Les découverts de Michel Las Vergnas orientés vers les matroïdes

J. Ramírez Alfonsín

I3M, Université Montpellier 2

IMJ, Paris 6
Paris, 22 février 2013

Nombre d'entrées dans MathSciNet : 87

Sole auteur : 46

En collaboration : 41 (dont 19 où l'un de coauteurs est un de ses thésards)

B. Acharya	D. Forge
C. Berge	J.-C. Fournier
J.-C. Bermond	E. Gioan
R.G. Bland	A. Guedes de Oliveira
F. Bry	Y. Hamidoune
R.Cordovil	P. Hansen
B. Devadas	A. Mandel
P. Duchet	H. Meyniel
G. Etienne	P. Schuchert

Liés aux graphes : 31

Première article publié sur les graphes : MLV, Une propriété forte de connexité en théorie des graphes *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **266** (1968), A561-A563

Liés aux matroïdes : 56

Première article publié sur les matroïdes : MLV, Sur un théorème de Rado *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **270** (1970), A733-A735

Liés aux graphes : 31

Première article publié sur les graphes : MLV, Une propriété forte de connexité en théorie des graphes *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **266** (1968), A561-A563

Liés aux matroïdes : 56

Première article publié sur les matroïdes : MLV, Sur un théorème de Rado *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, **270** (1970), A733-A735

- Matroïdes
- Matroïdes orientés
- Polynôme de Tutte

Matroïdes

- Dualité
- Les extensions principales
- Les extensions ponctuelles
- Construction de matroïdes
- Matroïdes binaires
- Produit de matroïdes
- Activités d'éléments des bases

Matroïdes

Le mot matroïde apparaît pour la première fois dans un article fondateur publié par H. Whitney en 1935.

La structure de matroïde est introduite comme abstraction ensembliste des relations de dépendence entre les vecteurs colonnes d'une matrice.

Matroïdes

Le mot matroïde apparaît pour la première fois dans un article fondateur publié par H. Whitney en 1935.

La structure de matroïde est introduite comme abstraction ensembliste des relations de dépendence entre les vecteurs colonnes d'une matrice.

• Du point de vue algébrique, les matroïdes ne distinguent dans les relations de dépendances linéaires que deux types de coefficients 0 et $\neq 0$.
• Du point de vue géométrique les matroïdes axiomatisent les relations d'incidence dans les configurations de points : colinéarité, coplanarité, etc.

Matroïdes

Un matroïde M est une paire ordonnée $(E, \mathcal{I})$ où E est un ensemble fini ($E = \{1, \ldots, n\}$) et $\mathcal{I}$ est une famille de sous-ensembles de E qui vérifie les conditions suivantes :

($I1$) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

($I2$) Si $I_1 \in \mathcal{I}$ et $I_2 \subset I_1$ alors $I_2 \in \mathcal{I}$,

($I3$) Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ et $|I_1| < |I_2|$ alors il existe $e \in I_2 \backslash I_1$ tel que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Les membres de $\mathcal{I}$ sont appelés les indépendants de M. Un sous-ensemble de E qui n'est pas dans $\mathcal{I}$ est appelé dépendant. Les indépendants minimaux sont appelés les circuits de M.

Matroïdes : exemples

• Le matroïdes vectoriels : famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sur un corps $\mathbb{F}$ dont les indépendants sont les parties $I \subset \{1, \ldots, n\}$ telles que les vecteurs v_e $e \in I$ soient *linéairement indépendants* sur $\mathbb{F}$.

Matroïdes : exemples

• Le matroïdes vectoriels : famille de vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ sur un corps $\mathbb{F}$ dont les indépendants sont les parties $I \subset \{1, \ldots, n\}$ telles que les vecteurs v_e $e \in I$ soient *linéairement indépendants* sur $\mathbb{F}$.

• Le matroïdes graphiques : ensemble d'arêtes $\{e_1, \ldots, e_n\}$ d'un graphe dont les indépendants sont les parties $I \subset \{e_1, \ldots, e_n\}$ telles que le graphe induit par I ne contient pas de cycle.

