnons un contre-exemple qui se généralise facilement. Soient $n = 4$, $d = r = 2$, L' le tore diagonal de $G' = GL_2(D)$ et L le sous-groupe de Levi standard de $G = GL_4(F)$ qui lui correspond. Soit ρ un caractère de F. La représentation $\pi = Z(\rho, 2) \times Z(\nu\rho, 2)$ est réductible, puisque les segments $[\rho; \nu\rho]$ et $[\nu\rho; \nu^2\rho]$ sont liés ([Ze], th. 9.7). Mais $\pi' = \mathbf{C}(Z(\rho, 2)) \times \mathbf{C}(Z(\nu\rho, 2))$ est irréductible parce que $d = 2$ ne divise pas la longueur du segment $[\rho; \nu\rho] \cap [\nu\rho; \nu^2\rho] = [\nu\rho; \nu\rho]$ ([Ta2], lemme 2.5). Et, pourtant, on a $\mathbf{JL}_r(\pi') = \pi$.

On peut donc dire qu'en général, à une représentation irréductible π de G' correspond une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de représentations irréductibles de G.

Donnons un récriture utile du théorème précédent :

Proposition 3.2. *Il existe un unique morphisme de $\mathbb{Z}$-modules*

$$\mathbf{LJ}_r : Grot(G) \to Grot(G')$$

tel que, pour tout $\pi' \in Grot(G')$, l'image réciproque de π' par $\mathbf{LJ}_r$ est l'ensemble de tous les $\pi \in Grot(G)$ qui vérifient :

$$\chi_\pi(g) = (-1)^{n-r}\chi_{\pi'}(g')$$

pour tous $g \in G$ et $g' \in G'$ qui se correspondent. Le morphisme $\mathbf{LJ}_r$ est surjectif. Son noyau est $\mathbf{S}_{G,G'}$.

Disons qu'un élément de $Grot(G)$ est $G' - nul$ si son caractère est nul sur tout élément semisimple régulier qui a un correspondant dans G'. L'ensemble des éléments G'-nuls dans $Grot(G)$ n'est autre que $\mathbf{S}_{G,G'}$.

Donnons le résultat sur le transfert des représentations génériques. Une représentation π est générique si et seulement si $\pi = ind_L^G(\sigma) \in Irr(G)$, où L est un sous-groupe de Levi standard de G et σ est une r.e.c.i. de L ([Ze]).

Proposition 3.3. *Soit $\pi \in Irr(G)$ une représentation générique et posons $\pi = ind_L^G(\sigma)$ comme ci-dessus. Si L ne se transfère pas, alors π est G'-nulle. Si L se transfère en L', alors on a $\mathbf{LJ}_r(\pi) = ind_{L'}^{G'}(\mathbf{C}(\sigma)) \in Irr(G')$.*

Démonstration. π est une représentation standard et son image par $\mathbf{LJ}_r$ peut se retrouver par la définition même de $\mathbf{JL}_r$. Les critères de réductibilité de [Ze] et [Ta2] pour les induites des r.e.c.i. impliquent que, $ind_L^G(\sigma)$ étant irréductible, $ind_{L'}^{G'}(\sigma')$ l'est aussi. $\square$

3.2. **Correspondance entre les algèbres de Hopf.** Dans cette sous-section, F désigne toujours un corps local non archimédien et D une algèbre à division centrale sur F, de dimension d^2.

Soit n un entier strictement positif. Soit G l'un des groupes $GL_n(F)$ ou $GL_n(D)$. Si L_1 et L_2 sont deux sous-groupes de Levi standard de G, on note $W(L_1, L_2)$ le sous-groupe de $W(G)$ formé des éléments w qui vérifient :

- $w(k) < w(l)$ si $k < l$ et k et l sont dans la même section de L_1
- $w^{-1}(k) < w^{-1}(l)$ si $k < l$ et k et l sont dans la même section de L_2.

Si L est un sous-groupe de Levi standard de G et $g \in G$, alors on pose ${}^gL = gLg^{-1}$ et, si π est une représentation de L, on note ${}^g\pi$ la représentation de ${}^gL$ définie par ${}^g\pi(x) = \pi(g^{-1}xg)$. On utilise aussi les notations : L^g pour ${}^{g^{-1}}L$ et π^g pour ${}^{g^{-1}}\pi$.

Si $w \in W(L_1; L_2)$, alors ${}^wL_1 \cap L_2$ et $L_1 \cap L_2^w$ sont des sous-groupes de Levi standard de G. À partir de maintenant, on adopte les notations de [Au] : si L_1 et L_2 sont deux sous-groupes de Levi standard de G tels que $L_1 \subset L_2$, alors on note $\mathbf{i}_{L_1}^{L_2}$ et $\mathbf{r}_{L_1}^{L_2}$ les morphismes (au niveau des groupes de Grothendieck, rappelons-le !) d'induction et de restriction parabolique, avec la convention déjà faite à la section 2.1 de les considérer automatiquement par rapport aux sous-groupes paraboliques associés à L_1 et L_2 qui contiennent le groupe des matrices triangulaires supérieures dans G.

Rappelons ici sous forme d'un lemme le théorème 1.2 de [Ze] :

Lemme 3.4. *Soient L_1 et L_2 deux sous-groupes de Levi standard de G. Soit π une représentation de L_1. On a alors :*

$$\mathbf{r}_{L_2}^G \mathbf{i}_{L_1}^G \pi = \sum_{w \in W(L_1, L_2)} \mathbf{i}_{{}^wL_1 \cap L_2}^{L_2}\big((\mathbf{r}_{L_1 \cap L_2^w}^{L_1} \pi)^w\big).$$

Posons

$$\mathcal{R}(F) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Grot(GL_n(F))$$

où, par convention on pose (pour $n = 0$) $GL_0(F) = \mathbb{Z} = Grot(GL_0(F))$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de $GL_n(F)$ à k blocs, on considérera $\mathbf{r}_L^G$ comme une application linéaire de $Grot(GL_n(F))$ à valeurs dans $\otimes^k \mathcal{R}(F)$.

A. Zelevinskii a muni l'espace vectoriel $\mathcal{R}(F)$ d'une multiplication m et une comultiplication c qui en font une algèbre de Hopf graduée ([Ze]). Avec les notations et conventions plus haut, la multiplication et la comultiplication de Zelevinskii se définissent de la façon suivante :

- si $\pi \in Grot(GL_k(F))$ et $\sigma \in Grot(GL_{k'}(F))$, alors on pose

$$m(\pi;\sigma) = \pi \times \sigma \in Grot(GL_{k+k'}(F))$$

et on étend par bilinéarité à une application de $\mathcal{R}(F)\otimes\mathcal{R}(F)$ à valeurs dans $\mathcal{R}(F)$.
- si $\pi \in Grot(GL_n(F))$, on identifie $GL_k(F) \times GL_{k'}(F)$, $k + k' = n$, à un sous-groupe de Levi standard maximal $L_{k,k'}$ de $GL_n(F)$, et on pose

$$c(\pi) = \sum_{k+k'=n} \mathbf{r}_{L_{k,k'}}^{GL_n(F)}\pi \in \mathcal{R}(F) \otimes \mathcal{R}(F) \ ;$$

on étend ensuite par linéarité à une application de $\mathcal{R}(F)$ à valeurs dans $\mathcal{R}(F) \otimes \mathcal{R}(F)$.

Exactement de la même façon on peut poser

$$\mathcal{R}(D) = \bigoplus_{r\in\mathbb{N}} Grot(GL_r(D)).$$

Si L est un sous-groupe de Levi standard de $GL_r(D)$ à k blocs, on regarde $\mathbf{r}_L^G$ comme une application linéaire de $Grot(GL_r(D))$ à valeurs dans $\otimes^k\mathcal{R}(D)$. On peut munir l'espace vectoriel $\mathcal{R}(D)$ d'une multiplication m' et une comultiplication c' définies comme plus haut et vérifier comme dans [Ze] qu'on obtient ainsi une algèbre de Hopf (voir [Ta2]). Si l'on considère $\mathcal{R}(F)$ et $\mathcal{R}(D)$ munis de leur structure d'anneau on a

Proposition 3.5. *$\mathcal{R}(F)$ est isomorphe à l'anneau de polynômes en une infinité de variables commutatives $\mathbb{Z}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Pi^2(GL_n(F))]$ et $\mathcal{R}(D)$ est isomorphe à l'anneau de polynômes en une infinité de variables commutatives $\mathbb{Z}[\bigcup_{r\in\mathbb{N}^*} \Pi^2(GL_r(D))]$.*

Démonstration. Pour $\mathcal{R}(F)$, cette proposition est une conséquence du corollaire 7.5, du théorème 9.3, et de la proposition 9.16 de [Ze]. Voir [Ta2], prop. 2.1 pour le cas général $\mathcal{R}(D)$. Autant pour $\mathcal{R}(F)$ que pour $\mathcal{R}(D)$ c'est une conséquence directe de la proposition 2.2 plus haut. □

Théorème 3.6. *a) L'ensemble des morphismes injectifs de $\mathbb{Z}$-modules*

$$\mathbf{JL}_r : Grot(GL_r(D)) \to Grot(GL_{rd}(F))$$

pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ induit un morphisme injectif d' anneaux

$$\mathbf{JL} : \mathcal{R}(D) \to \mathcal{R}(F).$$

b) L'image de $\mathbf{JL}$ est le sous-anneau de $\mathcal{R}(F)$ engendré par les r.e.c.i. de tous les $GL_n(F)$ tels que d divise n. L'idéal $\mathbf{I}_{F,D}$ de l'anneau $\mathcal{R}(F)$ engendré par les r.e.c.i. de tous les $GL_n(F)$ tels que d ne divise pas n est un $\mathbb{Z}$-module supplémentaire de l'image de $\mathbf{JL}$ dans $\mathcal{R}(F)$.

