

El combinaedro

J. L. Ramírez Alfonsín
IMAG, Université de Montpellier
(en colaboración con D. Romero)

Homenaje a David Romero

XXXVI Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de Gráficas,
Combinatoria y sus Aplicaciones

18 de Marzo de 2021

Definición

Sean s_1, \dots, s_m , m símbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^m r_i$.

Definición

Sean s_1, \dots, s_m , m símbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^m r_i$.

El **Combinaedro** $C(r_1, \dots, r_m)$ es la gráfica en dónde :

- los vértices son todas las n -tuplas formadas por los símbolos s_i en dónde s_i aparece r_i veces
- dos vértices son adyacentes si las n -tuplas correspondientes se pueden transformar una a la otra **intercambiando 2 entradas adyacentes**.

Definición

Sean s_1, \dots, s_m , m símbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^m r_i$.

El **Combinaedro** $C(r_1, \dots, r_m)$ es la gráfica en dónde :

- los vértices son todas las n -tuplas formadas por los símbolos s_i en dónde s_i aparece r_i veces
- dos vértices son adyacentes si las n -tuplas correspondientes se pueden transformar una a la otra **intercambiando 2 entradas adyacentes**.

Ejemplo : $C(2,2)$ (los símbolos a y b aparecen 2 veces, $n = 4$)

Definición

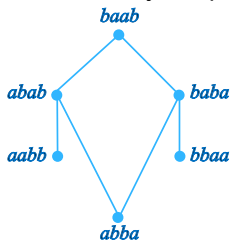
Sean s_1, \dots, s_m , m símbolos diferentes y

sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos con $n = \sum_{i=1}^m r_i$.

El **Combinaedro** $C(r_1, \dots, r_m)$ es la gráfica en dónde :

- los vértices son todas las n -tuplas formadas por los símbolos s_i en dónde s_i aparece r_i veces
- dos vértices son adyacentes si las n -tuplas correspondientes se pueden transformar una a la otra **intercambiando 2 entradas adyacentes**.

Ejemplo : $C(2,2)$ (los símbolos a y b aparecen 2 veces, $n = 4$)



Motivación Musical

Motivación Musical

El Combinaedro da un **marco formal matemático** a la **organización interválica** en el ámbito de la teoría de la **composición musical**.

The image displays a handwritten musical score for three instruments: Violin (V.), Horn (H.), and Cello/Double Bass (Cb.). The score is organized into measures, with various musical notations and annotations. The Violin part features complex rhythmic patterns, including triplets and sixteenth notes, with dynamic markings such as *p*, *pp*, and *ppp*. The Horn part includes slurs and markings like *simile* and *5*. The Cello/Double Bass part shows rhythmic patterns and dynamic markings. The score is annotated with letters like 'P', 'N', and 'A' above the staves, and includes a small blue box with a white symbol at the bottom left. The overall style is that of a composer's working draft.

Motivación Musical

El Combinaedro da un **marco formal matemático** a la **organización interválica** en el ámbito de la teoría de la **composición musical**.

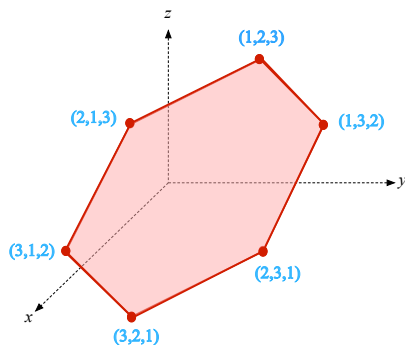
The image shows a handwritten musical score for four staves, labeled V., Ba., Rhythm, and Cb. The notation is highly complex and includes many annotations. The V. staff has notes with various articulation marks and dynamic markings like 'p' and 'f'. The Ba. staff has notes with slurs and dynamic markings. The Rhythm staff has notes with slurs and dynamic markings. The Cb. staff has notes with slurs and dynamic markings. There are also some handwritten notes and symbols scattered throughout the score.