Matroïdes : dualité

MLV, Sur la dualité en théorie des matroïdes, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **270** (1970), A804-A806

Etant donné un matroïde M sur un ensemble E le dual M^* de M est le matroïde dont les circuits sont les ensembles X de E tels que $|X \cap C| \neq 1$ pour tout circuit C de M.

Si E est fini alors $M = M^{**}$ mais ceci n'est pas vrai en générale.

Matroïdes : dualité

MLV, Sur la dualité en théorie des matroïdes, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **270** (1970), A804-A806

Etant donné un matroïde M sur un ensemble E le dual M^* de M est le matroïde dont les circuits sont les ensembles X de E tels que $|X \cap C| \neq 1$ pour tout circuit C de M.

Si E est fini alors $M = M^{**}$ mais ceci n'est pas vrai en générale.

Formulation de 3 conditions chacune équivalente à $M = M^{**}$

Matroïdes : binaires

MLV, Fundamental circuits and a characterization of binary matroids, *Disc. Math.*, **31** (1980), 327

Soit B une base (indépendant maximal) de M. Pour $e \in E \setminus B$ soit $C(B, e)$ le circuit fondamental de e par rapport à B.
Si $C = \Delta_{e \in C \setminus B} C(B, e)$ pour tous base B et circuit C alors M est binaire (vectoriel sur $\mathbb{Z}_2$).

Matroïdes : binaires

MLV, Fundamental circuits and a characterization of binary matroids, *Disc. Math.*, **31** (1980), 327

Soit B une base (indépendant maximal) de M. Pour $e \in E \setminus B$ soit $C(B,e)$ le circuit fondamental de e par rapport à B.
Si $C = \Delta_{e \in C \setminus B} C(B,e)$ pour tous base B et circuit C alors M est binaire (vectoriel sur $\mathbb{Z}_2$).

Si pour une base B de M on a $C = \Delta_{e \in C \setminus B} C(B,e)$ pour tout circuit C. Alors, M est binaire.

Matroïdes : produit

MLV, On products of matroids, *Disc. Math.*, **36** (1981), 49-55

Si M et N sont vectoriels sur le même corps, on peut facilement construire un produit de M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ en utilisant le produit tensoriel de matrices.

Matroïdes : produit

MLV, On products of matroids, *Disc. Math.*, **36** (1981), 49-55

Si M et N sont vectoriels sur le même corps, on peut facilement construire un produit de M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ en utilisant le produit tensoriel de matrices.

- Le produit de de deux matroïdes M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ n'existe pas en générale - le produit de *Vamós* avec lui-même est de rang 15 (réponse à une question de Lovász)

Matroïdes : produit

MLV, On products of matroids, *Disc. Math.*, **36** (1981), 49-55

Si M et N sont vectoriels sur le même corps, on peut facilement construire un produit de M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ en utilisant le produit tensoriel de matrices.

- Le produit de de deux matroïdes M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ n'existe pas en générale - le produit de *Vamós* avec lui-même est de rang 15 (réponse à une question de Lovász)

- Il n'existe pas de quasi-produit free-est de deux matroïdes M et N en général (réponse à une question de Mason)

Matroïdes : produit

MLV, On products of matroids, *Disc. Math.*, **36** (1981), 49-55

Si M et N sont vectoriels sur le même corps, on peut facilement construire un produit de M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ en utilisant le produit tensoriel de matrices.

- Le produit de de deux matroïdes M et N avec $r(M) \cdot r(N)$ n'existe pas en générale - le produit de *Vamós* avec lui-même est de rang 15 (réponse à une question de Lovász)

- Il n'existe pas de quasi-produit free-est de deux matroïdes M et N en général (réponse à une question de Mason)

- Introduit un produit canonique de M et N avec $r(M) + r(N) - 1$

Matroïdes Orientés

- Orientabilité
- Signature de bases
- Convexité et applications
- Jeu commutation de Shannon
- Programmation linéaire

Matroïdes orientés

Le matroïde

Matroïdes orientés

Le matroïde • Du point de vue algébrique, les matroïdes orienté

distinguent dans les relations de dépendances linéaires le trois types de coefficients $0 < 0$ et > 0.