c) La comultiplication de $\mathcal{R}(F)$ induit une opération bien définie $\bar{c}$ sur l'anneau $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. L'anneau $\mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$ hérite ainsi d'une structure d'algèbre de Hopf. L'application **JL** *induit un isomorphisme d'* algèbres de Hopf

$$\mathbf{JLH} : \mathcal{R}(D) \simeq \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}.$$

Démonstration. a) Pour tout entier positif r, $\mathbf{JL}_r$ induit une bijection de $\Pi^2(GL_r(D))$ sur $\Pi^2(GL_{rd}(F))$ (Jacquet-Langlands classique). La proposition 3.5 implique que cette restriction de $\mathbf{JL}_r$ aux r.e.c.i. pour tout r induit un unique morphisme d'anneaux $\mathbf{JL}$ de $\mathcal{R}(D)$ dans $\mathcal{R}(F)$, qui, de plus, est injectif. On doit prouver que, pour tout r, l'application $\mathbf{JL}$ coïncide avec $\mathbf{JL}_r$ sur $Grot(GL_r(D))$ tout entier. Par la proposition 2.2 et par linéarité des deux applications, il suffit de vérifier que pour deux r.e.c.i. π'_1 de $GL_{r_1}(D)$ et π'_2 de $GL_{r_2}(D)$, on a

$$m(\mathbf{JL}_{r_1}(\pi'_1); \mathbf{JL}_{r_2}(\pi'_2)) = \mathbf{JL}_{r_1+r_2}(m'(\pi'_1; \pi'_2)).$$

Mais cela fait partie de la définition même de $\mathbf{JL}_{r_1+r_2}$.

b) Partant de la définition de $\mathbf{JL}$, le fait que l'image de $\mathbf{JL}$ est le sous-anneau de $\mathcal{R}(F)$ engendré par les r.e.c.i. de tous les $GL_n(F)$ tels que d divise n est tautologique. En écrivant maintenant

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Pi^2(GL_n(F)) = \Big(\bigcup_{d|n} \Pi^2(GL_n(F))\Big) \bigcup \Big(\bigcup_{d\nmid n} \Pi^2(GL_n(F))\Big),$$

on a que tout polynôme en les variables $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \Pi^2(GL_n(F))$ s'écrit de façon unique comme la somme d'un polynôme en les variables $\bigcup_{d|n} \Pi^2(GL_n(F))$ et un polynôme dont chaque monôme contient au moins une variable se trouvant dans l'ensemble $\bigcup_{d\nmid n} \Pi^2(GL_n(F))$. On en déduit l'égalité de $\mathbb{Z}$-modules :

$$\mathcal{R}(F) = Im(\mathbf{JL}) \oplus \mathbf{I}_{F,D}.$$

c) Par le point b), le morphisme injectif d'anneaux $\mathbf{JL} : \mathcal{R}(D) \to \mathcal{R}(F)$ induit un isomorphisme d'*anneaux* $\mathbf{JLH} : \mathcal{R}(D) \to \mathcal{R}(F)/\mathbf{I}_{F,D}$. Il suffit de montrer que la comultiplication c de $\mathcal{R}(F)$ "passe au quotient" et que $\mathbf{JLH}$ commute à la comultiplication. Reprenons les notations de la sous-section précédente : $r \in \mathbb{N}^*$, $G' = GL_r(D)$ et $G = GL_{rd}(F)$. On va étudier l'effet du foncteur de restriction parabolique sur les bases $\mathcal{B}_G$ et $\mathcal{B}_{G'}$.

Appliquons le lemme 3.4 à un élément π de $\mathcal{B}_G$. On a $\pi = \mathbf{i}_{L_1}^G \sigma$ où σ est une r.e.c.i. du sous-groupe de Levi standard L_1 de G. Soit L_2 un sous-groupe de Levi standard maximal de G. On a alors (lemme 3.4)

$$\mathbf{r}_{L_2}^G \pi = \mathbf{r}_{L_2}^G \mathbf{i}_{L_1}^G \sigma = \sum_{w\in W(L_1,L_2)} \mathbf{i}_{{}^wL_1\cap L_2}\big((\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^w}\sigma)^w\big).$$

Par le lemme 2.4 a), cette écriture est la décomposition de $\mathbf{r}_{L_2}^G \pi$ sur la base des représentations standard de L_2. Notons $W(L_1; L_2)_d$ l'ensemble des éléments $w \in$

$W(L_1;L_2)$ tels que ${}^wL_1\cap L_2$ se transfère (i.e. que d divise le cardinal de toutes ses sections).

Écrivons

$$\mathbf{r}^G_{L_2}\pi=\mathbf{r}^G_{L_2}\mathbf{i}^G_{L_1}\sigma= \tag{3.1}$$

$$\sum_{w\in W(L_1,L_2)_d}\mathbf{i}_{{}^wL_1\cap L_2}\big({}^w(\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^w}\sigma)\big)+\sum_{w\in W(L_1,L_2)\backslash W(L_1,L_2)_d}\mathbf{i}_{{}^wL_1\cap L_2}\big({}^w(\mathbf{r}_{L_1\cap L_2^w}\sigma)\big).$$

Le deuxième terme du membre de droite se trouve dans $\mathbf{I}_{F,D}\otimes\mathcal{R}(F)+\mathcal{R}(F)\otimes\mathbf{I}_{F,D}$. Si L_1 ou L_2 ne se transfère pas, alors $W(L_1;L_2)_d$ est vide parce qu'un sous-groupe de Levi standard qui ne se transfère pas ne peut pas contenir un sous-groupe de Levi standard qui se transfère. $\pi\in\mathbf{I}_{F,D}$ si et seulement si L_1 ne se transfère pas. Donc la comultiplication passe au quotient.

Supposons que L_1 et L_2 se transfèrent et notons L_1' et L_2' les sous-groupes de Levi standard de G' qui leur correspondent.

Posons $\pi'=\mathbf{i}^{G'}_{L_1'}\mathbf{C}(\sigma)$. On a par le lemme 3.4 appliqué à G' :

$$r^{G'}_{L_2'}\pi'=\sum_{w\in W(L_1',L_2')}\mathbf{i}_{{}^wL_1'\cap L_2'}\big({}^w(\mathbf{r}_{L_1'\cap L_2'^w}\sigma')\big). \tag{3.2}$$

On peut définir une inclusion naturelle t de $W(L_1';L_2')$ dans $W(L_1;L_2)$ en posant que, si τ est une permutation de $\{1,2\ ...r\}$, alors $t(\tau)$ est la permutation de l'ensemble $\{1,2\ ...n\}$ qui permute les r sous-ensembles $\{1,2\ ...d\}$, $\{d+1,d+2\ ...2d\}$, $...\{(r-1)d+1,(r-1)d+2\ ...n\}$ selon la permutation τ tout en laissant l'ordre inchangé à l'intérieur de chacun de ces sous-ensembles. L'application clairement injective

$$t:W(L_1';L_2')\to W(L_1;L_2)$$

ainsi définie a la propriété que pour tout $w\in W(L_1';L_2')$, les sous-groupes de Levi standard ${}^wL_1'\cap L_2'$ et ${}^{t(w)}L_1\cap L_2$ se correspondent (et pareil pour $L_1'\cap L_2'^w$ et $L_1\cap L_2^{t(w)}$). Ainsi, l'image par t de $W(L_1';L_2')$ est incluse dans $W(L_1;L_2)_d$.

Lemme 3.7. *Le morphisme $t:W(L_1';L_2')\to W(L_1;L_2)_d$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. Nous laissons la preuve en exercice au lecteur. □

L'isomorphisme t met en correspondance les termes de la première somme dans le membre de droite de l'égalité 3.1 avec les termes de la somme dans le membre de droite de l'égalité 3.2. Le lemme 2.4 b) permet alors de conclure. □

3.3. **L'application Q et la relation d'ordre $<<$ dans $Irr(G')$.** Soit $\pi'\in Irr(G')$. Posons $\pi'=Lg(\sigma')$, où σ' est une r.e.c.i. d'un sous-groupe de Levi standard L' de G'. Soient L le sous-groupe de Levi standard de G qui correspond à L', et $\sigma=\mathbf{C}^{-1}(\sigma')$ la r.e.c.i. de L qui correspond à σ'. Posons alors $Q(\pi')=Lg(\sigma)$.

Nous regardons Q comme une application de $Irr(G')$ dans $Irr(G)$. L'image de Q est le sous-ensemble de $Irr(G)$ formé des quotients de Langlands des représentations standard de G qui s'écrivent $ind_L^G(\sigma)$ où L se transfère et $\sigma \in \Pi^2(L)$. Q est une bijection de $Irr(G')$ dans l'image de Q qu'on note $Q(Irr(G'))$.

Proposition 3.8. *Si $\pi'_1, \pi'_2 \in Irr(G')$ sont telles que $\pi'_1 < \pi'_2$, alors $Q(\pi'_1) < Q(\pi'_2)$.*

Démonstration. Les opérations élémentaires sur les multisegments de G' se transfèrent sans difficulté à G ce qui donne le résultat. □

Q induit donc une relation d'ordre $<<$ sur $Irr(G')$ plus forte que $<$. On peut montrer en général que $<<$ est strictement plus forte que $<$ (je remercie Andrei Moroianu qui m'en a fourni la preuve).

La relation $<<$ se transpose de façon évidente sur l'ensemble $\mathcal{B}_{G'}$ des représentations standard de G', comme on l'avait fait à la section 2.1 pour $<$.

