Gráficas : teoría, aplicaciones e interacciones : II

J. Ramírez Alfonsín

Université Montpellier 2, Francia

Facultad de Ciencias, UNAM, México
22 de Enero de 2013

Ciclos

Un ciclo de longitud $n \geq 3$ de G es una sucesión de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$ todos distintos tales que $u = v_0, v = v_n$ y v_{i-1} es adyacente a v_i para $i = 1, \ldots, n$ y v_0 y v_n son también adyacentes.

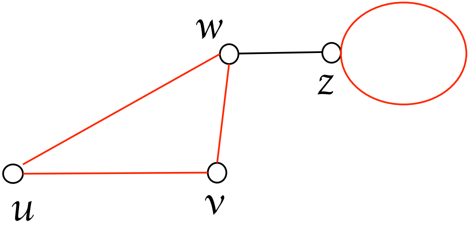
- Un ciclo es simple si todas las aristas utilizadas son diferentes.

Ciclos

Un ciclo de longitud $n \geq 3$ de G es una sucesión de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_n$ todos distintos tales que $u = v_0, v = v_n$ y v_{i-1} es adyacente a v_i para $i = 1, \ldots, n$ y v_0 y v_n son también adyacentes.

- Un ciclo es simple si todas las aristas utilizadas son diferentes.

Dos ciclos (u, v, w, u) y (z, z)



Teorema Una gráfica G es bipartita si y solamente si G no contiene ciclos de longitud impar.

Teorema Una gráfica G es bipartita si y solamente si G no contiene ciclos de longitud impar.

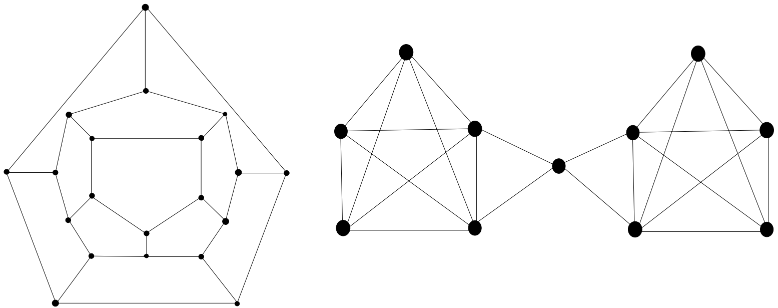
Observación Si G es bipartita entonces $\chi(G) \geq 3$.

Ciclo hamiltoniano

Un ciclo hamiltoniano de una gráfica G de orden n es un ciclo simple de longitud n.
Si G admite un ciclo hamiltoniano diremos que la gráfica G es hamiltoniana.

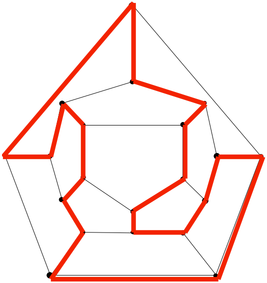
Ciclo hamiltoniano

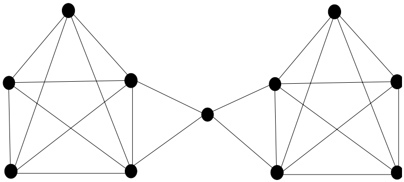
Un ciclo hamiltoniano de una gráfica G de orden n es un ciclo simple de longitud n.
Si G admite un ciclo hamiltoniano diremos que la gráfica G es hamiltoniana.



Ciclo hamiltoniano

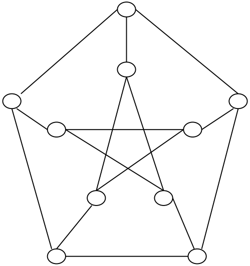
Un ciclo hamiltoniano de una gráfica G de orden n es un ciclo simple de longitud n.
Si G admite un ciclo hamiltoniano diremos que la gráfica G es hamiltoniana.





Ciclo hamiltoniano

Un ciclo hamiltoniano de una gráfica G de orden n es un ciclo simple de longitud n.
Si G admite un ciclo hamiltoniano diremos que la gráfica G es hamiltoniana.



Gráfica de Petersen

Teorema Sea G una gráfica simple de orden al menos 4. Si para toda pareja de vértices $\{u, v\}$ no adyacentes de G, tenemos que $d(u) + d(v) \geq n$, entonces G es hamiltoniana.

Teorema Sea G una gráfica simple de orden al menos 4. Si para toda pareja de vértices $\{u, v\}$ no adyacentes de G, tenemos que $d(u) + d(v) \geq n$, entonces G es hamiltoniana.