• Les matroïdes orientés d'un ensemble de points dans l'espace est un codification combinatoire de les positions relatives entre les points.

Matroïdes orientés

MLV, Matroïdes orientable, *C.R. Acad. Paris Sér. A-B* **280** (1975), A61-A64

Introduit la notion d'orientabilité d'un matrïde (chirotope)

Matroïdes orientés

MLV, Matroïdes orientable, *C.R. Acad. Paris Sér. A-B* **280** (1975), A61-A64

Introduit la notion d'orientabilité d'un matrïde (chirotope)

Bland R.G., MLV, Orientability of matroids, *J. Comb. Th. Ser. B* **24** (1978), 94-123

Matroïdes orientés : Convexité

MLV, Bases in oriented matroids, *J. Comb. Th. Ser. B* **25** (1978), 283-289

Introduit la notion de signature de bases (chirotope)

Matroïdes orientés : Convexité

MLV, Bases in oriented matroids, *J. Comb. Th. Ser. B* **25** (1978), 283-289

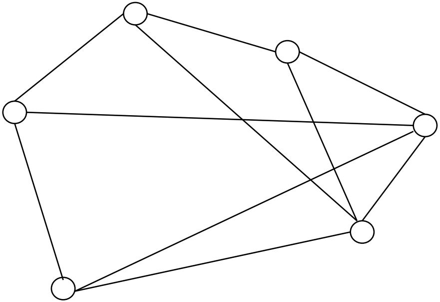
Introduit la notion de signature de bases (chirotope)

MLV, Convexity in oriented matroids, *J. Comb. Th. Ser. B* **29** (1980), 231-243

Notions classiques comme celles de polytopes convexes, faces de polytopes, enveloppe convexe, etc. sont généralisés aux termes de matroïdes orientés.

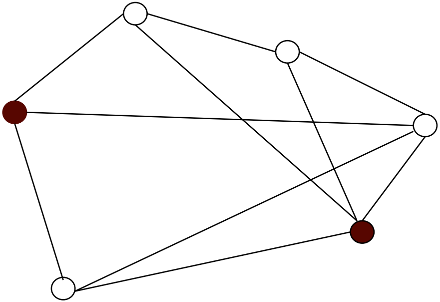
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu de commutation Shannon



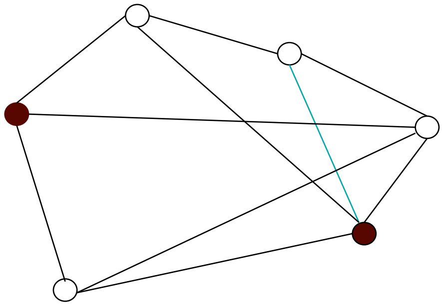
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon



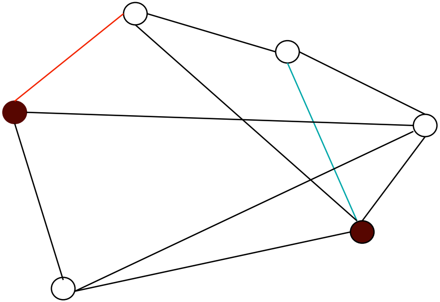
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon



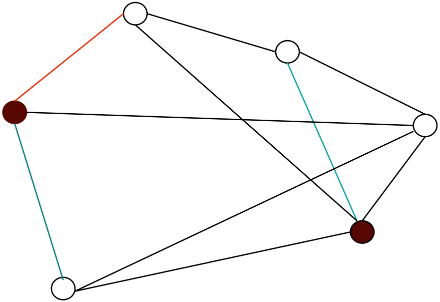
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon



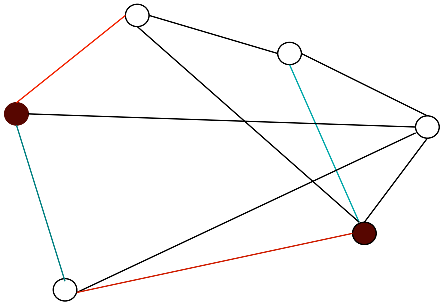
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon



