El combinaedro

J. L. Ramírez Alfonsín

IMAG, Université de Montpellier

(en colaboración con D. Romero)

Homenaje a David Romero

XXXVI Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de Gráficas,

Combinatoria y sus Aplicaciones

18 de Marzo de 2021

Definición

Sean $s_1, \dots, s_m$, m simbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$.

Definición

Sean $s_1, \ldots, s_m$, m simbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$.

El **Combinaedro** $C(r_1, \ldots, r_m)$ es la gráfica en dónde :

- los vértices son todas las n-tuplas formadas por los simbolos s_i en dónde s_i aparece r_i veces

- dos vértices son adyacentes si las n-tuplas correspondientes se pueden transformar una a la otra **intercambiando 2 entradas adyacentes**.

Definición

Sean $s_1, \ldots, s_m$, m simbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$.

El **Combinaedro** $C(r_1, \ldots, r_m)$ es la gráfica en dónde :

- los vértices son todas las n-tuplas formadas por los simbolos s_i en dónde s_i aparece r_i veces

- dos vértices son adyacentes si las n-tuplas correspondientes se pueden transformar una a la otra **intercambiando 2 entradas adyacentes**.

Ejemplo : $C(2, 2)$ (los simbolos a y b aparecen 2 veces, $n = 4$)

Definición

Sean $s_1, \ldots, s_m$, m simbolos diferentes y

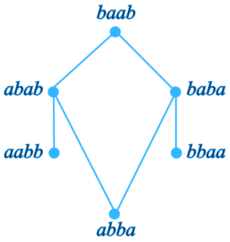
sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^{m} r_i$.

El **Combinaedro** $C(r_1, \ldots, r_m)$ es la gráfica en dónde :

- los vértices son todas las n-tuplas formadas por los simbolos s_i en dónde s_i aparece r_i veces

- dos vértices son adyacentes si las n-tuplas correspondientes se pueden transformar una a la otra **intercambiando 2 entradas adyacentes**.

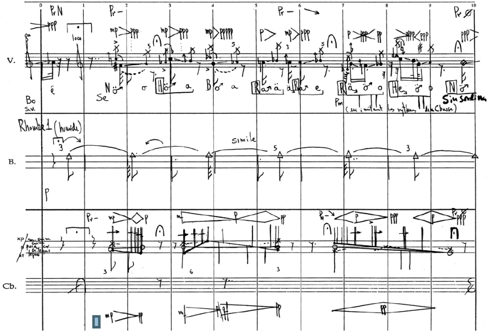
Ejemplo : $C(2,2)$ (los simbolos a y b aparecen 2 veces, $n = 4$)



Motivación Musical

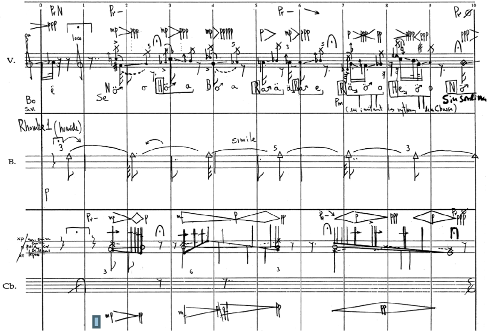
Motivación Musical

El Combinaedro da un marco formal matemático a la **organización interválica** en el ámbito de la teoría de la **composición musical**.



Motivación Musical

El Combinaedro da un marco formal matemático a la **organización interválica** en el ámbito de la teoría de la **composición musical**.



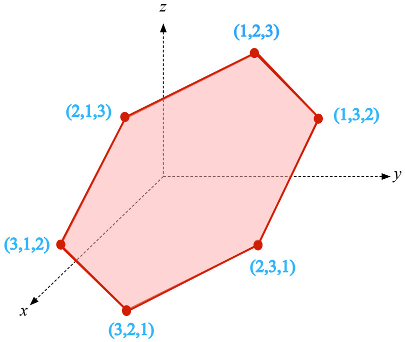
Descubierto por *Julio Estrada* compositor mexicano creador de una original y nueva teoría de la composición llamada **discontinuum-continuum**.