3.4. **Précisions sur la correspondance.** Donnons maintenant le résultat qui précise un peu plus la correspondance $\mathbf{JL}_r$:

Proposition 3.9. *Si $\pi' \in Irr(G')$, alors on a*

a) $\mathbf{JL}_r(\pi') = Q(\pi') + \sum_{\pi_i < Q(\pi')} a_i \pi_i$ avec $a_i \in \mathbb{Z}$ et $\pi_i \in Irr(G)$;

b) $\mathbf{LJ}_r(Q(\pi')) = \pi' + \sum_{\pi'_j << \pi'} b_j \pi'_j$ avec $b_j \in \mathbb{Z}$ et $\pi'_j \in Irr(G')$.

Démonstration. Si π' est le quotient de Langlands de la représentation standard $S' = ind_{L'}^{G'}(\sigma')$ alors $Q(\pi') = \pi$ est celui de la représentation standard $S = ind_L^G(\sigma)$ où L correspond à L', et $\sigma = \mathbf{C}^{-1}(\sigma')$. On sait qu'on a les relations :

$$S' = \pi' + \sum_{S'_j < S'} m_j S_j$$

et

$$S = \pi + \sum_{S_i < S} n_i S_i.$$

a) Comme $\mathbf{JL}_r(S') = S$, on a

$$\mathbf{JL}_r(\pi') + \sum_{S'_j < S'} m_j \mathbf{JL}_r(S'_j) = \pi + \sum_{S_i < S} n_i S_i.$$

$\mathbf{JL}_r(S'_j)$ est une représentation standard de G strictement inférieure à S grâce à la prop. 3.8, d'où le résultat.

b) Comme $S' = \mathbf{LJ}_r(S)$ on a

$$\pi' + \sum_{S'_j < S'} m_j S'_j = \mathbf{LJ}_r(\pi) + \sum_{S_i < S} n_i \mathbf{LJ}_r(S_i).$$

$\mathbf{LJ}_r(S_i)$ est ou bien nul ou bien une représentation standard M' de G' qui vérifie $M' << S'$. Le résultat s'ensuit. □

Posons alors deux conjectures :

Conjecture 3.10. *Si $\pi' \in Irr(G')$, on a $\mathbf{LJ}_r(Q(\pi')) = \pi'$.*

Conjecture 3.11. *Si $\pi \in Irr(G)$, alors $\mathbf{LJ}_r(\pi)$ est soit nul, soit une représentation irréductible à un signe près.*

Par le point b) de la prop. 3.9 il est clair que la deuxième conjecture implique la première. Nous avons vu que les représentations génériques de G vérifiaient la conjecture 3.11 (prop. 3.3). Nous ne savons pas si ces deux conjectures sont vraies ou fausses en général. En voici des cas particuliers :

Proposition 3.12. *a) Soient σ_1' et σ_2' des r.e.c.i. de $GL_{r_1}(D)$ et $GL_{r_2}(D)$ respectivement, $r_1 + r_2 = r$. Alors les sous-quotients irréductibles de $\sigma_1' \times \sigma_2'$ vérifient la conjecture 3.10.*

b) Si $\pi' \in Irr(G')$ est elliptique, π vérifie la conjecture 3.10.

c) Si $\pi \in Irr(G)$ est elliptique, π vérifie la conjecture 3.11.

Démonstration. a) Soient $\sigma_1 = \mathbf{C}^{-1}(\sigma_1')$ et $\sigma_2 = \mathbf{C}^{-1}(\sigma_2')$. On a

$$\mathbf{LJ}_r(\sigma_1' \times \sigma_2') = \sigma_1 \times \sigma_2.$$

Si les segments associés à σ_1 et σ_2 ne sont pas liés, alors les segments associés à σ_1' et σ_2' ne sont pas liés non plus, les deux produits sont irréductibles et la proposition est démontrée.

Si les segments associés à σ_1 et σ_2 sont liés, alors

$$\sigma_1 \times \sigma_2 = Lg(\sigma_1 \times \sigma_2) + ind\, \tau$$

où τ est une r.e.c.i. telle que $ind\, \tau$ est irréductible et aussi la seule représentation standard strictement inférieure à $\sigma_1 \times \sigma_2$.

Maintenant on a deux possibilités :

- ou bien les segments associés à σ_1' et σ_2' sont liés, ce qui arrive si et seulement si le sous-groupe de définition de τ se transfère, et alors

$$\sigma_1' \times \sigma_2' = Lg(\sigma_1' \times \sigma_2') + ind\, \mathbf{C}(\tau)$$

et le résultat est évident,

- ou bien les segments associés à σ_1' et σ_2' ne sont pas liés, i.e.

$$\sigma_1' \times \sigma_2' = Lg(\sigma_1' \times \sigma_2')$$

est irréductible. Mais, si les segments associés à σ_1' et σ_2' ne sont pas liés cela veut dire que le groupe de définition de τ ne se transfère pas, donc $ind\, \tau$ est G'-nulle et $\mathbf{LJ}_r(Lg(\sigma_1' \times \sigma_2')) = Lg(\sigma_1 \times \sigma_2)$.

b) Posons $\pi' = Lg(\sigma')$ pour une r.e.c.i. σ', et $\sigma = \mathbf{C}^{-1}(\sigma')$. On sait que le support cuspidal de π' est un segment de Tadić (section 2.5). Donc le support cuspidal de σ est un segment de Zelevinskii. On a donc

$$ind\, \sigma' = \pi' + \sum_{\pi_i' < \pi'} \pi_i'$$

et

$$ind\,\sigma = Q(\pi') + \sum_{\pi_i < Q(\pi')} \pi_i$$

(i.e. les multiplicités des sous-quotients sont 1). On a alors

$$\mathbf{JL}_r(\pi') + \sum_{\pi'_i < \pi'} \mathbf{JL}_r(\pi'_i) = Q(\pi') + \sum_{\pi_i < Q(\pi')} \pi_i = Q(\pi') + \sum_{\pi'_i < \pi'} Q(\pi'_i) + \sum_{S \in P} Lg(S),$$

où P est l'ensemble des représentations standard de G' inférieures à $ind\,\sigma$ qui sont G'-nulles. Comme le support cuspidal de σ est un segment de Zelevinskii et le sous-groupe de Levi standard sur lequel vit σ se transfère, l'ensemble P est vide. La preuve est alors immédiate par récurrence sur le nombre des π'_i strictement inférieures à π'.

c) Nous allons montrer un résultat plus précis. Le support cuspidal de π est un segment de Zelevinskii. Il existe donc un entier k divisant n, une représentation cuspidale ρ de $GL_{\frac{n}{k}}(F)$ et une suite strictement croissante $l_0 = 0 < l_1 < l_2 < ... < l_m = k$ telle que $\pi = Lg(\times_{i=0}^{m-1} Z(\nu^{l_i}\rho, l_{i+1} - l_i))$. Soit $l_{i_0} = 0 < l_{i_1} < ... < l_{i_p} = k$ la sous-suite de $l_0, l_1, ..., l_m$ formée des entiers l tels que d divise $\frac{ln}{k}$. Soit $\pi_0 = Lg((\times_{j=0}^{p-1} Z(\nu^{l_{i_j}}\rho, l_{i_{j+1}} - l_{i_j}))$. Par le point b), nous savons transférer π_0 : on a $\mathbf{LJ}_r(\pi_0) = Q^{-1}(\pi_0)$. Nous allons montrer que $\mathbf{LJ}_r(\pi) = (-1)^{m-p}\mathbf{LJ}_r(\pi_0)$. En effet, nous connaissons les coefficients des décompositions de π et de π_0 sur la base $\mathcal{B}_G$, c'est la prop. 9.13 dans [Ze]. Le résultat en découle, car les représentations standard inférieures à $\times_{i=0}^{m-1} Z(\nu^{l_i}\rho, l_{i+1} - l_i)$ qui ne sont pas G'-nulles sont exactement les représentations standard inférieures à $\times_{j=0}^{p-1} Z(\nu^{l_{i_j}}\rho, l_{i_{j+1}} - l_{i_j})$. □

Corollaire 3.13. *Si $r = 2$, la conjecture 3.10 est vraie.*

Démonstration. Une représentation de $GL_2(D)$ est ou bien cuspidale, ou bien un sous-quotient comme au point a) de la proposition. □

Possible application.

Proposition 3.14. *Supposons que la conjecture 3.10 soit vraie en toute généralité. Soient $\pi'_1 \in Irr(GL_{r_1}(D))$ et $\pi'_2 \in Irr(GL_{r_2}(D))$. Si*

$$Q(\pi'_1) \times Q(\pi'_2) \in Irr(GL_{dr_1+dr_2}(F)),$$

alors

$$\pi'_1 \times \pi'_2 \in Irr(GL_{r_1+r_2}(D))$$

(se généralise immédiatement à plusieurs représentations).

Démonstration. Posons $\pi'_1 = Lg(\sigma'_1)$, $\pi'_2 = Lg(\sigma'_2)$, $\pi_1 = Lg(\sigma_1)$ et $\pi_2 = Lg(\sigma_2)$ (où $\sigma_i = \mathbf{C}^{-1}(\sigma'_i)$). Si $Q(\pi'_1) \times Q(\pi'_2)$ est irréductible, elle est égale à $Lg(\sigma_1 \times \sigma_2)$ ([Ta2]).