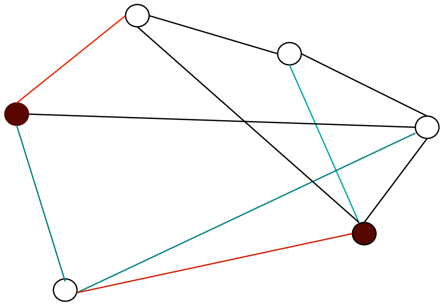
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon



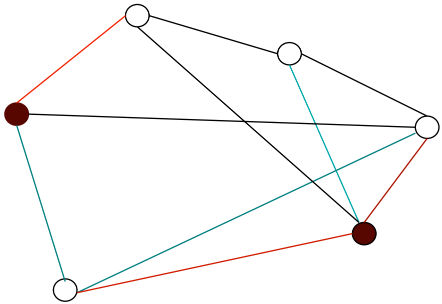
Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon

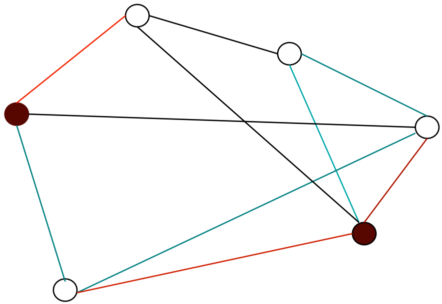


Matroïdes Orientés : jeu de commutation orienté

Jeu commutation Shannon



Jeu commutation Shannon



Matroïdes Orientés

Y. Hamidoune et MLV, DIrected switching games on graphs and matroids, *J. Combin. Th. Sér. B*, **40** (1986), 237-269

Il est connus que si le graphe admet deux arbres générateurs disjoints alors le constructeur a une stratégie gagnante.

Matroïdes Orientés

Y. Hamidoune et MLV, DIrected switching games on graphs and matroids, *J. Combin. Th. Sér. B*, **40** (1986), 237-269

Il est connus que si le graphe admet deux arbres genérateurs disjoints alors le constructeur a une stratégie gagnante.

- Introduit le jeu de commutation pour les matroïdes orientés et de stratégies gagnantes sont données pour les matroïdes graphiques et *cographiques*

Matroïdes Orientés

Y. Hamidoune et MLV, DIrected switching games on graphs and matroids, *J. Combin. Th. Sér. B*, **40** (1986), 237-269

Il est connus que si le graphe admet deux arbres genérateurs disjoints alors le constructeur a une stratégie gagnante.

- Introduit le jeu de commutation pour les matroïdes orientés et de stratégies gagnantes sont données pour les matroïdes graphiques et *cographiques*

Y. Hamidoune et MLV, DIrected switching games II. The Arborescene game, *Disc. Math.*, **165/166** (1997), 395-402

- Introduit le jeu d'arborescence (construction d'une arborescence raciné dans un sommet donné)
- Caractérisation de positiones gagnants.

Polynôme de Tutte

- Polynôme associé aux morphismes de matroïdes (série de papiers)
- Evaluations especiales (orientation acycliques)
- Polynôme en 3 variables

Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte d'un matroïde M est la fonction génératrice définie comme suit :

$$t(M; x, y) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)} (y-1)^{|X|-r(X)}.$$

Ses nombreuses et riches propriétés, dont plusieurs définitions équivalentes, font depuis l'objet d'une littérature abondante et encore d'actualité.

Polynôme de Tutte

MLV, Extensions normales d'un matroïdes, polynôme de Tutte d'un morphisme, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **280** (1975), A1479-A1482

Soit M et M' deux matroïdes sur E liés par un bijection. Cette bijection est une application forte de M en M' si tout circuit de M est l'union de circuits de M'. La pair (M, M') constitute une perspective.

$$t(M, M'; x, y, z) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(M') - r_{M'}(X)} (y-1)^{|X| - r_M(X)} z^{r(M) - r(M') - (r_M(X) - r_{M'}(X))}$$

Polynôme de Tutte

MLV, Extensions normales d'un matroïdes, polynôme de Tutte d'un morphisme, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **280** (1975), A1479-A1482

Soit M et M' deux matroïdes sur E liés par un bijection. Cette bijection est une application forte de M en M' si tout circuit de M est l'union de circuits de M'. La pair (M, M') constitute une perspective.

$$t(M, M'; x, y, z) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(M')-r_{M'}(X)}(y-1)^{|X|-r_M(X)} z^{r(M)-r(M')-(r_M(X)-r_{M'}(X))}$$

Si $M = M'$ alors $t(M, M'; x, y, z) = t(M; x, y)$.