Observación La reciproca del Teorema no es verdadero en general. Por ejemplo, un ciclo de longitud $n \geq 5$ es hamiltoniano sin embargo tenemos que para todo $u, v \in V$, $d(u) + d(v) = 4 < n$.

Teorema Sea G una gráfica simple de orden al menos 4. Si para toda pareja de vértices $\{u, v\}$ no adyacentes de G, tenemos que $d(u) + d(v) \geq n$, entonces G es hamiltoniana.

Observación La reciproca del Teorema no es verdadero en general. Por ejemplo, un ciclo de longitud $n \geq 5$ es hamiltoniano sin embargo tenemos que para todo $u, v \in V$, $d(u) + d(v) = 4 < n$.

Corolario Toda gráfica simple de orden $n \geq 3$, con $\delta(G) \geq \frac{n}{2}$ es hamiltoniana.

El ≪ círculo de los irascibles ≫ (Sousselier, 1963)

El Presidente de un club decide de reunir a todos los miembros alrededor de una mesa redonda. Los miembros del club tienen un caracter muy dificil y cada uno tiene pocos amigos y antipatía contra todos los otros.

El Presidente decide de sentar miembros ≪ amigos ≫ consecutivamente en la mesa redonda para evitar disputas. Después de varios ensayos, se da cuenta que no puede encontrar una solución tomando en cuenta la condición de 'amistad'. Desesperado el Presidente contacta su amigo matemático y le platica el problema.

El matemático le contesta :

El « círculo de los irascibles » (Sousselier, 1963)

¡Es absolutamente imposible ! pero si uno de ustedes no viene a la reunión entonces si se puede encontrar una solución tomando en cuenta la condición de la amistad.

¿Quién no debe venir ? pregunta el Presidente

No importa quien, dice el matemático, quien agrega, además si hubiera menos miembros, esta curiosa propiedad no se podría dar.

El Presidente decide de sacrificarse y no venir, preteniendo que esta enfermo el día de la reunión.

¿Cuántos miembros hay en el club ? ¿Cuáles son los amigos y las antipatías que existen entre ellos ? Demostrar que la solucón que verifica las condiciones es única.

El « círculo de los irascibles » : Solución

Podemos formular este problema en terminos de gráficas.
Una gráfica simple $G = (V, E)$ es hipohamiltoniana si no tiene un cyclo hamiltoniano pero $G \setminus \{v\}$ es hamiltoniana para todo vértice v de G.
Encontrar una gráfica hipohamiltoniana de orden minimal y demostrar que la solución es única.

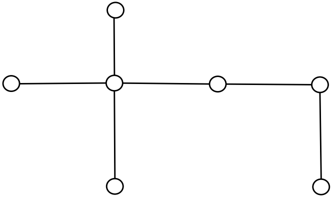
Teorema Si G es hipohamiltoniana entonces es de orden al menos 10. Más aún, cuando su orden es exactamente 10 entonces G est isomorfa a la gráfica de Petersen.

Arboles

Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.
Une bosque es una gráfica sin ciclos.

Arboles

Un árbol es una gráfica conexa y sin ciclos.
Une bosque es una gráfica sin ciclos.



Teorema En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Teorema En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Demostración Sea P un camino maximal de T. Entonces, $|P| \geq 2$ y los extremos de P tienen grado uno.

Teorema En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Demostración Sea P un camino maximal de T. Entonces, $|P| \geq 2$ y los extremos de P tienen grado uno.

Los vertices de grado uno en un árbol T son llamado hojas de T.

Teorema En un árbol T con más de un vértice, existen al menos dos vértices de grado uno.

Demostración Sea P un camino maximal de T. Entonces, $|P| \geq 2$ y los extremos de P tienen grado uno.

Los vertices de grado uno en un árbol T son llamado **hojas** de T.

Teorema Un árbol T es bipartito.

Teorema Dado una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- T es un árbol

Teorema Dado una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- T es un árbol
- Para cualesquiera $u, v \in V(T)$, existe un único uv-camino en T

Teorema Dado una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- T es un árbol
- Para cualesquiera $u, v \in V(T)$, existe un único uv-camino en T
- T es conexa, y para todo $e \in E(T)$ se tiene que $T \setminus e$ es disconexa.

