Matroïdes et matroïdes orientés : II

J. Ramírez Alfonsín

I3M, Université Montpellier 2

École Jeunes Chercheurs en Informatique Mathématique,

Perpignan, 11 avril 2013

Dualité

Soit M un matroïde sur un ensemble E et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de M. Alors,

$$\mathcal{B}^* = \{E \backslash B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

est l'ensemble des bases d'un matroïde sur E.

Dualité

Soit M un matroïde sur un ensemble E et $\mathcal{B}$ l'ensemble des bases de M. Alors,

$$\mathcal{B}^* = \{E \backslash B \mid B \in \mathcal{B}\}$$

est l'ensemble des bases d'un matroïde sur E.

Le matroïde sur E ayant $\mathcal{B}^*$ pour ensemble de bases, noté M^*, est appelé le dual de M.

Une base de M^* est également appelée une cobase de M.

Dualité

On a que

- $r(M^*) = |E| - r_M$ et $M^{**} = M$.

Dualité

On a que

- $r(M^*) = |E| - r_M$ et $M^{**} = M$.
- L'ensemble $\mathcal{I}^*$ des indépendants de M^* est donné par

$$\mathcal{I}^* = \{X \mid X \subset E \text{ tel qu'il existe } B \in \mathcal{B} \text{ avec } X \cap B = \emptyset\}.$$

Dualité

On a que

- $r(M^*) = |E| - r_M$ et $M^{**} = M$.
- L'ensemble $\mathcal{I}^*$ des indépendants de M^* est donné par

$$\mathcal{I}^* = \{X \mid X \subset E \text{ tel qu'il existe } B \in \mathcal{B} \text{ avec } X \cap B = \emptyset\}.$$

- La fonction rang de M^* est donnée par

$$r_{M^*}(X) = |X| + r_M(E \backslash X) - r_M,$$

pour $X \subset E$.

Matroïde de cocycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un cocycle (ou coupe) de G est un ensemble d'arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Un cocycle est élémentaire si et seulement s'il est minimal pour l'inclusion.

Matroïde de cocycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un cocycle (ou coupe) de G est un ensemble d'arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Un cocycle est élémentaire si et seulement s'il est minimal pour l'inclusion.

Théorème Si $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de cocycles élémentaires d'un graphe G alors $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de circuit d'un matroïde sur E.

Matroïde de cocycles

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un cocycle (ou coupe) de G est un ensemble d'arêtes joignant les deux parties d'une partition de l'ensemble des sommets du graphe. Un cocycle est élémentaire si et seulement s'il est minimal pour l'inclusion.

Théorème Si $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de cocycles élémentaires d'un graphe G alors $\mathcal{C}(G)^*$ est l'ensemble de circuit d'un matroïde sur E.

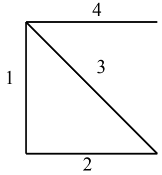
Le matroïde ainsi obtenu est appelé matroïde de cocycle de G, noté $B(G)$ (anglais *bond*).

Matroïde de cocycles

Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.

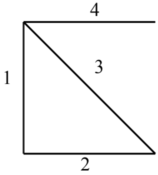
Matroïde de cocycles

Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.



Matroïde de cocycles

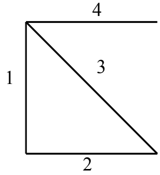
Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.



$\mathcal{B}(M(G)) = \{\{4,1,3\},\{4,1,2\},\{4,2,3\}\}$

Matroïde de cocycles

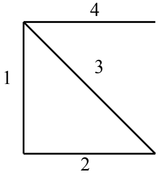
Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.



$\mathcal{B}(M(G)) = \{\{4,1,3\},\{4,1,2\},\{4,2,3\}\}$
$\mathcal{B}(M^*(G)) = \{\{2\},\{3\},\{1\}\}$

Matroïde de cocycles

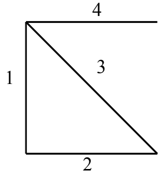
Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.



$\mathcal{B}(M(G)) = \{\{4,1,3\},\{4,1,2\},\{4,2,3\}\}$
$\mathcal{B}(M^*(G)) = \{\{2\},\{3\},\{1\}\}$
$\mathcal{I}(M^*(G)) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\}$

Matroïde de cocycles

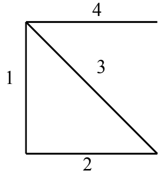
Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.



