Gráficas : teoría, aplicaciones e interacciones : III

J. Ramírez Alfonsín

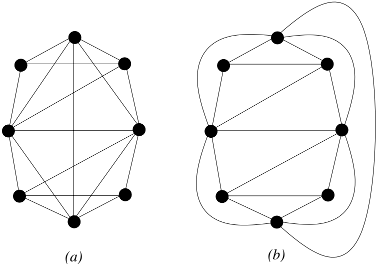
Université Montpellier 2, Francia

Facultad de Ciencias, UNAM, México
23 de Enero de 2013

Definición

Una gráfica es plana si tiene una representación en el plano de tal manera que dos aristas tienen un punto comun si y solamente si son adyacentes.

Ejemplo :



No todas las gráficas son planas

No todas las gráficas son planas

Ejemplo : K_5 no es plana.

No todas las gráficas son planas

Ejemplo : K_5 no es plana.

Demostración - Considerar un 5-ciclo C de K_5

- Observar que solamente dos de las diagonales se pueden dibujar en el interior de C y dos en el exterior de C.

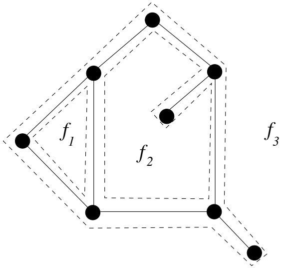
Por lo que no se podra dibujar la ultima diagonal sin cruzar otra.

Otras definiciones

Las caras de una gráfica plana es la region formada por ciclos sin diagonales.

Obervación Una representación de una gráfica plana admite solamente una cara no acotada llamada cara exterior

Ejemplo : una representación plana y sus caras



Curva de Jordan

Teorema Una curva simple y cerrada separa el plano en dos regiones, una acotada y la otra no acotada y la curva está en la frontera de las dos.

Curva de Jordan

Teorema Una curva simple y cerrada separa el plano en dos regiones, una acotada y la otra no acotada y la curva está en la frontera de las dos.

Proposición La gráfica $K_{3,3}$ no es plana.

Demostración Soit a_1, a_2, a_3 y b_1, b_2, b_3 la partición de $V(K_{3,3})$ y sea C el 4-ciclo $\{a_1, b_1, a_2, b_2, a_1\}$.

Por el Teorema de Jordan, C determina una partición de el plano en dos regiones. Si colocamos el vértice b_3 en el interior (ou bien en el exterior) de C entonces no podremos colocar a_3 al interior (ou bien al exterior) de C.

¿Cuáles son las gráficas planas?

En 1930, Kuratowski dió una caracterización de las gráficas planas.

Una arista e es subdividida si es remplazada por un camino en donde sus extremos son los extremos de e y los nuevos vértices son todos de grado 2.

Una gráfica G' es una subdivision de G si es obtenida a partir de G por una secuencia de subdivisiones de aristas de G.

¿Cuáles son las gráficas planas?

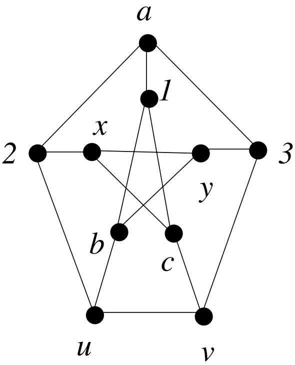
En 1930, Kuratowski dió una caracterización de las gráficas planas.

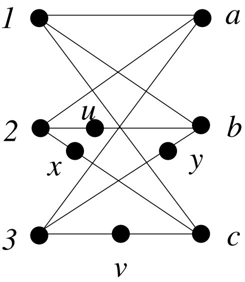
Una arista e es subdividida si es remplazada por un camino en donde sus extremos son los extremos de e y los nuevos vértices son todos de grado 2.

Una gráfica G' es una subdivision de G si es obtenida a partir de G por una secuencia de subdivisiones de aristas de G.

Teorema Uns gráfica es plana si y solamente si ninguna de sus subgráficas es una subdivison de K_5 o de $K_{3,3}$.

Ejemplo : La gráfica de Petersen no es plana porque contiene una subdivision de $K_{3,3}$.





Dualidad

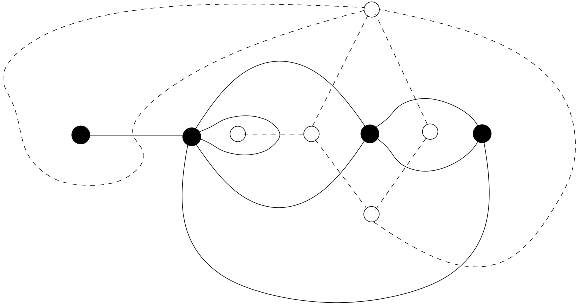
Sea $G = (E, V)$ una gráfica plana. La gráfica dual $G^* = (V^*, E^*)$ $G = (V, E)$ es la gráfica plana en donde :

- los vertices V^* corresponden a las caras de G

- las aristas E^* corresponden a las aristas de G como sigue :

si e es una arista de G que es compartida por dos caras X y Y (podemos tener que $X = Y$) entonces la arista e^* de G^* es una arista que conecta los vértices x y y de G^* que corresponden a las caras X et Y.