Teorema Dado una gráfica T, las siguientes afirmaciones son equivalentes :

- T es un árbol
- Para cualesquiera $u, v \in V(T)$, existe un único uv-camino en T
- T es conexa, y para todo $e \in E(T)$ se tiene que $T \setminus e$ es disconexa.
- T no tiene ciclos y para todo $u, v \in V(T)$ tales que $(u, v) \notin E(T)$ se tiene que $T + (u, v)$ tiene exactamente un *ciclo*

Teorema Una gráfica G es conexa si y solamente si G tiene una subgráfica generadora isomorfa a un árbol.

Teorema Una gráfica G es conexa si y solamente si G tiene una subgráfica generadora isomorfa a un árbol.

Demostración (*Suficiencia*) Fácil.

Teorema Una gráfica G es conexa si y solamente si G tiene una subgráfica generadora isomorfa a un árbol.

Demostración (*Suficiencia*) Fácil.

(*Necesidad*) Supongamos que G sea de orden $n \geq 2$ y sea G' una subgráfica generadora de G conexa maximal (esto es, G' es conexa pero $G' \setminus e$ no es conexa para toda arista e de G').

Teorema Una gráfica G es conexa si y solamente si G tiene una subgráfica generadora isomorfa a un árbol.

Demostración (*Suficiencia*) Fácil.

(*Necesidad*) Supongamos que G sea de orden $n \geq 2$ y sea G' una subgráfica generadora de G conexa maximal (esto es, G' es conexa pero $G' \setminus e$ no es conexa para toda arista e de G').

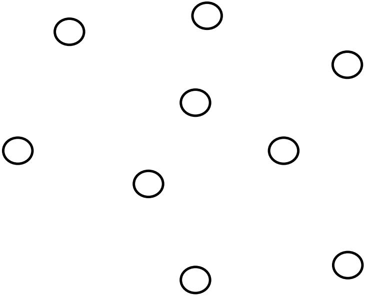
Entonces la gráfica G' verifica una de las condiciones equivalentes del teorema, por lo que G' es un árbol.

Problema de Optimización

Tenemos 8 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más económica posible de modo que todas las ciudades estén conectadas.

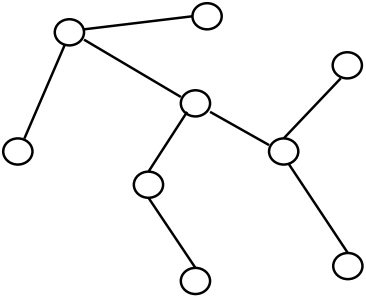
Problema de Optimización

Tenemos 8 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más económica posible de modo que todas las ciudades estén conectadas.



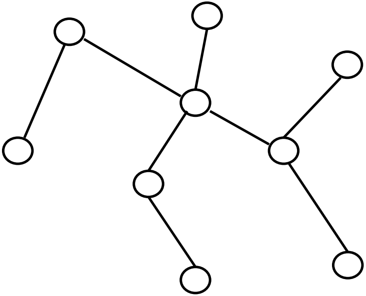
Problema de Optimización

Tenemos 8 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más económica posible de modo que todas las ciudades estén conectadas.



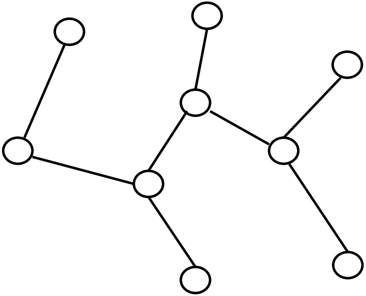
Problema de Optimización

Tenemos 8 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más económica posible de modo que todas las ciudades estén conectadas.



Problema de Optimización

Tenemos 8 ciudades que están aisladas y entre las que se quiere construir carreteras de la manera más económica posible de modo que todas las ciudades estén conectadas.



Teorema (Caley) Hay n^{n-2} árboles etiquetados en n vértices.

Teorema (Caley) Hay n^{n-2} árboles etiquetados en n vértices.

Demostración (idea) Una demostración utiliza el código de Prüfer, que da una biyección entre el conjunto de árboles etiquetados y el conjunto de cadenas de longitud $n-2$ con n símbolos.

Teorema (Kruskal) Dado una gráfica completa con aristas ponderadas (con Pesos). Entonces, existe un algoritmo $\ll$ eficiente $\gg$ que encuentra un árbol generador etiquetado en n vértices de peso mínimo.

Teorema (Kruskal) Dado una gráfica completa con aristas ponderadas (con Pesos). Entonces, existe un algoritmo $\ll$ eficiente $\gg$ que encuentra un árbol generador etiquetado en n vértices de peso mínimo.