$\mathcal{B}(M(G)) = \{\{4,1,3\},\{4,1,2\},\{4,2,3\}\}$
$\mathcal{B}(M^*(G)) = \{\{2\},\{3\},\{1\}\}$
$\mathcal{I}(M^*(G)) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\}$
Les dépendants de $M^*(G)$ sont $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \setminus \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\}$

Matroïde de cocycles

Théorème $M^*(G) = B(G)$ et $M(G) = B^*(G)$.



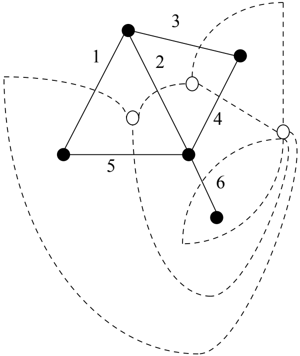
$\mathcal{B}(M(G)) = \{\{4,1,3\},\{4,1,2\},\{4,2,3\}\}$
$\mathcal{B}(M^*(G)) = \{\{2\},\{3\},\{1\}\}$
$\mathcal{I}(M^*(G)) = \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\}$
Les dépendants de $M^*(G)$ sont $\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}) \setminus \{\emptyset,\{1\},\{2\},\{3\}\}$
$\mathcal{C}(M^*(G)) = \{\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ qui sont précisément les cocycles de G.

Planarité

Théorème Si G est planaire alors $M^*(G) = M(G^*)$.

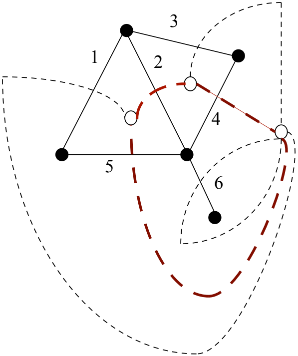
Planarité

Théorème Si G est planaire alors $M^*(G) = M(G^*)$.



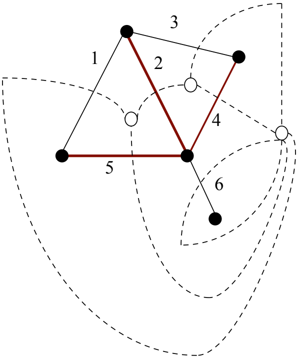
Planarité

Théorème Si G est planaire alors $M^*(G) = M(G^*)$.



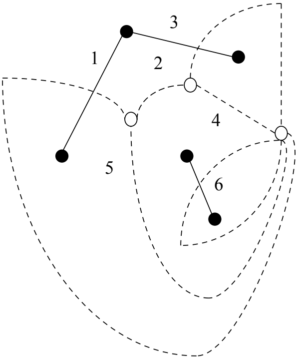
Planarité

Théorème Si G est planaire alors $M^*(G) = M(G^*)$.



Planarité

Théorème Si G est planaire alors $M^*(G) = M(G^*)$.



Dualité matroïde vectoriel

Soit M le matroïde défini par les vecteurs colonnes d'une matrice $(I_r \mid A)$ de taille $r \times n$, où I_r est l'identité $r \times r$ (ses colonnes sont une base quelconque dans E) et A une matrice $r \times (n-r)$.

Dualité matroïde vectoriel

Soit M le matroïde défini par les vecteurs colonnes d'une matrice $(I_r \mid A)$ de taille $r \times n$, où I_r est l'identité $r \times r$ (ses colonnes sont une base quelconque dans E) et A une matrice $r \times (n-r)$.

Alors le matroïde dual M^* est défini par les vecteurs colonnes de la matrice $(-{}^tA \mid I_{n-r})$ avec I_{n-r} l'identité $(n-r) \times (n-r)$ et ${}^tA$ la transposé de A.

Dualité matroïde vectoriel

M^* est également appelé le matroïde orthogonal de M car la dualité pour les matroïdes vectoriels est une généralisation de la notion de orthogonalité dans les espaces vectoriels.