La conjecture assumée vraie implique

$\mathbf{LJ}_r(Q(\pi'_1)\times Q(\pi'_2))=\pi'_1\times\pi'_2$ et $\mathbf{LJ}_r(Lg(\sigma_1\times\sigma_2))=Lg(\sigma'_1\times\sigma'_2)$. On en déduit $\pi'_1\times\pi'_2=Lg(\sigma'_1\times\sigma'_2)\in Irr(GL_{r_1+r_2}(D))$. $\square$

3.5. **L'involution et la dualité.** A. Zelevinskii a défini une *dualité* dans l'algèbre de Hopf $\mathcal{R}(F)$ (prop. 9.12, [Ze]). Dans [Au], A.-M. Aubert définit une *involution* i du groupe de Grothendieck des représentations lisses de longueur finie d'un groupe réductif quelconque. Elle y montre que cette involution envoie une représentation irréductible sur une représentation irréductible au signe près. En particulier, si $\pi\in Irr(G)$, exactement l'un des éléments $i(\pi)$ et $-i(\pi)$ de $Grot(G)$ se trouve dans $Irr(G)$. On le note $|i(\pi)|$ et on l'appelle *la duale* de π. A.-M. Aubert a montré ([Au], th. 2.3) que cette dualité coïncide avec celle de Zelevinskii et que

$$i(\pi)=(-1)^{n-k}|i(\pi)|, \tag{3.3}$$

où k le nombre de représentations cuspidales dans le support cuspidal de π. La dualité générale a été étudiée aussi par Schneider et Stuhler.

Sur $Grot(G)$, l'involution de [Au] est définie de la façon suivante : si $\mathcal{L}$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi standard de G, si π est un élément de $Grot(G)$, alors

$$i(\pi)=\sum_{L\in\mathcal{L}}(-1)^{|L|}\mathbf{i}_L^G\mathbf{r}_L^G(\pi).$$

Nous noterons i' l'involution sur $Grot(G')$. La définition de la dualité est la même. La formule de définition de i' est la même en remplaçant $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{L}'$, où $\mathcal{L}'$ est l'ensemble des sous-groupes de Levi standard de G'. Pour $\pi\in Irr(G')$, nous avons la relation

$$i'(\pi)=(-1)^{r-k}|i'(\pi)|, \tag{3.4}$$

où k le nombre de représentations cuspidales dans le support cuspidal de π (se montre par la même méthode que le th. 2.3 de [Au]).

Nous allons étudier le comportement de i par rapport au morphismes $\overline{\mathbf{JL}_r}$ (défini au th. 3.1, b)) et $\mathbf{LJ}_r$.

Théorème 3.15. *L'involution i de $Grot(G)$ induit une involution bien définie $\bar{i}$ de $Grot(G)/\mathbf{S}_{G,G'}$. L'isomorphisme $\overline{\mathbf{JL}_r}$ transforme l'involution i' en l'involution $(-1)^{n-r}\bar{i}$. On a aussi $\mathbf{LJ}_r\circ i=(-1)^{n-r}i'\circ\mathbf{LJ}_r$.*

Démonstration. Soit $\pi\in\mathbf{S}_{G,G'}$. On veut montrer que $i(\pi)\in\mathbf{S}_{G,G'}$. Or, $\mathbf{I}_{F,D}$ est stable par $\mathbf{i}_L^G\mathbf{r}_L^G$ par le th. 3.6. Il suffit donc d'utiliser la formule

$$i(\pi)=\sum_{L\in\mathcal{L}}(-1)^{|L|}\mathbf{i}_L^G\mathbf{r}_L^G(\pi),$$

car $\mathbf{S}_{G,G'}=Grot(G)\cap\mathbf{I}_{F,D}$. Ainsi, l'involution i “passe au quotient”, et $\bar{i}$ est bien définie (involution, évidemment).

En particulier, si $\mathcal{K}$ est l'ensemble de sous-groupes de Levi standard de G qui se transfèrent, on a

$$\mathbf{LJ}_r(i(\pi)) = \sum_{L\in\mathcal{K}} (-1)^{|L|}\mathbf{LJ}_r(\mathbf{i}_L^G\mathbf{r}_L^G(\pi)).$$

Par le th. 3.6, si $L \in \mathcal{K}$ et L' correspond à L, on a

$$\mathbf{LJ}_r(\mathbf{i}_L^G\mathbf{r}_L^G(\pi)) = \mathbf{i}_{L'}^{G'}\mathbf{r}_{L'}^{G'}(\mathbf{LJ}_r(\pi)).$$

On a aussi $(-1)^{|L|} = (-1)^{n-r}(-1)^{|L'|}$, car L et L' ont le même nombre de sections. Au final on trouve

$$\mathbf{LJ}_r(i(\pi)) = (-1)^{n-r}\sum_{L'\in\mathcal{L}'} (-1)^{|L'|}\mathbf{i}_{L'}^{G'}\mathbf{r}_{L'}^{G'}(\mathbf{LJ}_r(\pi)) = (-1)^{n-r}i'(\mathbf{LJ}_r(\pi)).$$

Il est clair dès lors que l'isomorphisme $\overline{\mathbf{JL}_r}$ transforme l'involution i' en l'involution $(-1)^{n-r}\overline{i}$.

La proposition suivante, sur les duales des r.e.c.i., est utile pour la correspondance globale. C'est une conséquence directe du théorème précédent (aussi bien que de la preuve du c) de la prop. 3.12).

Proposition 3.16. *Soit $\sigma \in \Pi^2(G)$ et posons $\mathbf{C}(\sigma) = \sigma'$. On a alors $\mathbf{LJ}_r(i(\sigma)) = (-1)^{n-r}i'(\sigma')$.*

4. Jacquet-Langlands global et unitarisabilité

4.1. **Les représentations $Lg(\sigma, k)$ et $Lg(\gamma, k)$.** Soient $G' = GL_r(D)$ une forme intérieure de $G = GL_n(F)$, k un entier positif qui divise r et σ une r.e.c.i. de $GL_{\frac{r}{k}}(D)$. On pose

$$Lg(\sigma, k) = Lg(\nu^{\frac{k-1}{2}}\sigma \times \nu^{\frac{k-3}{2}}\sigma \times ... \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\sigma).$$

Nous définissons maintenant, uniquement pour le groupe linéaire, les représentations $Lg(\gamma, k)$, où γ est une représentation générique unitaire. Soit donc γ une représentation générique de $GL_{\frac{n}{k}}(F)$. Étant générique, la représentation γ est un produit irréductible de r.e.c.i. $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_m$ ([Ze]). Posons $\sigma_i = \nu^{e_i}\sigma_i^u$, avec σ_i^u une r.c.i. et $e_i \in \mathbb{R}$. D'après [Ta1], $Lg(\sigma_i^u, k) = \nu^{-e_i}Lg(\sigma_i, k)$ est unitaire. Si $e_{i_1} = e_{i_2} = ... = e_{i_p}$, il est clair qu'on peut utiliser le théorème d'irréductibilité d'une représentation induite à partir d'un produit de représentations unitaires irréductibles ([Be]) pour prouver que la représentation $\times_{j=1}^p Lg(\sigma_{i_j}, k)$ est irréductible en passant par les représentations unitaires $Lg(\sigma_{i_j}^u, k)$.

Si, de plus, γ est unitaire, alors on doit avoir $|e_i| < \frac{1}{2}$ pour tout $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Cela a deux conséquences. La première est que, si $e_i \neq e_j$, les segments de $\nu^a\sigma_i$ et $\nu^b\sigma_j$ ont des supports cuspidaux non liés, quels que soient les entiers a et b. En particulier, si l'on regroupe les σ_i par paquets maximaux à coefficient e constant on obtient, par [Ze], prop. 8.5, que la représentation $\times_{i=1}^m Lg(\sigma_i, k)$ est irréductible.

Maintenant, on peut supposer sans restreindre la généralité que $e_1 \leq e_2 \leq ... \leq e_m$ et la deuxième conséquence est alors que la représentation

$$\nu^{\frac{k-1}{2}}\sigma_1, \nu^{\frac{k-1}{2}}\sigma_2, ..., \nu^{\frac{k-1}{2}}\sigma_m, \nu^{\frac{k-3}{2}}\sigma_1, \nu^{\frac{k-3}{2}}\sigma_2, ..., \nu^{\frac{k-3}{2}}\sigma_m, ...$$

$$..., \nu^{-\frac{k-1}{2}}\sigma_1, \nu^{-\frac{k-1}{2}}\sigma_2, ..., \nu^{-\frac{k-1}{2}}\sigma_m$$

est une r.e.c.i. ordonnée. À partir de là on obtient donc par induction une représentation standard, qui sera égale en tant que représentation (non seulement comme élément du groupe de Grothendieck) à la représentation

$$\nu^{\frac{k-1}{2}}\gamma \times \nu^{\frac{k-3}{2}}\gamma \times ... \times \nu^{-\frac{k-1}{2}}\gamma.$$

Cette représentation a donc un unique quotient irréductible. Par [Ze], prop. 8.5, c'est la représentation irréductible $\times_{i=1}^m Lg(\sigma_i, k)$. C'est aussi la représentation irréductible $\times_{i=1}^m \nu^{e_i} Lg(\sigma_i^u, k)$. On note cette représentation $Lg(\gamma, k)$. Les composantes locales des représentations séries discrètes du groupe linéaire sur un corps global sont toutes de la forme $Lg(\gamma, k)$ (voir section sur la correspondance globale).

4.2. **Transfert de $Lg(\sigma, k)$.** Tadić a calculé les duales des représentations du type $Lg(\sigma, k)$ de G. Il suffit de le faire quand σ est unitaire, le résultat général sur les r.e.c.i. s'ensuivant par simple torsion avec des puissances réelles de ν. Soit donc $\sigma = Z^u(\rho, l) \in \Pi_u^2(GL_{\frac{n}{k}}(F))$. Si on pose $\tau = Z^u(\rho, k)$ on a $|i(Lg(\sigma, k)| = Lg(\tau, l)$ (th. 7.1 iii), [Ta1]).