Algoritmo Glotón

Teorema (Kruskal) Dado una gráfica completa con aristas ponderadas (con Pesos). Entonces, existe un algoritmo ≪ eficiente ≫ que encuentra un árbol generador etiquetado en n vértices de peso mínimo.

Algoritmo Glotón

- Escoger una arista de costo mínimo.

Teorema (Kruskal) Dado una gráfica completa con aristas ponderadas (con Pesos). Entonces, existe un algoritmo ≪ eficiente ≫ que encuentra un árbol generador etiquetado en n vértices de peso mínimo.

Algoritmo Glotón

- Escoger una arista de costo mínimo.
- Repetir el paso anterior verificando, en cada paso, que la nueva arista no forman ciclo con las ya escogidas.

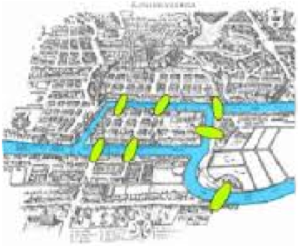
Teorema (Kruskal) Dado una gráfica completa con aristas ponderadas (con Pesos). Entonces, existe un algoritmo ≪ eficiente ≫ que encuentra un árbol generador etiquetado en n vértices de peso mínimo.

Algoritmo Glotón

- Escoger una arista de costo mínimo.
- Repetir el paso anterior verificando, en cada paso, que la nueva arista no forman ciclo con las ya escogidas.
- El algoritmo termina cuando se hayan escogido $n-1$ aristas.

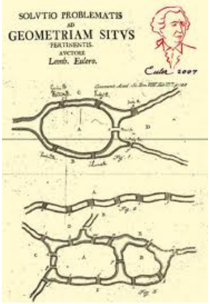
Problema de los puentes de Königsberg

¿Es posible de hacer un recorrido cruzando cada uno de los puentes de Königsberg sobre el río Presel solo una vez y regresar al punto de inicial ?



Problema de los puentes de Königsberg : respuesta

Lenhardt Euler (1736) contestó a la pregunta de forma negativa.
(Euler es considerado como el padre de la Teoría de gráficas)



Problema de los puentes de Königsberg : con gráficas

- Un recorrido en una gráfica G es una sucesión de vértices y aristas $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k$ donde e_{i-1} es adyacente a e_i para todo $i = 1, \ldots, k-1$.
- El recorrido se dice euleriano si inicia y termina en el mismo vértice y utiliza cada arista exactamente una sola vez.
- Una gráfica es euleriana si admite un recorrido euleriano.

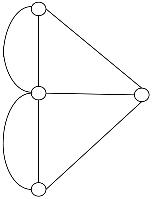
Problema de los puentes de Königsberg : con gráficas

- Un recorrido en una gráfica G es una sucesión de vértices y aristas $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k$ donde e_{i-1} es adyacente a e_i para todo $i = 1, \ldots, k-1$.

- El recorrido se dice euleriano si inicia y termina en el mismo vértice y utiliza cada arista exactamente una sola vez.

- Una gráfica es euleriana si admite un recorrido euleriano.

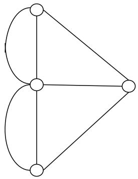
Representación de los puentes con una gráfica



Problema de los puentes de Königsberg : con gráficas

- Un recorrido en una gráfica G es una sucesión de vértices y aristas $v_0, e_0, v_1, e_1, \ldots, e_{k-1}, v_k$ donde e_{i-1} es adyacente a e_i para todo $i = 1, \ldots, k-1$.
- El recorrido se dice euleriano si utiliza cada arista exactamente una sola vez. Un ciclo euleriano es un recorrido euleriano que inicia y termina en el mismo vértice.
- Una gráfica es euleriana si admite un ciclo euleriano.

¡NO ES EULERIANA !



Teorema (Euler) Una gráfica G es euleriana si y solamente si es conexa y todos sus vértices tienen grado par.

Teorema (Euler) Una gráfica G es euleriana si y solamente si es conexa y todos sus vértices tienen grado par.

- Una gráfica es semi-euleriana si admite un recorrido euleriano.

Teorema Una gráfica es semi-euleriana si y solamente si es conexe y admite 0 o 2 vértices de grado impar.

Gráficas dirigidas

Una gráfica dirigida $G = (V, A)$ es una gráfica en donde las aristas tienen una dirección. Los elementos de $A(G)$ son llamados arcos.