Dualité matroïde vectoriel

M^* est également appelé le matroïde orthogonal de M car la dualité pour les matroïdes vectoriels est une généralisation de la notion de orthogonalité dans les espaces vectoriels.

Soit V un sous-espace de $\mathbb{F}^E$. On rappelle que l'espace orthogonal $V^\perp$ est défini à partir du produit scalaire canonique $\langle u, v \rangle = \sum_{e \in E} u(e)v(e)$ par

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{F}^E \mid \langle u, v \rangle = 0 \text{ pour tout } u \in V\}.$$

Dualité matroïde vectoriel

M^* est également appelé le matroïde orthogonal de M car la dualité pour les matroïdes vectoriels est une généralisation de la notion de orthogonalité dans les espaces vectoriels.

Soit V un sous-espace de $\mathbb{F}^E$. On rappelle que l'espace orthogonal $V^\perp$ est défini à partir du produit scalaire canonique $\langle u, v\rangle = \sum_{e \in E} u(e)v(e)$ par

$$V^\perp = \{v \in \mathbb{F}^E \mid \langle u, v\rangle = 0 \text{ pour tout } u \in V\}.$$

On a que l'espace orthogonal de l'espace engendré par les vecteurs colonnes de $(I \mid A)$ est donné par l'espace engendré par les vecteurs colonnes de $(-{}^tA \mid I_{n-r})$.

Mineurs

Soit M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors, l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \backslash A$ est

$$\{X \subset E \backslash A \mid X \text{ est un indépendant de } M\}.$$

Mineurs

Soit M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors, l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \backslash A$ est

$$\{X \subset E \backslash A \mid X \text{ est un indépendant de } M\}.$$

Le matroïde ainsi défini est dit obtenu à partir de M en supprimant les éléments de A. On le désigne par $M \backslash A$.

Mineurs

Soit M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors, l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \backslash A$ est

$$\{X \subset E \backslash A \mid X \text{ est un indépendant de } M\}.$$

Le matroïde ainsi défini est dit obtenu à partir de M en supprimant les éléments de A. On le désigne par $M \backslash A$.

Le matroïde défini par $(M^* \setminus A)^*$ est dit obtenu à partir de M en contractant les éléments de A. On le désigne par M/A.

Mineurs

Soit M un matroïde sur un ensemble E et $A \subset E$. Alors, l'ensemble des indépendants d'un matroïde sur $E \backslash A$ est

$$\{X \subset E \backslash A \mid X \text{ est un indépendant de } M\}.$$

Le matroïde ainsi défini est dit obtenu à partir de M en supprimant les éléments de A. On le désigne par $M \backslash A$.

Le matroïde défini par $(M^* \setminus A)^*$ est dit obtenu à partir de M en contractant les éléments de A. On le désigne par M/A.

Les opérations de suppression et de contraction sont duales, c'est-à-dire,

$$(M \backslash A)^* = (M^*)/A \text{ et } (M/A)^* = (M^*) \backslash A.$$

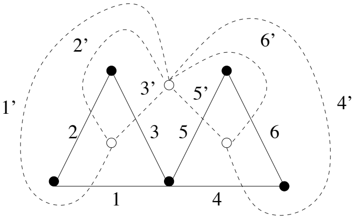
Mineurs graphique

Un mineur d'un matroïde M est tout matroïde obtenu à partir de M par une suite quelconque de suppressions et de contractions.

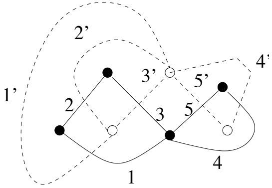
Mineurs graphique

Un mineur d'un matroïde M est tout matroïde obtenu à partir de M par une suite quelconque de suppressions et de contractions.

Un graphe planaire, son dual et les opérations duales de suppression et contraction de l'arête 6.



(a)



(b)

Mineurs exclus

Remarque La propriété d'être vectoriel sur un corps $\mathbb{F}$ se conserve pour les mineurs.

Mineurs exclus

Remarque La propriété d'être vectoriel sur un corps $\mathbb{F}$ se conserve pour les mineurs.

Pour tout corps $\mathbb{F}$ il existe une liste de mineurs exclus, autrement dit, de matroïdes non vectoriels sur $\mathbb{F}$ mais dont tout mineur propre est vectoriel sur $\mathbb{F}$.