En gardant ces notations on a la

Proposition 4.1. *a) Si $d|\frac{n}{k}$ alors σ se transfère et on a*

$$\mathbf{LJ}_r(Lg(\sigma, k)) = Lg(\mathbf{C}(\sigma), k) + \sum_{\pi'_j << Lg(\mathbf{C}(\sigma),k)} a_j \pi'_j \qquad a_j \in \mathbb{Z}.$$

b) Si $d|\frac{n}{l}$ alors τ se transfère et on a

$$\mathbf{LJ}_r(Lg(\sigma, k)) = \varepsilon |i'(Lg(\mathbf{C}(\tau), l))| + \sum_{\pi'_j << Lg(\mathbf{C}(\tau),l)} a_j i'(\pi'_j), \quad a_j \in \mathbb{Z}, \text{ où}$$

$\varepsilon = (-1)^{kl - \frac{kl}{s(\mathbf{C}(\tau))}}$. *En particulier $\varepsilon = 1$ si d est impair.*

c) Si d ne divise ni $\frac{n}{k}$ ni $\frac{n}{l}$, alors $\mathbf{LJ}_r(Lg(\sigma, k)) = 0$.

Démonstration. a) est l'application directe de la prop. 3.9. Pour obtenir b) on applique a) à $Lg(\tau, l)$ et on passe aux duales grâce au th. 3.16. Le signe ε se calcule grâce au th. 3.16 et aux relations 3.3 et 3.4, section 3.5, à partir du fait que le support cuspidal de $Lg(\tau, k)$ est formé de kl représentations et le support cuspidal de $Lg(\mathbf{C}(\tau), k)$ est formé de $kl/s(\mathbf{C}(\tau))$ représentations. Si d est impair, alors $s(\mathbf{C}(\tau))$ est impair parce qu'il divise d (voir la section 2.3). kl et $\frac{kl}{s(\mathbf{C}(\tau))}$ ont alors la même parité. Le point c) est une application directe de la relation 4.5 de [Ta3]. □

Un résultat plus précis que cette proposition est obtenu dans [Ta4] sous certaines hypothèses qui sont à ce moment encore à l'état de conjectures.

4.3. **Deux lemmes locaux.** Soit F un corps local non-archimédien. Soit G' une forme intérieure de $GL_n(F)$.

Soient $\pi \in Grot(G)$ (resp. $Grot(G')$) et $\pi' \in Grot(G')$. On dit que π et π' *se correspondent faiblement* s'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que les caractères vérifient :

$$\chi_\pi(g) = \varepsilon \chi_{\pi'}(g') \tag{4.1}$$

pour tous $g \in G$ et $g' \in G'$ qui sont elliptiques réguliers et se correspondent (resp. pour tous $g, g' \in G'$ qui sont elliptiques réguliers conjugués).

Lemme 4.2. *Soit $\pi \in Irr(G)$ ou $\pi \in Irr(G')$. Si π est elliptique, alors π correspond faiblement à une unique r.e.c.i. $\sigma \in \Pi^2(G')$. Si $\pi \in Irr(G')$, alors π et σ ont le même support cuspidal. Dans ce cas, si σ est cuspidale on a $\pi = \sigma$.*

Démonstration. Ce lemme découle facilement de ce qui a déjà été expliqué à la section 2.5. □

Le lemme suivant affirme que G' vérifie l'hypothèse locale du cor. 7.3 de [Ar].

Lemme 4.3. *Soient L un sous-groupe de Levi standard propre de G' et π une représentation unitaire de L. Alors $ind_L^{G'}\pi$ n'a aucun sous-quotient elliptique.*

Démonstration. Supposons le contraire. On peut supposer que π est irréductible. Son support cuspidal est alors forcément un segment de Tadić (voir la section 2.5).

Si $ind_L^{G'}\pi$ est irréductible, elle ne peut pas être elliptique (tout en étant son seul sous-quotient) et le lemme est clairement vrai.

Si $ind_L^{G'}\pi$ est réductible, alors tout sous-quotient de $ind_L^{G'}\pi$ en est une sous-représentation parce que π est unitaire. En appliquant le théorème de réciprocité de Frobenius à chaque sous-représentation irréductible π_i de $ind_L^{G'}\pi$, on trouve que π est un sous-quotient de $res_L^{G'}\pi_i$. Ainsi, si $ind_L^{G'}\pi$ est réductible, parmi les sous-quotients de $res_L^{G'}ind_L^{G'}\pi$, π apparaît avec une multiplicité strictement supérieure à 1. Cela est impossible car le support cuspidal de π est un segment de Tadić formé de représentations cuspidales distinctes. □

4.4. **Sur la correspondance de Jacquet-Langlands globale.** Soient $\bar{F}$ un corps global, $\bar{D}$ une algèbre à division centrale de dimension d^2 sur $\bar{F}$, $r \in \mathbb{N}^*$ et posons $G'(\bar{F}) = GL_r(\bar{D})$. Posons $n = rd$ et $G(\bar{F}) = GL_n(\bar{F})$. Pour toute place v de $\bar{F}$ on note $\bar{F}_v$ le complété de $\bar{F}$ en v et on pose $\bar{D}_v = \bar{D} \otimes \bar{F}_v$. On pose alors $G_v = GL_n(\bar{F}_v)$ et $G'_v = \bar{D}_v^* \simeq GL_{r_v}(D_v)$ où D_v est une algèbre à division centrale de dimension d_v^2 sur $\bar{F}_v$ telle que $r_v d_v = n$. On note V l'ensemble des places de $\bar{F}$ où $\bar{D}$ est ramifiée et on suppose que V ne contient pas de places infinies. Pour les places $v \notin V$ on fixe des isomorphismes entre G'_v et G_v et l'on identifie une fois pour toutes ces deux groupes via ces isomorphismes.

Soit $\mathbb{A}$ l'anneau des adèles de $\bar{F}$. On note $G(\mathbb{A})$ (resp. $G'(\mathbb{A})$) le groupe des adèles de $G(\bar{F})$ (resp. de $G'(\bar{F})$). On identifie via des isomorphismes canoniques les centres de $G(\bar{F})$ et $G'(\bar{F})$ qu'on note $Z(\bar{F})$. Pareil pour les centres de $G(\mathbb{A})$ et $G'(\mathbb{A})$ – notation : $Z(\mathbb{A})$. On plonge $G(\bar{F})$ (resp. $G'(\bar{F})$) diagonalement dans $G(\mathbb{A})$ (resp. dans $G'(\mathbb{A})$). On fixe un caractère unitaire ω de $Z(\bar{F})\backslash Z(\mathbb{A})$. On note $L^2(\omega, G(\bar{F})\backslash G(\mathbb{A}))$ (resp. $L^2(\omega, G'(\bar{F})\backslash G'(\mathbb{A}))$) l'espace des fonctions sur $G(\bar{F})\backslash G(\mathbb{A})$ (resp. $G'(\bar{F})\backslash G'(\mathbb{A})$) qui se transforment selon ω sur $Z(\bar{F})\backslash Z(\mathbb{A})$ et qui sont de carré intégrable sur $Z(\mathbb{A})G(\bar{F})\backslash G(\mathbb{A})$ (resp. $Z(\mathbb{A})G'(\bar{F})\backslash G'(\mathbb{A})$). On note R (resp. R') la représentation régulière (translation à droite) de $G(\mathbb{A})$ (resp. $G'(\mathbb{A})$) dans $L^2(\omega, G(\bar{F})\backslash G(\mathbb{A}))$ (resp. dans $L^2(\omega, G'(\bar{F})\backslash G'(\mathbb{A}))$). On appelle *série discrète* de $G(\bar{F})$ (resp. de $G'(\bar{F})$) toute représentation équivalente à une sous-représentation irréductible de R (resp. de R'). Si π est une série discrète de $G(\bar{F})$ ou de $G'(\bar{F})$ et v est une place de $\bar{F}$, on note π_v la composante locale de π à la place v. Les séries discrètes sont des représentations unitaires et leurs composantes locales sont des représentations locales unitaires. On note avec la même lettre ν la valeur absolue adélique de la norme réduite sur $G(\bar{F})$ et $G'(\bar{F})$. Les composantes locales ν_v de ν sont les caractères locaux que nous avions notés ν dans la théorie locale. Nous supposons que le lecteur est familiarisé avec les notions de *représentation cuspidale* et *représentation résiduelle* concernant les séries discrètes. Ici, nous dirons *représentation cuspidale globale* pour éviter toute confusion avec la théorie locale des représentations. Il y a une façon naturelle et analogue au cas local de définir les sous-groupes de Levi standard, le foncteur d'induction parabolique, et les notion de sous-quotient, sous-représentation et quotient de la représentation induite pour les groupes $G(\mathbb{A})$ et $G'(\mathbb{A})$ (voir [La]).

Rappelons la classification des représentations résiduelles à partir des représentations cuspidales globales pour le groupe linéaire d'après [MW]. Si k est un entier positif divisant n, si ρ est une représentation cuspidale globale de $GL_{\frac{n}{k}}(\bar{F})$, la représentation induite à $GL_n(\bar{F})$ à partir de la représentation

$$\nu^{\frac{k-1}{2}}\rho \otimes \nu^{\frac{k-3}{2}}\rho \otimes \ldots \otimes \nu^{-\frac{k-1}{2}}\rho$$

a un unique quotient irréductible. C'est une représentation résiduelle si et seulement si $k \neq 1$. Toute série discrète s'obtient ainsi. Si π est une série discrète de $GL_n(\bar{F})$, alors k et la classe de ρ sont uniques avec cette propriété. Nous écrirons alors $\pi = MW(\rho, k)$.

Toute composante locale d'une représentation cuspidale globale du groupe linéaire étant générique unitaire, on en déduit en utilisant la classification de [MW] que toute composante locale d'une série discrète de $GL_n(\bar{F})$ est du type $Lg(\gamma, k)$ comme dans la section 4.1 (si $\pi = MW(\rho, k)$, alors ρ_v est générique unitaire et $\pi_v = Lg(\rho_v, k)$).

Fixons une place finie v de $\bar{F}$. Soient $g \in G_v$ et $g' \in G'_v$; on rappelle que g et g' *se correspondent* si leurs polynômes caractéristiques sont égaux, et sans racine multiple sur une clôture algébrique de $\bar{F}_v$.