Descubierto por **Julio Estrada** compositor mexicano creador de una original y nueva teoría de la composición llamada **discontinuum-continuum**.

$C(1, \dots, 1)$ es el *1-esqueleto* del **Permutaedro** (politopo muy conocido).

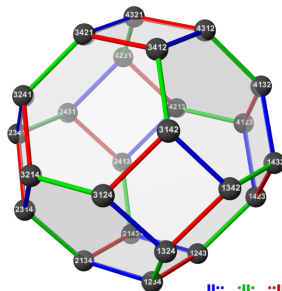
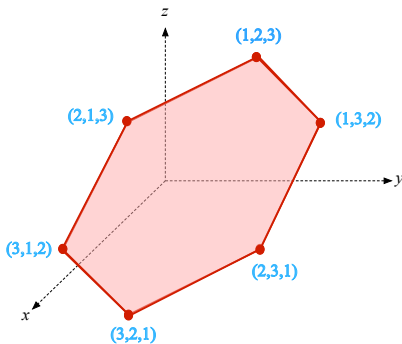
Motivación Geométrica

$C(1, \dots, 1)$ es el *1-esqueleto* del **Permutaedro** (politopo muy conocido).

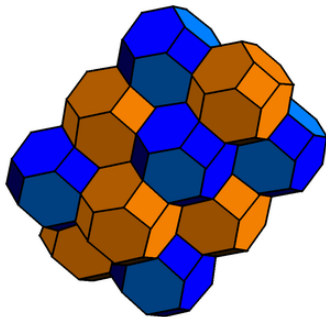
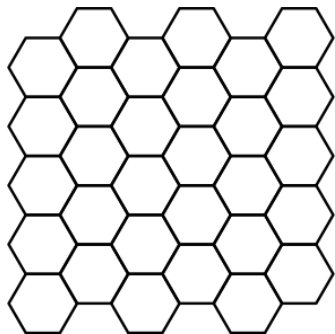


Motivación Geométrica

$C(1, \dots, 1)$ es el *1-esqueleto* del **Permutaedro** (politopo muy conocido).



El espacio se puede pavimentar con copias del **Permutaedro**.



Algunas propiedades combinatoricas

El **diametro** de una gráfica G es $\varphi(G) = \min_{u,v \in V(G)} \{d(u, v)\}$.

Denotemos por $\bar{\delta}(G)$ y $\underline{\delta}(G)$ el grado **maximal** y **minimal** de G .

El **diametro** de una gráfica G es $\varphi(G) = \min_{u,v \in V(G)} \{d(u, v)\}$.

Denotemos por $\bar{\delta}(G)$ y $\underline{\delta}(G)$ el grado **maximal** y **minimal** de G .

Proposición Sea $R = \{r_1, \dots, r_m\}$.

- Si $\underline{\delta}(C(R)) = m - 1$ y $\bar{\delta}(C(R)) = \begin{cases} n - 1 & \text{si } 2r_1 \leq n, \\ 2(n - r_1) & \text{si no.} \end{cases}$
- $\varphi(C(R)) = \sum_{1 \leq i < j \leq m} r_i r_j$.

Red cúbica

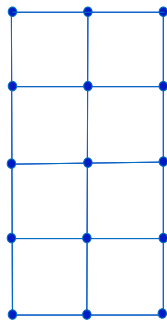
Sean $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}$. El trozo cúbico, $\llbracket a_1, \dots, a_d \rrbracket$, es la gráfica donde

- vertices son $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq x_i \leq a_i\}$,
- dos vertices son adyacentes si los puntos correspondientes están a distancia (Euclidiana) 1.

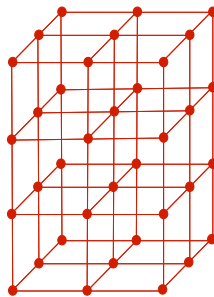
Red cúbica

Sean $a_1, \dots, a_d \in \mathbb{N}$. El trozo cúbico, $[[a_1, \dots, a_d]]$, es la gráfica donde

- vertices son $\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d, 0 \leq x_i \leq a_i\}$,
- dos vertices son adyacentes si los puntos correspondientes están a distancia (Euclidiana) 1.