Motivación Geométrica

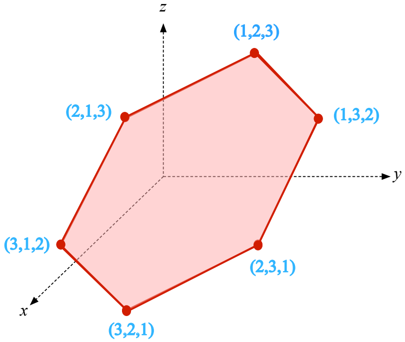
$C(1, \ldots, 1)$ es el *1-esqueleto* del Permutaedro (politopo muy conocido).

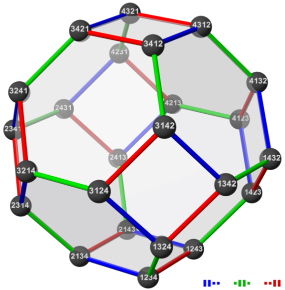
Motivación Geométrica

$C(1,\ldots,1)$ es el *1-esqueleto* del Permutaedro (politopo muy conocido).



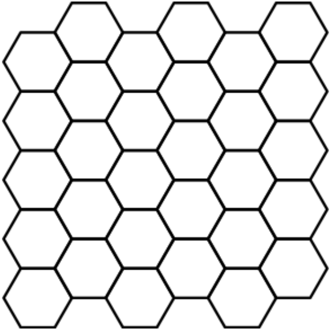
$C(1,\ldots,1)$ es el *1-esqueleto* del Permutaedro (politopo muy conocido).

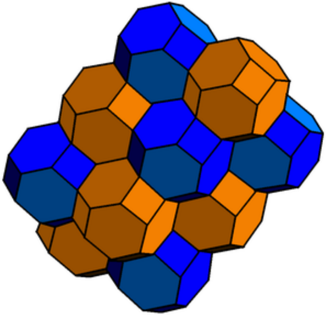




Propriedad

El espacio se puede pavimentar con copias del Permutaedro.





Algunas propiedades combinatoricas

El **diametro** de una gráfica G es $\varphi(G) = \min_{u,v \in V(G)} \{d(u,v)\}$.

Denotemos por $\overline{\delta}(G)$ y $\underline{\delta}(G)$ el grado **maximal** y **minimal** de G.

Algunas propiedades combinatoricas

El **diametro** de una gráfica G es $\varphi(G) = \min_{u,v \in V(G)} \{d(u,v)\}$.

Denotemos por $\overline{\delta}(G)$ y $\underline{\delta}(G)$ el grado **maximal** y **minimal** de G.

Proposición Sea $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$.

- Si $\underline{\delta}(C(R)) = m - 1$ y $\overline{\delta}(C(R)) = \begin{cases} n-1 & \text{si } 2r_1 \leq n, \\ 2(n - r_1) & \text{si no.} \end{cases}$
- $\varphi(C(R)) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} r_i r_j$.

Red cúbica

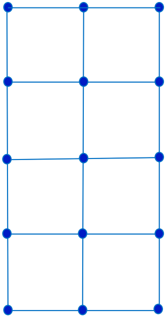
Sean $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{N}$. El trozo cúbico, $[\![a_1, \ldots, a_d]\!]$, es la gráfica dónde

- vertices son $\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq x_i \leq a_i\}$,

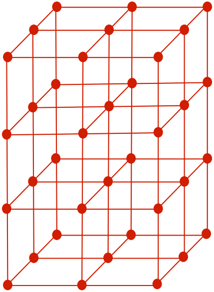
- dos vertices son adyacentes si los puntos correspondientes están a distancia (Euclidiana) 1.