Rappelons qu'une représentation π de G_v est dite *G'_v-nulle* si le caractère de π est nul sur l'ensemble des éléments de G_v qui correspondent aux éléments de G'_v. Fixons deux places finies distinctes v_1 et v_2 de $\bar{F}$. On note A l'ensemble des séries discrètes π de $G(\bar{F})$ telles que

- pour tout $v \in V$, π_v n'est pas G'_v-nulle et
- les composantes locales de π en v_1 et v_2 sont elliptiques.

Soit X_π l'ensemble des séries discrètes de $G'(\bar{F})$ telles que, pour toute place $v \notin V \cup \{v_1, v_2\}$ on a $\pi_v = \pi'_v$.

À partir de maintenant, sauf mention du contraire, le corps global $\bar{F}$ est *de caractéristique nulle.*

Proposition 4.4. *X_π n'est pas vide.*

Démonstration. Nous appliquons la démarche classique de [JL], en utilisant la formule des traces simple de [Ar], cor.7.5, avec des fonctions à support dans les éléments elliptiques réguliers aux places v_1 et v_2. Cette formule s'applique à $G(\bar{F})$ et $G'(\bar{F})$ grâce au lemme 4.3. On arrive à

$$\prod_{v \in V \cup \{v_1, v_2\}} \chi_{\pi_v}(g_v) = \sum_{\pi' \in X_\pi} m(\pi') \prod_{v \in V \cup \{v_1, v_2\}} \chi_{\pi'_v}(g'_v) \tag{4.2}$$

($m(\pi')$ sont des multiplicités non nulles) si, pour toute place $v \in V \cup \{v_1, v_2\}$, $g_v \in G_v$ et $g'_v \in G'_v$ se correspondent et, de plus, g_{v_1} et g_{v_2} sont elliptiques réguliers. Nous avons aussi utilisé le théorème de multiplicité un pour le spectre discret de $G(\bar{F})$. Comme $\pi \in A$, on peut choisir des $g_v \in G_v$ de telle façon que g_{v_1} et g_{v_2} soient elliptiques réguliers, que chaque g_v corresponde à un $g'_v \in G'_v$ et que le terme de gauche de la formule soit non nul. Donc le membre de droite n'est pas identiquement nul. Alors X_π n'est pas vide. □

Proposition 4.5. *Soit $\pi \in A$. Pour toute place $v \in V \backslash \{v_1, v_2\}$, écrivons $\mathbf{LJ}_r(\pi_v) = \sum_{i_v \in B_v} a_{i_v} \pi'_{i_v}$, avec B_v non vide, $\pi'_{i_v} \in Irr(G'_v)$ distinctes et $a_{i_v} \in \mathbb{Z}^*$. Si pour toute place $v \in V \backslash \{v_1, v_2\}$ on choisit un élément i_{v_0} de B_v, alors il existe $\pi' \in X_\pi$ telle que*

a) $\pi'_v = \pi'_{i_{v,0}}$ pour toute $v \in V \backslash \{v_1, v_2\}$, et

b) π'_v correspond faiblement à π_v pour $v \in \{v_1, v_2\}$.

Démonstration. On utilise l'égalité 4.2. Par [Ba3], X_π est fini. Il est clair qu'on peut remplacer dans cette formule l'ensemble X_π par son sous-ensemble X'_π formé des représentations $\pi' \in X_\pi$ qui sont elliptiques aux places v_1 et v_2.

On utilise ensuite que

- pour toute $v \in V\backslash\{v_1, v_2\}$ on a $\chi_{\pi_v}(g_v) = (-1)^{n-r_v} \sum_{i_v \in B_v} a_{i_v} \chi_{\pi'_{i_v}}(g_v)$ chaque fois que g'_v correspond à g_v et

- si, pour $j \in \{1, 2\}$, σ'_{v_j} est la r.e.c.i. de G'_{v_j} qui correspond faiblement à π_{v_j} par le lemme 4.2, alors on a $\chi_{\pi_{v_j}}(g_{v_j}) = \varepsilon_{v_j} \chi_{\sigma_{v_j}}(g'_{v_j})$, $\varepsilon_{v_j} \in \{-1, 1\}$, chaque fois que g_{v_j} et g'_{v_j} sont elliptiques réguliers et se correspondent.

On obtient

$$\prod_{v \in V\backslash\{v_1,v_2\}} \left(\sum_{i_v \in B_v} a_{i_v} \chi_{\pi'_{i_v}} \right)(g'_v) \prod_{v \in \{v_1,v_2\}} \chi_{\sigma'_v}(g'_v) =$$

$$\varepsilon \sum_{\pi' \in X'_\pi} m(\pi') \prod_{v \in V\backslash\{v_1,v_2\}} \chi_{\pi'_v}(g'_v) \prod_{v \in \{v_1,v_2\}} \chi_{\pi'_v}(g'_v)$$

(où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$) si

- pour toute $v \in V\backslash\{v_1, v_2\}$, $g'_v \in G'_v$ est semisimple régulier et

- pour $v \in \{v_1, v_2\}$, g'_v est elliptique régulier.

Les π'_{v_1} et π'_{v_2} sont elliptiques pour $\pi' \in X'_\pi$ et correspondent donc faiblement à des r.e.c.i. (lemme 4.2). Ces r.e.c.i. sont en fait des r.c.i. parce que leur caractère central est unitaire.

Il y a indépendance linéaire des caractères sur l'ensemble des éléments semisimples réguliers pour tous les G'_v, $v \in V\backslash\{v_1, v_2\}$. Il y a indépendance linéaire des caractères des r.c.i. sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers pour G'_v, $v \in \{v_1, v_2\}$ (orthogonalité des caractères). D'où le résultat cherché. □

Donnons un cas particulier, valable en toute caractéristique, utile peut-être à ceux qui ont de la marge dans le choix de la forme intérieure ou de la représentation π.

Proposition 4.6. *Soit π une série discrète de G telle que, pour toute place $v \in V$, π_v n'est pas G'_v-nulle. S'il existe deux places v_1 et v_2 de $\bar{F}$ telles que l'une des deux conditions suivantes soit vérifiée :*

(i) π_{v_1} est cuspidale et G'_{v_2} est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division,

(ii) π_{v_1} et π_{v_2} sont cuspidales,

alors il existe une unique série discrète π' de G' telle que $\mathbf{LJ}_{r_v}(\pi_v) = \pi'_v$ pour toute place v. Ceci est vrai même si la caractéristique du corps global $\bar{F}$ est non nulle.

Démonstration. Comme π_{v_1} est cuspidale, π est cuspidale. On reprend la démonstration de la prop. 4.5, en appliquant cette fois la formule des traces simple de Kazhdan-Deligne, valable en toute caractéristique, avec un coefficient non nul f_{v_1} de π_{v_1} à la place v_1 et une fonction f_{v_2} à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers à la place v_2. D'une part, f_{v_1} n'annule pas la trace de π_{v_1}. D'autre part, grâce à l'hypothèse sur la place v_2, il existe un f_{v_2} à support dans l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G_{v_2} qui n'annule pas la trace de

π_{v_2}. On obtient, comme dans la prop. 4.5, un π' tel que π'_v correspond à π_v pour tout $v \notin \{v_1, v_2\}$ et π'_{v_2} correspond faiblement à π_{v_2}. Toutefois, à cet instant, nous n'avons pas prouvé que π'_{v_1} correspond faiblement à π_{v_1}, car la fonction à la place v_1 a été fixée dès le début. Mais on sait quand même que la trace de π'_{v_1} ne s'annule pas sur une fonction f'_{v_1} qui correspond à f_{v_1}. Or, f'_{v_1} est alors un pseudocoefficient de $\mathbf{C}(\pi_{v_1})$, qui, par le lemme 2.4, c), est cuspidale. Donc $\pi'_{v_1} = \mathbf{C}(\pi_{v_1})$ (car le coefficient d'une représentation cuspidale annule la trace de toute représentation non équivalente).

Regardons maintenant la place v_2 où l'on sait que π_{v_2} et π'_{v_2} se correspondent faiblement. On ne peut pas utiliser de nouveau un coefficient car nous sommes obligés d'y poser une fonction à support dans les éléments elliptiques *réguliers.* Dans l'hypothèse (i), comme π_{v_2} est à la fois elliptique et générique, c'est une r.e.c.i., et comme G'_{v_2} est le groupe des éléments inversibles d'une algèbre à division, il est clair que π_{v_2} et π'_{v_2} se correspondent par Jacquet-Langlands. Dans l'hypothèse (ii), $\mathbf{C}(\pi_{v_2})$ est cuspidale par le lemme 2.4 c). Comme π'_{v_2} correspond faiblement à $\mathbf{C}(\pi_{v_2})$, on a alors $\pi'_{v_2} = \mathbf{C}(\pi_{v_2})$ par le lemme 4.2. □

Le résultat du corollaire suivant est déjà connu de tous. Le corps global $\bar{F}$ est de caractéristique quelconque.