$[[2, 4]]$



$[[2, 3, 2]]$

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en una gráfica G , si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G .

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en una gráfica G , si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G .

Teorema 1 (R.A., Romero 2002) Sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos, $m \geq 2$. Entonces, el combinoedro $C(r_1, \dots, r_m)$ admite un encaje en el trozo cúbico

$$\left[\underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m} \right]$$

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en una gráfica G , si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G .

Teorema 1 (R.A., Romero 2002) Sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos, $m \geq 2$. Entonces, el combinoedro $C(r_1, \dots, r_m)$ admite un encaje en el trozo cúbico

$$\left[\underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m} \right]$$

$C(r_1, \dots, r_m)$ puede ser pensado también como un **conjunto parcialmente ordenado y graduado** (llamado **retículo mutinomial**, $L(r_1, \dots, r_m)$).

Encaje cúbico

Decimos que una gráfica H es **encajable** en una gráfica G , si H es **isomorfa** a alguna subgráfica de G .

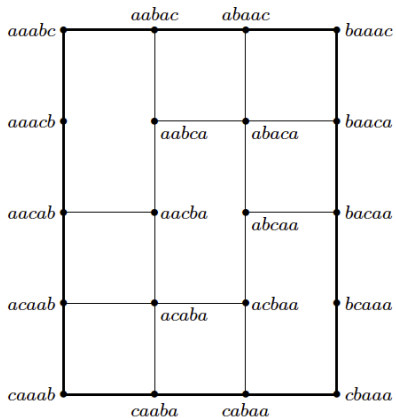
Teorema 1 (R.A., Romero 2002) Sean $r_1 \geq \dots \geq r_m$ enteros positivos, $m \geq 2$. Entonces, el combinoedro $C(r_1, \dots, r_m)$ admite un encaje en el trozo cúbico

$$\left[\underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m} \right]$$

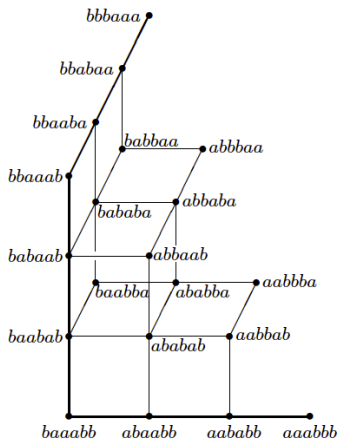
$C(r_1, \dots, r_m)$ puede ser pensado también como un **conjunto parcialmente ordenado y graduado** (llamado **retículo mutinomial**, $L(r_1, \dots, r_m)$).

Corolario El **orden de la dimension** de $L(r_1, \dots, r_m) \leq \sum_{i=1}^{m-1} r_i$.