Red cúbica

Sean $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{N}$. El trozo cúbico, $[\![a_1, \ldots, a_d]\!]$, es la gráfica dónde
- vertices son $\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq x_i \leq a_i\}$,
- dos vertices son adyacentes si los puntos correspondientes están a distancia (Euclidiana) 1.



$[\![2, 4]\!]$



$[\![2, 3, 2]\!]$

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en une gráfica G, si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G.

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en une gráfica G, si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G.

Teorema 1 (R.A., Romero 2002) Sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos, $m \geq 2$. Entonces, el combinoedro $C(r_1, \ldots, r_m)$ admite un encaje en el trozo cúbico

$$\llbracket \underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2}_{r_3}, \ldots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m} \rrbracket$$

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en une gráfica G, si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G.

Teorema 1 (R.A., Romero 2002) Sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos, $m \geq 2$. Entonces, el combinoedro $C(r_1, \ldots, r_m)$ admite un encaje en el trozo cúbico

$$[\![\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2}_{r_3}, \ldots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}]\!]$$

$C(r_1, \ldots, r_m)$ puede ser pensado también como un **conjunto parcialmente ordenado y graduado** (llamado retículo mutinomial, $L(r_1, \ldots, r_m)$).

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en une gráfica G, si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G.

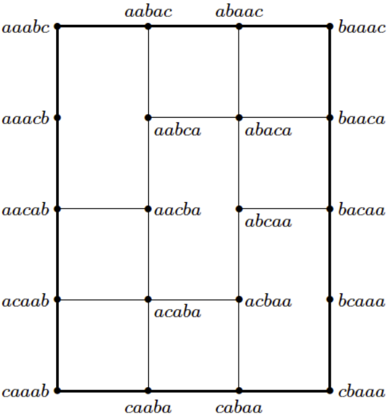
Teorema 1 (R.A., Romero 2002) Sean $r_1 \geq \cdots \geq r_m$ enteros positivos, $m \geq 2$. Entonces, el combinoedro $C(r_1, \ldots, r_m)$ admite un encaje en el trozo cúbico

$$[\![\underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2}_{r_3}, \ldots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}]\!]$$

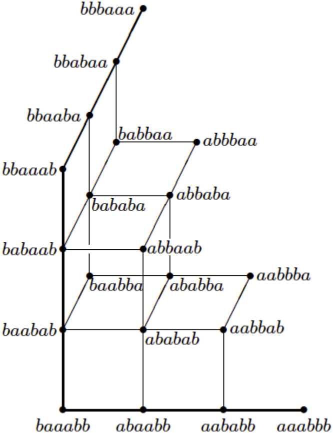
$C(r_1, \ldots, r_m)$ puede ser pensado también como un **conjunto parcialmente ordenado y graduado** (llamado retículo mutinomial, $L(r_1, \ldots, r_m)$).

Corolario El **orden de la dimension** de $L(r_1, \ldots, r_m) \leq \sum_{i=1}^{m-1} r_i$.