Polynôme de Tutte

MLV, The Tutte polynomial of a morphisme of matroïdes. I. Set-pointed matroids and matroids perpectives *Ann. Inst. Fourier*, **49** (1999), 973-1015

Un polynôme de Tutte de M par A, $A \subset E$, noté $t(M, A; x, y, z)$, est définie, et il est démontré que

Polynôme de Tutte

MLV, The Tutte polynomial of a morphisme of matroïdes. I. Set-pointed matroids and matroids perpectives *Ann. Inst. Fourier*, **49** (1999), 973-1015

Un polynôme de Tutte de M par A, $A \subset E$, noté $t(M, A; x, y, z)$, est définie, et il est démontré que

$$t(M, M'; x, y, z) = z^{-(r(N)-r(M))} t(N; F \setminus E; x, y, z)$$

où N est un matroïde sur F avec $E \subset F$ mayorant de (M, M').

Polynôme de Tutte

MLV, Eulerian circuits of 4-valent graphs imbedded in surfaces *Algebraic Methods in Graph Theory*, North-Holland (1981), 451-478

Lien entre $t(M(G); x, y, z)$ et les marches eulerienes et les décompositions en cycles d'un graphe 4-régulier plongé dans le plan projectif ou le tore.

Polynôme de Tutte

MLV, Eulerian circuits of 4-valent graphs imbedded in surfaces *Algebraic Methods in Graph Theory*, North-Holland (1981), 451-478

Lien entre $t(M(G); x, y, z)$ et les marches eulerienes et les décompositions en cycles d'un graphe 4-régulier plongé dans le plan projectif ou le tore.

MLV, On the Tutte polynomial of a morphism of matroid *Annals Disc. Math.*, **8** (1980), 7-20

Polynôme de Tutte associé aux perspectives contient comme cas particulier le *polynôme de Martin* associé aux q-matroïdes.

Polynôme de Tutte

G. Etienne, MLV, The Tutte polynomial of a morphism of matroids, III Vectorial matroids, *Adv. App. Math.*, **32** (2004), 198-211

Unification et généralisation de nombraux résultats classiques concernant le polynôme de Tutte pour les matroïdes vectoriels, en termes du polynôme de Tutte en 3 variables.

Polynôme de Tutte

G. Etienne, MLV, The Tutte polynomial of a morphism of matroids, III Vectorial matroids, *Adv. App. Math.*, **32** (2004), 198-211

Unification et généralisation de nombraux résultats classiques concernant le polynôme de Tutte pour les matroïdes vectoriels, en termes du polynôme de Tutte en 3 variables.

MLV, The Tutte polynomial of a morphism of matroïdes. II. Activities of orientations *Progress in Graph Theory*, Academic Press, Toronto (1984), 367-380

Formulation du polynôme de Tutte d'un matroïde orienté en termes des activités d'éléments.

Polynôme de Tutte

MLV, Acyclic and totally cyclic orientations of combinatorial geometries *Disc. Math*, **8** (1977), 7-20

Si M et M' sont de matroïdes orientés sur E et (M, M') une perpsective alors $t(M, M'; 0, 0, 1)$ compte le nombre de sous-ensemble A de E tel que $-_A M$ est acylique et $-_A M'$ est totalement cyclique.

Généralisant plusieurs résultats :

- Orientations acyclique sde graphes
- Orientations de matroïdes réguliers
- Régions (bornés) d'arrangement d'hyperplans
- Non partion de Radon d'espace réels
- Reorientations acyclique de matroïdes orientés
- Généralise l'invariant β de Crapo.

MERCI