Ejemplo : Una gráfica plana y su dual.



Fórmula de Euler

La formula de Euler es una herramienta fundamental para las gráficas planas.

Fórmula de Euler

La formula de Euler es una herramienta fundamental para las gráficas planas.

Teorema Sea G una gráfica plana conexe donde $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ et f caras. Entonces, $n - m + f = 2$.

Fórmula de Euler

La formula de Euler es una herramienta fundamental para las gráficas planas.

Teorema Sea G una gráfica plana conexe donde $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ et f caras. Entonces, $n - m + f = 2$.

Teorema Sea G una gráfica plana con $n = |V(G)| \geq 3$ y $m = |E(G)|$. Entonces, $m \leq 3n - 6$, si además G no contiene triángulos entonces $m \leq 2n - 4$.

Fórmula de Euler

La formula de Euler es una herramienta fundamental para las gráficas planas.

Teorema Sea G una gráfica plana conexe donde $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ et f caras. Entonces, $n - m + f = 2$.

Teorema Sea G una gráfica plana con $n = |V(G)| \geq 3$ y $m = |E(G)|$. Entonces, $m \leq 3n - 6$, si además G no contiene triángulos entonces $m \leq 2n - 4$.

Corolario Toda gráfica plana admite un vertice con grado a lo mas de 5.

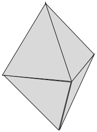
Poliedros regulares

- Un poliedro es un cuerpo solido delimitado por un conjunto finito de poĺigonos (las caras del poliedro).

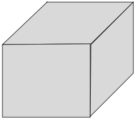
- Un poliedro P es convexo si el segmento que une dos puntos cualesquiera de P esta completamente contenido en P.

- Un poliedro es regular si es posible de dibujarlo en una esfera en donde todas sus caras son *polígonos congruentes* (polígonos cuyos lados y ángulos son congruentes entre sí) y que se juntan en la misma forma alrededor de cada vértice del poliedro

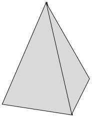
Una de las aplicaciones de la formula de Euler es para demostrar que existen exactamente 5 poliedros regulares convexos, llamados poliedros Platónicos : (a) octaedro, (b) cubo, (c) tetraedro, (d) dodecaedro y (e) icosaedro.



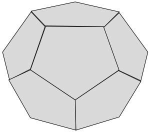
(a)



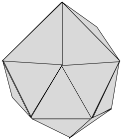
(b)



(c)

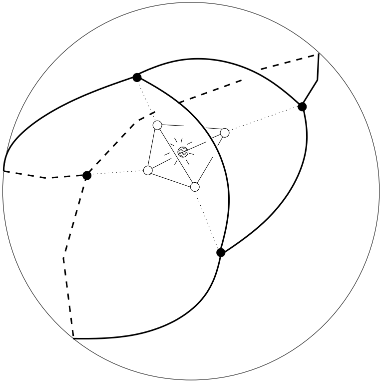


(d)

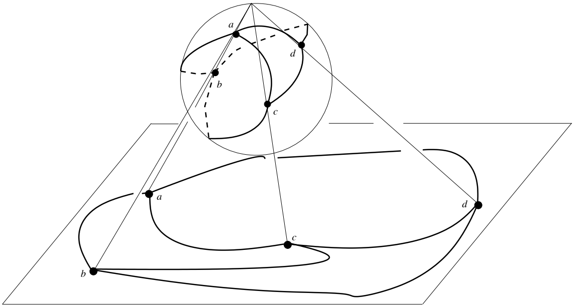


(e)

Convertir un poliedro en una gráfica plana via una proyección radial.

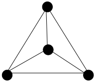


Este dibujo puede ser transformado en un dibujo en el plano via una proyección estereográfica.

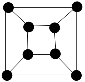


Observación Dos poliedros diferentes no pueden tener la misma imagen bajo las proyecciones estereográficas.

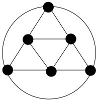
En el caso de poliedros regulares todos los vertices de las gráficas obtenidas son de grado $d \geq 3$ y cada cara tiene el mismo número $k \geq 3$ de vertices que lo bordea.



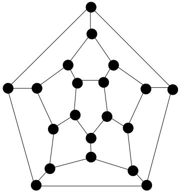
$d=k=3$



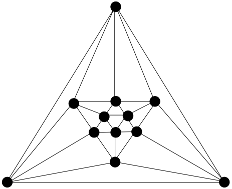
$d=3, k=4$



$d=4, k=3$



$d=3, k=5$



$d=5, k=3$

Representaciones planas de los 5 poliedros platónicos.

Teorema Sea G una gráfica plana tal que $d(v) = d$ para todo $v \in V(G)$ y tal que cada cara es adyacente a $k \geq 3$ vertices. Entonces, G es isomorfa a una de las gráficas platónicas.