Ejemplos

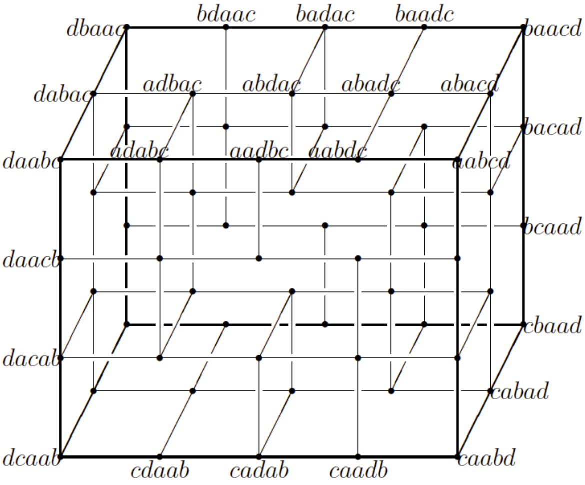


$C(3,1,1)$ **en** $[\![3,4]\!]$



$C(3,3)$ **en** $[\![3,3,3]\!]$

Otro ejemplo

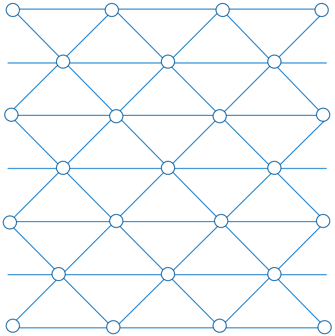


$C(2,1,1,1)$ en $[\![2,3,4]\!]$

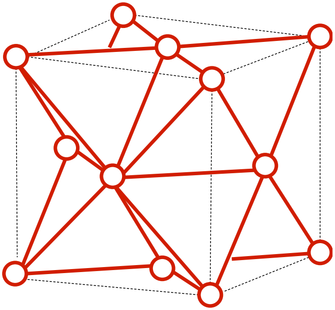
Red hexagonal

Sean $a_1, \ldots, a_d, \gamma \in \mathbb{N}$. El trozo hexagonal, $\langle\langle a_1, \ldots, a_d \rangle\rangle_\gamma$, es la gráfica dónde
- vertices son $\{ (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 + \cdots + x_d = \gamma, 0 \leq x_i \leq a_i \} = \mathsf{A}^d$ y
- dos vertices son adyacentes si los puntos correspondientes están a distancia (Euclidiana) $\sqrt{2}$.

Redes hexagonales $d = 2, 3$



A^2



A^3

Encaje hexagonal

Teorema 2 (R.A., Romero 2002) Sea $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$, $m \geq 2$. Entonces, $C(r_1, \ldots, r_m)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

$$\langle\!\langle \underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2}_{r_3}, \ldots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}, \ \varphi(R) \rangle\!\rangle_{\varphi(R)}$$

Encaje hexagonal

Teorema 2 (R.A., Romero 2002) Sea $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$, $m \geq 2$. Entonces, $C(r_1, \ldots, r_m)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

$$\langle\!\langle \underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2}_{r_3}, \ldots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}, \ \varphi(R) \rangle\!\rangle_{\varphi(R)}$$

Encaje alternativo para $C(r, 1, \ldots, 1)$.

Encaje hexagonal

Teorema 2 (R.A., Romero 2002) Sea $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$, $m \geq 2$. Entonces, $C(r_1, \ldots, r_m)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

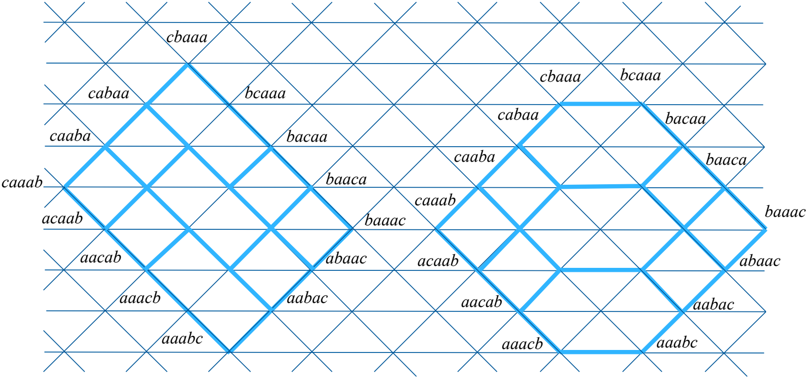
$$\langle\!\langle\, \underbrace{r_1, \ldots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \ldots, r_1 + r_2}_{r_3}, \ldots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m},\ \varphi(R)\,\rangle\!\rangle_{\varphi(R)}$$

Encaje alternativo para $C(r, 1, \ldots, 1)$.