Ejemplos

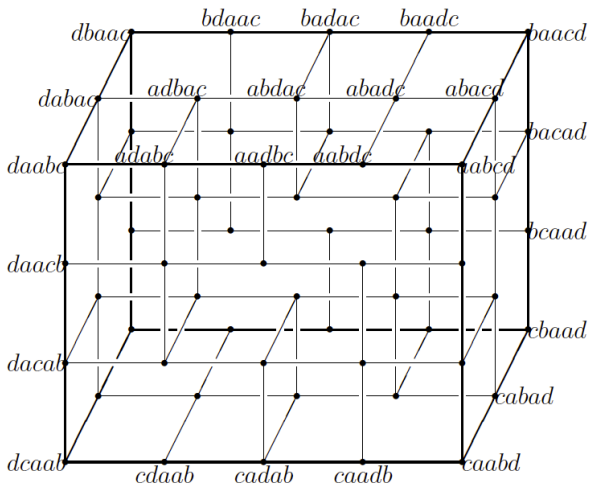


$C(3, 1, 1)$ en $[3, 4]$



$C(3, 3)$ en $[3, 3, 3]$

Otro ejemplo



$C(2, 1, 1, 1)$ en $[[2, 3, 4]]$

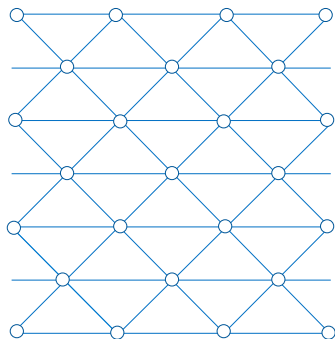
Sean $a_1, \dots, a_d, \gamma \in \mathbb{N}$. El trozo hexagonal, $\langle\langle a_1, \dots, a_d \rangle\rangle_\gamma$, es la gráfica dónde

- vertices son

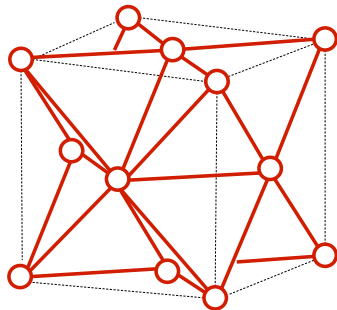
$$\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 + \dots + x_d = \gamma, 0 \leq x_i \leq a_i\} = A^d \text{ y}$$

- dos vertices son adyacentes si los puntos correspondientes están a distancia (Euclidiana) $\sqrt{2}$.

Redes hexagonales $d = 2, 3$



A^2



A^3

Encaje hexagonal

Teorema 2 (R.A., Romero 2002) Sea $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, $m \geq 2$.
Entonces, $C(r_1, \dots, r_m)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

$$\langle\langle \underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}, \varphi(R) \rangle\rangle_{\varphi(R)}$$

Encaje hexagonal

Teorema 2 (R.A., Romero 2002) Sea $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, $m \geq 2$.
Entonces, $C(r_1, \dots, r_m)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

$$\langle\langle \underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}, \varphi(R) \rangle\rangle_{\varphi(R)}$$

Encaje alternativo para $C(r, 1, \dots, 1)$.

Encaje hexagonal

Teorema 2 (R.A., Romero 2002) Sea $R = \{r_1, \dots, r_m\}$, $m \geq 2$. Entonces, $C(r_1, \dots, r_m)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

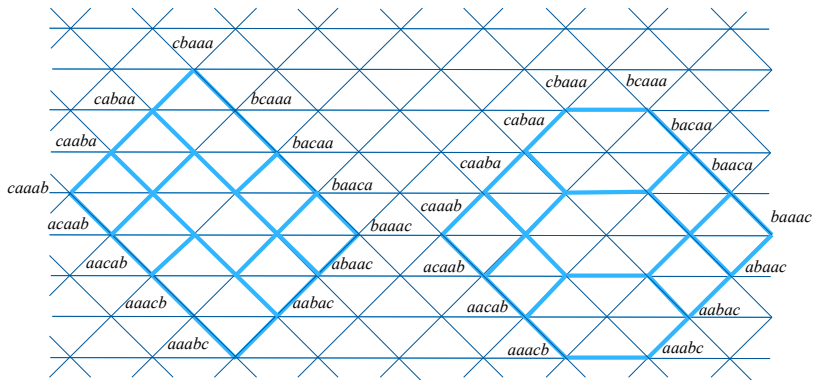
$$\langle\langle \underbrace{r_1, \dots, r_1}_{r_2}, \underbrace{r_1 + r_2, \dots, r_1 + r_2}_{r_3}, \dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{m-1} r_i, \dots, \sum_{i=1}^{m-1} r_i}_{r_m}, \varphi(R) \rangle\rangle_{\varphi(R)}$$

Encaje alternativo para $C(r, 1, \dots, 1)$.