Gráficas dirigidas

Una gráfica dirigida $G = (V, A)$ es una gráfica en donde las aristas tienen una dirección. Los elementos de $A(G)$ son llamados arcos.
- Si $a = \{u, v\} \in A(G)$ decimos que el arco a tiene vértice inicial en u dirigido al vértice final v.

Gráficas dirigidas

Una gráfica dirigida $G = (V, A)$ es una gráfica en donde las aristas tienen una dirección. Los elementos de $A(G)$ son llamados arcos.
- Si $a = \{u, v\} \in A(G)$ decimos que el arco a tiene vértice inicial en u dirigido al vértice final v.
- Sea $v \in G$.
El grado exterior de v, denotado por $d^+(v)$, es el número de arcos que salen de v.
El grado interior de v, denotado por $d^-(v)$, el número de arcos que entran a v.

Gráficas conservativas

Una gráfica $G = (V, E)$ de orden n con m aristas es conservativa si existe una dirección del conjunto de sus aristas y una biyección

$$w : E(G) \to \{1, \ldots, m\},$$

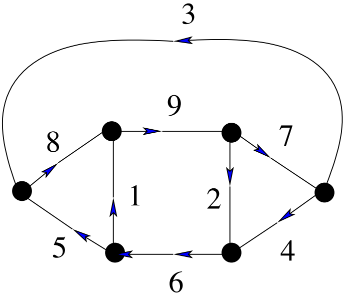
tal que para todo vértice v de G,

$$\sum_{e \in N_v^+} w(e) = \sum_{e \in N_v^-} w(e)$$

N_v^+ es el conjunto de arcos que salen de v
N_v^- es el conjunto de arcos que entran en v
(si $N_v^+ = N_v^- = \emptyset$ entonces $\sum\limits_{e \in N_v^+} w(e) = \sum\limits_{e \in N_v^+} w(e) = 0$).

Esta propiedad en cada vértice es concocida como la ley de corriente de Kirchhoff. Kirchhoff consideró la circulación de agua en una red de tuberías o bien la circulación de coriente eléctrica en un circuito.

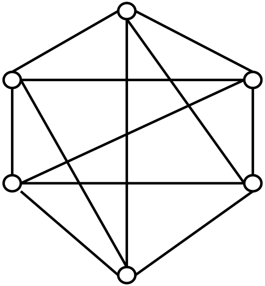
Ejemplo : Los arcos representan las tuberías de agua y la etiqueta de cada arco representa los litros de agua por segundo que puede circular en esta red.



Teorema Sea G una gráfica que admite una descomposición en dos ciclos hamiltonianos. Entonces, G es conservativa

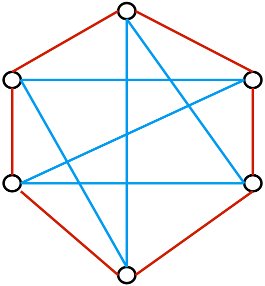
Teorema Sea G una gráfica que admite una descomposición en dos ciclos hamiltonianos. Entonces, G es conservativa

Demostración (con un ejemplo)



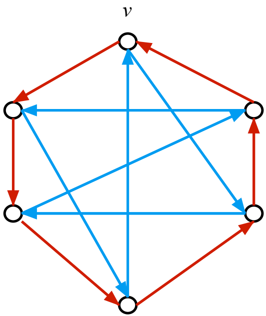
Teorema Sea G una gráfica que admite una descomposición en dos ciclos hamiltonianos. Entonces, G es conservativa

Demostración (con un ejemplo)



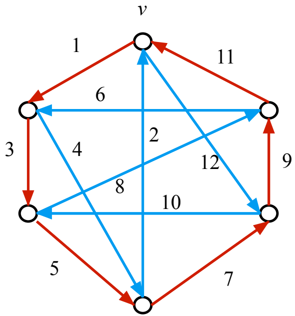
Teorema Sea G una gráfica que admite una descomposición en dos ciclos hamiltonianos. Entonces, G es conservativa

Demostración (con un ejemplo)



Teorema Sea G una gráfica que admite una descomposición en dos ciclos hamiltonianos. Entonces, G es conservativa

Demostración (con un ejemplo)



Cuandrados perfectos

Un rectángulo cuadratizado es un rectángulo dividido en un número finito de cuadrados.

Cuandrados perfectos

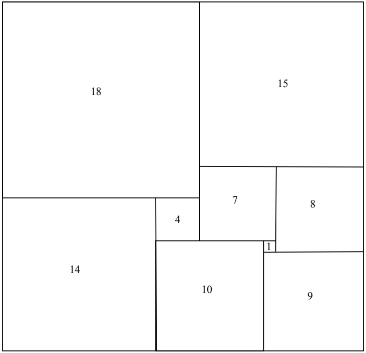
Un rectángulo cuadratizado es un rectángulo dividido en un número finito de cuadrados.