Teorema 3 (R.A., Romero 2002) Sean $r, w \in \mathbb{N}$. Entonces, $C(r, \underbrace{1, \ldots, 1}_{w})$ admite un encaje en el trozo hexagonal

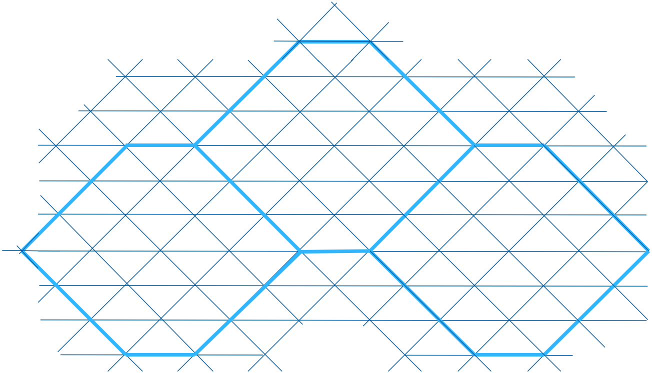
$$\langle\!\langle\, rw, \underbrace{n-1, \ldots, n-1}_{w}\,\rangle\!\rangle_{w(r+n-1)/2}$$

Ejemplos



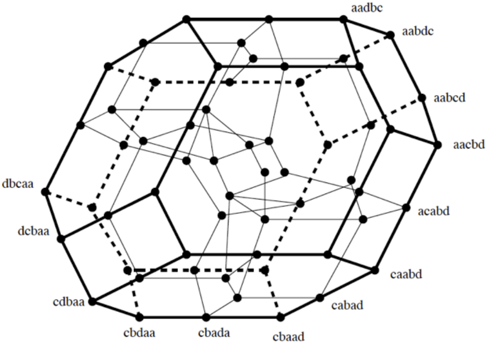
Encaje de $C(3,1,1)$ **en** $\langle\langle 3,4,7\rangle\rangle_7$ **y en** $\langle\langle 6,4,4\rangle\rangle_7$

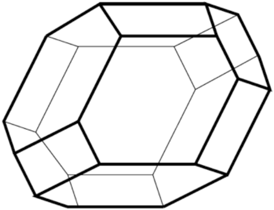
Pavimiento de $C(3, 1, 1)$



Llenando el plano con copias de $C(3, 1, 1)$

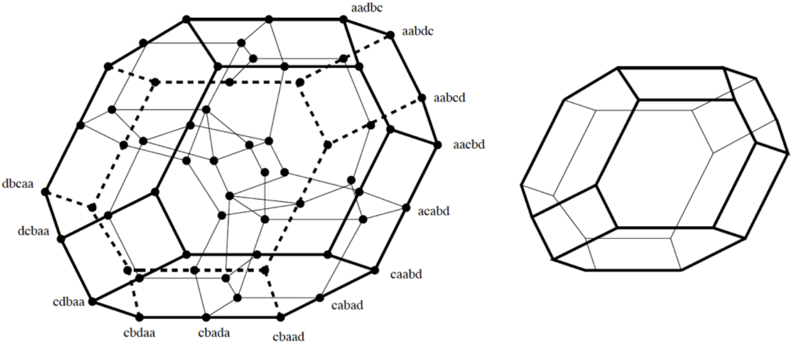
Conjetura





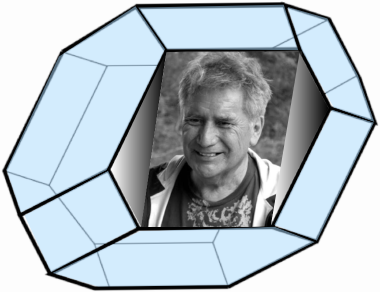
$C(2,1,1,1)$ **en** $\langle\langle 6,4,4,4 \rangle\rangle_9$ **y su envolvente convexa**

Conjetura



$C(2,1,1,1)$ **en** $\langle\langle 6,4,4,4\rangle\rangle_9$ **y su envolvente convexa**

Conjetura (R.A., Romero 2002) La envolvente convexa del encaje de $C(r, \underbrace{1,\ldots,1}_{w})$ (dado en Teorema 3) pavimenta $\mathbb{R}^w$.



Gracias por su atención