Teorema 3 (R.A., Romero 2002) Sean $r, w \in \mathbb{N}$. Entonces, $C(r, \underbrace{1, \dots, 1}_w)$ admite un encaje en el trozo hexagonal

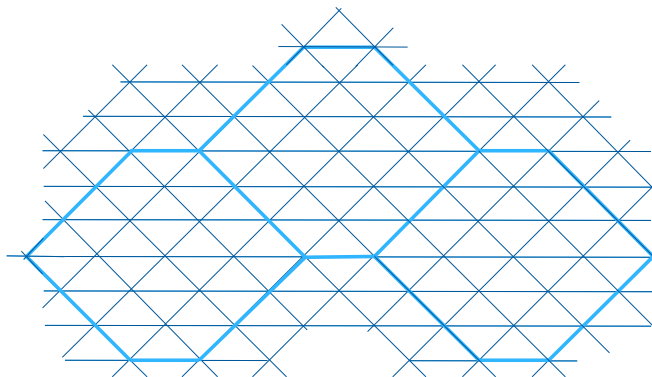
$$\langle\langle r w, \underbrace{n-1, \dots, n-1}_w \rangle\rangle_{w(r+n-1)/2}$$

Ejemplos



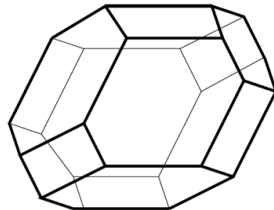
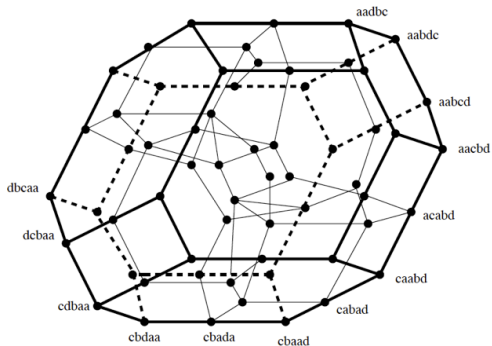
Encaje de $C(3, 1, 1)$ en $\langle\langle 3, 4, 7 \rangle\rangle_7$ y en $\langle\langle 6, 4, 4 \rangle\rangle_7$

Pavimento de $C(3, 1, 1)$



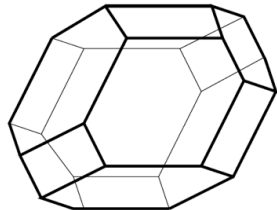
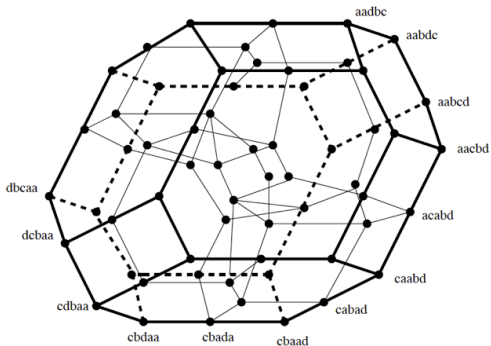
Llenando el plano con copias de $C(3, 1, 1)$

Conjetura



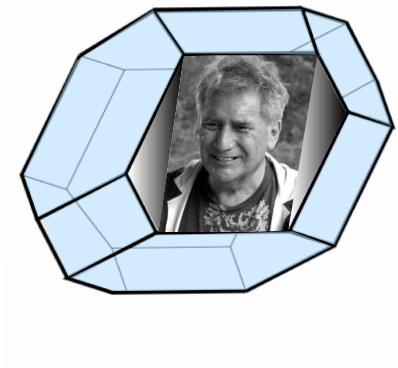
$C(2,1,1,1)$ en $\langle\langle 6,4,4,4 \rangle\rangle_9$ y su envolvente convexa

Conjetura



$C(2, 1, 1, 1)$ en $\langle\langle 6, 4, 4, 4 \rangle\rangle_9$ y su envolvente convexa

Conjetura (R.A., Romero 2002) La envolvente convexa del encaje de $C(r, \underbrace{1, \dots, 1}_w)$ (dado en Teorema 3) pavimenta \mathbb{R}^w .



Gracias por su atención