Corollaire 4.7. *Soit S un ensemble fini de places finies de $\bar{F}$. Pour tout $v \in S$ on se donne une représentation de carré intégrable τ'_v de G'_v. Alors il existe une représentation automorphe cuspidale π' de G' telle que, pour tout $v \in S$, π'_v est équivalente à τ'_v. C'est vrai en toute caractéristique.*

Démonstration. Quand G' est GL_n, ce résultat est, par exemple, le lemme 6.5 de [AC]. Si G' est une forme intérieure de GL_n, posons, pour tout $v \in S$, $\tau_v = \mathbf{C}^{-1}(\tau'_v)$. On considère l'ensemble $\{\tau_v\}_{v\in S} \cup \{\tau_{v_1}, \tau_{v_2}\}$ où v_1 et v_2 sont deux places qui ne se trouvent pas dans S, et τ_{v_1} et τ_{v_2} sont des représentations cuspidales unitaires de G_{v_1} resp. G_{v_2}. En appliquant le résultat à $G = GL_n$, on trouve qu'il existe une représentation cuspidale π de G telle que π_v est équivalente à τ_v pour tout $v \in S \cup \{v_1, v_2\}$. Si on applique la proposition précédente, cas (ii), à π, on trouve une représentation cuspidale de G' qui a les propriétés voulues. □

4.5. **Conséquences sur l'unitarisabilité.** Posons $G' = GL_r(D)$, avec $r \in \mathbb{N}^*$ et D une algèbre à division centrale de dimension finie d^2 sur un corps local F *de caractéristique nulle.* Soit k un entier positif qui divise r.

Corollaire 4.8. *(de la prop. 4.5). a) Si σ' est une r.c.i. de $GL_{\frac{r}{k}}(D)$, alors $Lg(\sigma', k)$ est unitarisable.*

b) La représentation duale de $Lg(\sigma', k)$ est unitarisable aussi.

Démonstration. On pose $\sigma = \mathbf{C}^{-1}(\sigma') \in \Pi_u^2(GL_{\frac{rd}{k}}(F))$. On considère un corps global $\bar{F}$ tel qu'à une place finie v on ait $\bar{F}_v \simeq F$ et une algèbre à division $\bar{D}$ sur $\bar{F}$ déployée aux places infinies et telle que $\bar{D}_v \simeq D$.

a) On fixe une place finie $v' \notin V$. On peut toujours trouver une représentation cuspidale ρ de $GL_{\frac{rd}{k}}(\bar{F})$ qui ait des composantes locales r.c.i. données aux places dans $V \cup \{v'\}$ (lemme 6.5, [AC]). On impose alors comme composantes locales pour ρ la représentation σ à la place v et des représentations cuspidales à toutes les places dans $V \cup \{v'\} \backslash \{v\}$. On pose $\pi = MW(\rho, k)$. La composante locale de π à la place v est $Lg(\sigma, k)$ et n'est pas G'_v-nulle par la prop. 4.1. Les composantes locales de π à toute place dans $V \cup \{v'\} \backslash \{v\}$ sont des représentations duales de r.c.i., donc elliptiques. Le cardinal de $V \cup \{v'\} \backslash \{v\}$ est supérieur ou égal à deux. Cela implique que $\pi \in A$. La prop. 4.5 et la prop. 4.1 a) impliquent alors l'existence d'une représentation $\pi' \in X_\pi$ telle que $Lg(\sigma', k)$ soit équivalente à la composante locale de π' à la place v. Les composantes locales d'une série discrète étant unitaires, le résultat s'ensuit.

b) Si σ' est cuspidale, alors la duale de $Lg(\sigma', k)$ est une r.c.i. et c'est clair. Supposons que σ' n'est pas cuspidale. La duale de $Lg(\sigma, k)$ est une représentation du type $Lg(\tau, l)$ avec $\tau \in \Pi_u^2(GL_{\frac{rd}{l}}(F))$ (voir la section 4.2). L'entier $\frac{rd}{l}$ n'est pas forcément divisible par d et donc τ n'est pas en général transférable, mais l'on sait par la prop. 4.1 b) que $\mathbf{LJ_r}(Lg(\tau, l))$ est une somme de représentations lisses irréductibles de G' dans laquelle le coefficient de $i'(Lg(\sigma', k))$ est ± 1. On fixe une place finie $v' \notin V$ et on note ρ une représentation cuspidale de $GL_{\frac{rd}{l}}(\bar{F})$ dont les composantes locales sont : τ à la place v, et des représentations cuspidales à toutes les places dans $V \cup \{v'\} \backslash \{v\}$. Ensuite, la preuve se déroule comme pour le point a) et on trouve que $|i'(Lg(\sigma', k))|$ est unitarisable. $\square$

Commentaire : 1) Ce résultat est en accord avec ce qu'on appelle "la conjecture de Bernstein", qui prédit que la représentation duale d'une représentation (lisse irréductible) unitaire est unitaire.

2) Dans [Ta2], Tadić a posé cinq conjectures $U0, U1, ..., U4$. Sans être un cas particulier de la conjecture $U1$ de Tadić, le corollaire 4.8 a) est une conséquence de l'ensemble des conjectures $U0 - U4$.

3) Depuis que cet article tarde à être publié, nous avons montré avec Renard que ce dernier corollaire impliquait la conjecture $U1$ de Tadić ([BR]).

Corollaire 4.9. *Les représentations duales de r.c.i. de G' sont unitarisables.*

Démonstration. C'est le point a) du corollaire précédent quand σ' est cuspidale. $\square$

4.6. **Un cas de correspondance complète.** J'inclus un cas très particulier de correspondance de Jacquet-Langlands globale, qui n'est toutefois pas impliqué par

[Vi] et donne donc une idée de ce qui se passe quand les représentations ne sont pas elliptiques à toute place ramifiée. Il arrive que la machinerie développée plus haut est suffisante dans ce cas pour remplir le programme proposé, le cas général de la correspondance demandant en plus l'application de la formule des traces générale d'Arthur et la compréhension de la correspondance locale pour les représentations du type $Lg(\sigma,k)$ où σ est une r.c.i., ainsi que pour leur produits.

Soient $\bar{F}$ un corps global de caractéristique non nulle et $\bar{D}$ une algèbre à division de dimension p^4 sur $\bar{F}$, où p est un nombre premier. On reprend les notations des sections précédentes, notamment V est l'ensemble des places où $\bar{D}$ est ramifiée et V ne contient pas de places infinies. Soit V' le sous-ensemble de V formé de places v telles que $\bar{D}_v$ soit une algèbre à division. On note $SD(G(\bar{F}))$ (resp. $SD(G'(\bar{F}))$), l'ensemble des classes de séries discrètes de $G(\bar{F})$ (resp. de $G'(\bar{F})$).

On note $SD'(G(\bar{F}))$ le sous-ensemble de $SD(G(\bar{F}))$ formé des représentations π qui se trouvent dans l'une des trois situations (i), (ii), (iii) suivantes :

(i) π est cuspidale, π_v est une r.c.i. si $v \in V'$ et π_v est une représentation générique de G_v telle qu'elle est induite d'une r.e.c.i. d'un sous-groupe de Levi standard dont les cardinaux de toutes les sections sont divisibles par p si $v \in V\backslash V'$,

(ii) $\pi = MW(\rho,p)$ où ρ est une représentation cuspidale globale de $GL_p(\bar{F})$ telle que ρ_v est une représentation cuspidale si $v \in V'$,

(iii) $\pi = MW(\rho,p^2)$ où ρ est une représentation cuspidale globale de $GL_1(\bar{F})$ (i.e. un caractère unitaire de $GL_1(\bar{F})\backslash GL_1(\mathbb{A})$).

Proposition 4.10. *a) Il existe une unique bijection*

$$\mathbf{LJG} : SD'(G(\bar{F})) \to SD(G'(\bar{F}))$$

telle que, pour toute $\pi \in SD'(G(\bar{F}))$ on ait

$$\mathbf{LJ}_{r_v}(\pi_v) = \mathbf{LJG}(\pi)_v$$

pour toute place v.

b) Les théorèmes de multiplicité un et de multiplicité un forte sont vrais pour $\bar{D}^*$.

Avant de démontrer cette proposition, montrons des lemmes qui s'appliqueront en pratique aux situations locales aux places $v \in V\backslash V'$. De nouveau, F est un corps local. D est une algèbre à division de dimension p^2 sur F :

Lemme 4.11. *Si σ est une r.c.i. de $GL_p(F)$, alors on a $\mathbf{LJ}_p(Lg(\sigma,p)) = Lg(\mathbf{C}(\sigma),p) \in Irr(GL_p(D))$.*

Démonstration. On applique la prop. 4.1 a) et on montre que le membre de droite de l'égalité contient uniquement $Lg(\mathbf{C}(\sigma),p)$:

Si σ est cuspidale, alors $Lg(\sigma,p)$ est une duale de r.c.i. et le résultat découle de la prop. 3.16.

Si σ n'est pas cuspidale, alors on peut montrer que $Lg(\mathbf{C}(\sigma),p)$ est minimale pour $<<$. En effet, dans ce cas on a $s(\mathbf{C}(\sigma)) = p$ et il suffit de regarder r.e.c.i.

obtenues en faisant des opérations élémentaires avec les segments de $Lg(\sigma,p)$ et de montrer qu'elles ne peuvent pas vivre sur des sous-groupes de Levi standard transférables. Les segments de $Lg(\sigma,p)$ sont tous de longueur p, et, à la première opération élémentaire, on obtiendrait un segment de longueur strictement supérieure à p. Mais la longueur du plus long segment ne peut qu'augmenter (ou rester la même) à chaque nouvelle opération élémentaire, et, vu les segments donnés au départ, on ne pourra jamais obtenir un segment de longueur supérieure à $2p-1$. La longueur du plus long segment ne sera donc jamais divisible par p. $\square$

Lemme 4.12. *Soit $k<p$. Soit $\sigma=Z^u(\rho,q)$ une r.c.i. de $GL_k(F)$. Posons $\tau=Z^u(\rho,p)$. Alors $\mathbf{LJ}_k(Lg(\sigma,p))=(-1)^{p-1}|i'(Lg(\mathbf{C}(\tau),q)|$.*

Démonstration. On a $s(\mathbf{C}(\tau))=p$ et la preuve du fait que $Lg(\tau,q)$ correspond à $Lg(\mathbf{C}(\tau),q)$ se fait comme pour le lemme précédent (deuxième cas).