Teorema Sea G una gráfica plana tal que $d(v) = d$ para todo $v \in V(G)$ y tal que cada cara es adyacente a $k \geq 3$ vertices. Entonces, G es isomorfa a una de las gráficas platónicas.

Demostración Sea G una gráfica plana con $d(v) = d$ para todo $v \in V(G)$ y cada cara h es de longitud k (lo notaremos $l(h) = k$). Si $n = |V(G)|, m = |E(G)|$ y f el número de caras, entonces,

$$2m = \sum_{v \in V(G)} d(v) = nd$$

también tenemos

$$2m = \sum_{\text{h cara de G}} l(h) = kf.$$

Continuación Utilizando la formula de Euler obtenemos

$$2 = n - m + f = \frac{2m}{d} - m + \frac{2m}{k}$$

por lo que

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}.$$

Observación No podemos tener que $d, k \geq 4$ si no $\frac{1}{d} + \frac{1}{k} \leq \frac{1}{2}$. Entonces al menos uno de los dos enteros d o k es igual a 3. Si $d = 3$ obtenemos $\frac{1}{k} - \frac{1}{6} = \frac{1}{m} > 0$ donde $k \in \{3, 4, 5\}$ (simétricamente, si $k = 3$ encontramos $d \in \{3, 4, 5\}$).

Continuación Las soluciones posible son :

d	k	n	m	f	poliedro regular
3	3	4	6	4	tetraedro
3	4	8	12	6	cubo
3	5	20	30	12	dodecaedro
4	3	6	12	8	octaedro
5	3	12	30	20	icosaedro

En cada uno de estos casos, la gráfica es completamente determinada por los valores d, k, n, m y f y es isomorfa a una de las gráficas platónicas.

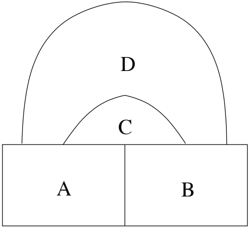
Teorema de los 4 colores

En 1852, Francis Guthrie (1899-1931), observa que las regiones del Reino Unido pueden ser coloradas con 3 colores de tal forma que dos regiones vecinas tengan color diferente. Francis encontró mapas en donde tres colores no son suficientes pero el estima que 4 son siempre suficientes para todo mapa.

Teorema de los 4 colores

En 1852, Francis Guthrie (1899-1931), observa que las regiones del Reino Unido pueden ser coloradas con 3 colores de tal forma que dos regiones vecinas tengan color diferente. Francis encontró mapas en donde tres colores no son suficientes pero el estima que 4 son siempre suficientes para todo mapa.

Ejemplo : Una 4-coloración de las caras de una gráfica plana.



Teorema Toda gráfica plana admite une 6-coloración.

Teorema Toda gráfica plana admite une 6-coloración.

Demostración Inducción sobre el número de vértices n.

- Verificamos para los valores pequeños de n y suponemos el resultado verdadero para todo $n < k$.

- Sea G una gráfica plana con k vértices. Sabemos que G admite un vértice v de grado a lo mas 5. Sea $G' = G \setminus v$, por la inducción, G' admite une 6-coloración. Como $d(v) \leq 5$ entonces los vecinos de v utilizan a lo mas 5 colores diferentes, por lo que podemos colorear v con el color que falta.

Teorema Toda gráfica plana admite une 5-coloración.

Teorema Toda gráfica plana admite une 5-coloración.

Demostración Inducción sobre el número de vértices n.

- Verificamos para los valores pequeños de n y suponemos el resultado verdadero para todo $n < k$.

- Sea G una gráfica plana con k vertices. Sabemos que G admite un vertice v de grado a lo mas 5.

- Si $\underline{d(v) \leq 4}$: sea $G' = G \setminus v$, por la inducción, G' admite une 5-coloración. Como $d(v) \leq 4$ entonces los vecinos de v utilizan a lo mas 4 colores diferentes, por lo que podemos colorear v con el color que falta.

Continuación...

- Si $\underline{d(v) = 5}$: v tiene dos vecinos x y y que no son vecinos (si no los vecinos de v inducirían K_5).

- Sea G' la gráfica obtenida a partir de G suprimiendo las aristas incidentes a v excepto las aristas incidentes a x y y (que las <u>contractamos</u>)

- Por la inducción, G' admite une 5-coloración.

- Entonces, $G \setminus v$ admite una 5-coloración donde x y y tienen el mismo color.

- Entonces, los vecinos de v utilizan a lo mas 4 colores diferentes, por lo que podemos colorear v con el color que falta.

Teorema Toda gráfica plana admite une 4-coloración.

Teorema Toda gráfica plana admite une 4-coloración.

Demostration Muy dificil ! ! !

En 1976, K. Appel y W. Haken dieron una demostración utilizando la computadora de una forma intensa.

Por el momento no se conoce una demostración <u>SIN</u> utilizar la computadora.