Si ningún par de cuadrados son iguales en la división, diremos que el rectángulo es perfecto.

Cuandrados perfectos

Un rectángulo cuadratizado es un rectángulo dividido en un número finito de cuadrados.

Si ningún par de cuadrados son iguales en la división, diremos que el rectángulo es perfecto.



Cuandrados perfectos

- Si ningún cuadro es contenido en otro, entonces el rectángulo cuadratizado es llamadao simple

Cuandrados perfectos

- Si ningún cuadro es contenido en otro, entonces el rectángulo cuadratizado es llamadao simple

- Por mucho tiempo se desconocía la existencia de cuadrados perfectos simples. Más aún, fué conjeturado que no existían tales cuadrados.

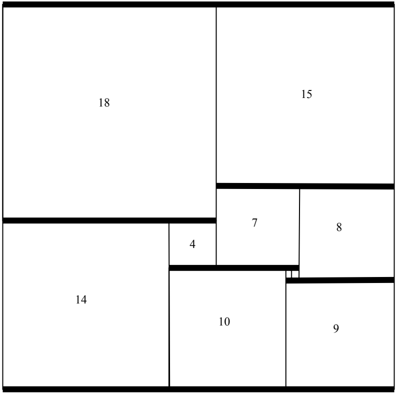
Cuandrados perfectos

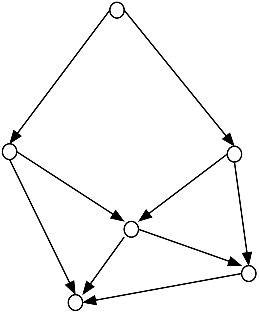
- Si ningún cuadro es contenido en otro, entonces el rectángulo cuadratizado es llamadao simple

- Por mucho tiempo se desconocía la existencia de cuadrados perfectos simples. Más aún, fué conjeturado que no existían tales cuadrados.

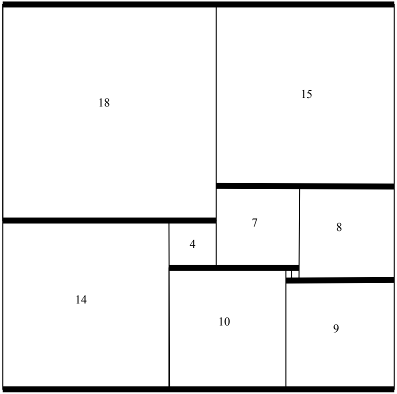
- En 1940, se dió un método para construir cuadrados perfectos simples utilizando gráficas conservativas.

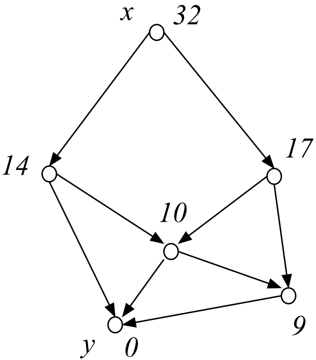
- Asociar una gráfica dirigida



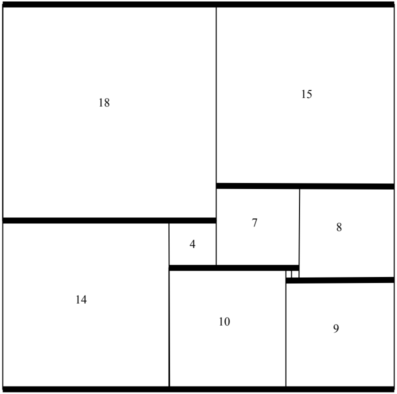


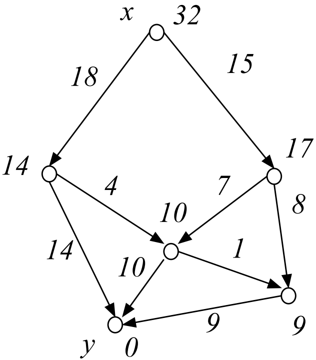
- Asociar una gráfica dirigida con pesos en sus vértices





- Asociar una gráfica dirigida con pesos en sus vértices





Teorema Si G es una gráfica *plana, 3-conexa* y (x, y) es una arista de G entonces un *flujo* de x a y en $G \setminus (x, y)$ determina un rectángulo cuadratizado simple.