On applique alors la proposition 4.1 b) : si $d=p$ est impair, alors $\varepsilon=1$, si $p=2$ alors on doit avoir $k=1$, $l=s(\mathbf{C}(\sigma))=2$ et $\varepsilon=-1$. $\square$

Passons au transfert local dans le cas général. Soit γ une représentation générique unitaire de $GL_p(F)$. Écrivons $\gamma=\times_{i=1}^m\nu^{e_i}\sigma_i$, où, pour tout i, $\sigma_i=Z^u(\rho_i,k_i)$ est une r.c.i. et $e_i\in\mathbb{R}$, $|e_i|<\frac{1}{2}$. Posons $\tau_i=Z^u(\rho,p)$. On a vu à la section 4.1 qu'on avait $Lg(\gamma,p)=\otimes_{i=1}^m\nu^{e_i}Lg(\sigma_i,k_i)$.

Lemme 4.13. *On a*

$$\begin{aligned}\mathbf{LJ}_p(Lg(\gamma,p))&=\times_{i=1}^m\nu^{e_i}|i'(Lg(\mathbf{C}(\tau_i),k_i))|\\&=|i'(\times_{i=1}^m\nu^{e_i}Lg(\mathbf{C}(\tau_i),k_i))|\in Irr(GL_p(D)).\end{aligned}$$

Démonstration. Si γ est une r.c.i., c'est le lemme 4.11. Si γ n'est pas une r.c.i., la première partie résulte directement du lemme 4.12, en tenant compte pour le calcul du signe du fait que ou bien p est impair, ou bien $p=2$ et alors $m=2$. Le fait que la représentation image est irréductible vient du fait que les supports des $Lg(\mathbf{C}(\tau_i))$ ne sont pas liés. En effet, on a que $s(\mathbf{C}(\tau_i))=p$ quel que soit i ; mais $k_i\leq p-1$, $e_i<\frac{1}{2}$ et les ρ_i sont unitaires. $\square$

Revenons à notre démonstration de la prop. 4.10, en reprenant les notations $\bar{F}$ et $\bar{D}$.

Démonstration de la prop. 4.10. Si, pour toute $v\in V$, $\frac{a_v}{p^2}$ est l'invariant de Hasse de $\bar{D}^*(F_v)$, alors, par la théorie du corps des classes on a que la somme des a_v est un multiple de p^2 et, comme $\bar{D}$ est une algèbre à division, pas tous les a_v sont divisibles par p ; donc, au moins deux des a_v ne sont pas divisibles par p. V' contient ainsi au moins deux éléments v_1 et v_2 qu'on fixe une fois pour toutes. On définit l'ensemble A de la section 4.4 par rapport à ce choix.

Montrons que $A=SD'(G(\bar{F}))$. Soit π une série discrète de $G(\bar{F})$.

Si π est cuspidale, la prop. 3.3 implique que π se trouve dans A si et seulement si elle vérifie (i).

Si π est résiduelle, alors

(*) ou bien $\pi = MW(\rho, p)$, avec ρ représentation cuspidale globale de $GL_p(\bar{F})$,
(**) ou bien $\pi = MW(\rho, p)$, avec ρ représentation cuspidale globale de $GL_1(\bar{F})$.

Dans le deuxième cas (**), les composantes locales de π sont des d.r.c.i., donc elliptiques, et π est automatiquement dans A et dans $SD'(G(\bar{F}))$, cas iii).

Dans le premier cas (*), π_v est elliptique si et seulement si ρ_v est cuspidale (voir la section 4.1). π est dans A par définition si et seulement si

- π_v est elliptique aux places $v \in V'$, et
- π_v n'est pas G'_v-nulle si $v \in V \backslash V'$.

Par le lemme 4.13, cette deuxième condition est toujours réalisée. Donc π est dans A si et seulement si π est dans $SD'(G(\bar{F}))$.

Remarquons que $\mathbf{LJ}_{r_v}(\pi_v) \in Irr(G'_v)$ pour tous $\pi \in SD'(G(\bar{F}))$ et pour toute place v de $\bar{F}$ grâce aux lemmes 4.11, 4.12 et 4.13.

On obtient donc une application bien définie $\mathbf{LJG} : SD'(G(\bar{F})) \to SD(G'(\bar{F}))$ grâce à la prop. 4.5. Elle est forcément injective par le théorème de multiplicité un appliquée à $G(\bar{F})$: si deux séries discrètes π et π' de $G(\bar{F})$ sont non équivalentes, il existe $v \notin V$ tel que π_v et π'_v soient non équivalentes. Il faut maintenant prouver la surjectivité. Il faut partir d'une série discrète π' de $G'(\bar{F})$ et montrer qu'il existe $\pi \in SD'(G(\bar{F}))$ telle que $\mathbf{LJ}_{r_v}(\pi_v) = \pi'_v$ pour toute place v de $\bar{F}$. Par la même démarche que pour la prop. 4.4, en tenant compte du fait que $v_1, v_2 \in V$, on arrive à une égalité

$$\sum_{\pi \in X} m(\pi) \prod_{v \in V} \chi_{\pi_v}(g_v) = \sum_{\tau' \in X'} m(\tau') \prod_{v \in V} \chi_{\tau'_v}(g'_v) \tag{4.3}$$

où

- X est l'ensemble de séries discrètes π de $G(\bar{F})$ telles que π_v est équivalente à π'_v pour toute place $v \notin V$,
- X' est l'ensemble de séries discrètes τ' de $G'(\bar{F})$ telles que τ'_v est équivalente à π'_v pour toute place $v \notin V$,
- pour toute place $v \in V$, $g_v \in G_v$ et $g'_v \in G'_v$ se correspondent et
- g_{v_1} et g_{v_2} sont elliptiques réguliers.

Remarquons que la dernière condition est redondante puisque D_{v_1} et D_{v_2} sont des algèbres à division. X' est non vide car elle contient π'. Par indépendance linéaire des caractères, il existe un choix de g_v, $v \in V$, semisimples réguliers, tels que le membre de droite de l'égalité soit non nul. Donc X n'est pas vide. Par le théorème de multiplicité un pour $G(\bar{F})$, X contient un seul élément π. On a $\pi \in SD'(G(\bar{F}))$, car sinon il existe une place v telle que π_v soit G'_v-nulle (parce que $SD'(G(\bar{F})) = A$ et que D_{v_1} et D_{v_2} sont des algèbres à division). Alors $\mathbf{LJG}(\pi) \in X'$. L'égalité 4.3, la relation $\mathbf{LJ}_{r_v}(\pi_v) = \pi'_v$ et l'indépendance linéaire des caractères implique alors que X' ne contient que $\mathbf{LJG}(\pi)$, donc $\pi' = \mathbf{LJG}(\pi)$.

b) est une application immédiate de a). $\square$

5. Bibliographie

[AC] J.Arthur, L.Clozel, *Simple Algebras, Base Change, and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Ann. of Math. Studies, Princeton Univ. Press 120, (1989).

[Ar] J.Arthur, The invariant trace formula II. Global theory, *J. of the Am. Math. Soc.* (1988), vol 1, no.3, 501-554.

[Au] A.-M. Aubert, Dualité dans le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations lisses de longeur finie d'un groupe réductif p-adique, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347 (1995), 2179-2189 (il y a un Erratum, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348 (1996), 4687-4690).

[Ba1] A.I.Badulescu, Correspondance de Jacquet-Langlands en caractéristique non nulle, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 35 (2002), 695-747.

[Ba2] Un résultat d'irréductibilité en caractéristique non nulle, *Tohoku Math. J.* 56 (2004), 583-592.

[Ba3] A.I.Badulescu, Un résultat de finitude dans le spectre automorphe pour les formes intérieures de GL_n sur un corps global, *Bull. London Math. Soc.* 37 (2005), 651-657.

[Be] J.N.Bernstein, P-invariant distributions on $GL(N)$ and the classificataion of unitary representations of $GL(N)$ (non-archimedian cas), in *Lie groups and representations II*, Lecture Notes in Mathematics 10041, Springer-Verlag, 1983.

[BR] A.I.Badulescu, D.Renard, Sur une conjecture de Tadić, à paraître dans *Glasnik Matematicki.*

[Cl] L.Clozel, Théorème d'Atiyah-Bott pour les variétés p-adiques et caractères des groupes réductifs, *Mémoires de la S.M.F.* no. 15, Nouvelle série, 1984, 39-64.

[DKV] P.Deligne, D.Kazhdan, M.-F.Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p-adiques, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984.

[vD] G. van Dijk, Computation of Certain Induced Characters of p-adic Groups, *Math. Ann.* 199, 1972, 229-240.

[JL] H.Jacquet, R.P.Langlands, *Automorphic forms on GL(2)*, Lecture Notes in Math. 114, Springer-Verlag (1970).

[La] R.P.Langlands, On the notion of an automorphic representation, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 33 (1979), part. 1, 203-207.

[MW] C. Moeglin, J.-L. Waldspurger, Le spectre résiduel de GL_n, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 22 (1989), 605-674.

[Sh] J.A.Shalika, The multiplicity one theorem for GL_n, *Ann. of Math.* 100 (1974), 171-193.

[Ta1] M.Tadić, Classification of unitary representations in irreducible representations of a general linear group (non-archimedian case), *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 19 (1986), 335-382.

[Ta2] M.Tadić, Induced representations of $GL(n;A)$ for a p-adic division algebra A, *J. Reine angew. Math.* 405 (1990), 48-77.

[Ta3] M.Tadić, On characters of irreducible unitary representations of general linear groups *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* 65 (1995), 341-363.

[Ta4] M.Tadić, Unitarity and Jacquet-Langlands correspondences, a paraître dans *Pacific Journal.*

[Vi] M.-F. Vignéras, Correspondence between GL_n and a division algebra, prépublication.

[Ze] A.Zelevinskii, Induced representations of reductive p-adic groups II, *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup.* 13 (1980), 165-210.