Mineurs exclus

Remarque La propriété d'être vectoriel sur un corps $\mathbb{F}$ se conserve pour les mineurs.

Pour tout corps $\mathbb{F}$ il existe une liste de mineurs exclus, autrement dit, de matroïdes non vectoriels sur $\mathbb{F}$ mais dont tout mineur propre est vectoriel sur $\mathbb{F}$.

La détermination de la liste des mineurs exclus pour $\mathbb{F}$ constitue une caractérisation des matroïdes vectoriels sur $\mathbb{F}$.

Mineurs exclus

Remarque La propriété d'être vectoriel sur un corps $\mathbb{F}$ se conserve pour les mineurs.

Pour tout corps $\mathbb{F}$ il existe une liste de mineurs exclus, autrement dit, de matroïdes non vectoriels sur $\mathbb{F}$ mais dont tout mineur propre est vectoriel sur $\mathbb{F}$.

La détermination de la liste des mineurs exclus pour $\mathbb{F}$ constitue une caractérisation des matroïdes vectoriels sur $\mathbb{F}$.

Pour $\mathbb{F} = GF(2) = \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$: la liste se réduit au seul matroïde $U_{2,4}$, un matroïde de rang 2 à 4 éléments où

$$\mathcal{B}(U_{2,4}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$$

Matroïdes réguliers et non vectoriels

Un matroïde représentable sur tout corps $\mathbb{F}$ est dit régulier.

Matroïdes réguliers et non vectoriels

Un matroïde représentable sur tout corps $\mathbb{F}$ est dit régulier.

Remarque (a) Les matroïdes graphiques sont réguliers.

Matroïdes réguliers et non vectoriels

Un matroïde représentable sur tout corps $\mathbb{F}$ est dit régulier.

Remarque (a) Les matroïdes graphiques sont réguliers.

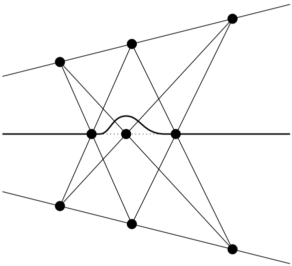
(b) Il existe des matroïdes non vectoriels (i.e. sur aucun corps).

Matroïdes réguliers et non vectoriels

Un matroïde représentable sur tout corps $\mathbb{F}$ est dit régulier.

Remarque (a) Les matroïdes graphiques sont réguliers.

(b) Il existe des matroïdes non vectoriels (i.e. sur aucun corps).
Exemple (classique) : le matroïdes de rang 3 obtenu à partir de la configuration de Non-Pappus.



Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte d'un matroïde M est la série génératrice définie comme suit

$$t(M;x,y) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)}(y-1)^{|X|-r(X)}.$$

Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte d'un matroïde M est la série génératrice définie comme suit

$$t(M;x,y) = \sum_{X \subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)}(y-1)^{|X|-r(X)}.$$

Soit $U_{2,3}$ le matroïde de rang 2 à 3 éléments avec
$\mathcal{B}(U_{2,3}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

Polynôme de Tutte

Le polynôme de Tutte d'un matroïde M est la série génératrice définie comme suit

$$t(M;x,y) = \sum_{X\subseteq E} (x-1)^{r(E)-r(X)}(y-1)^{|X|-r(X)}.$$

Soit $U_{2,3}$ le matroïde de rang 2 à 3 éléments avec $\mathcal{B}(U_{2,3}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$

$$\begin{aligned}
t(U_{2,3};x,y) &= \sum_{X\subseteq E,\ |X|=0} (x-1)^{2-0}(y-1)^{0-0} + \sum_{X\subseteq E,\ |X|=1} (x-1)^{2-1}(y-1)^{1-1} \\
&+ \sum_{X\subseteq E,\ |X|=2} (x-1)^{2-2}(y-1)^{2-2} + \sum_{X\subseteq E,\ |X|=3} (x-1)^{2-2}(y-1)^{3-2} \\
&= (x-1)^2 + 3(x-1) + 3(1) + y - 1 \\
&= x^2 - 2x + 1 + 3x - 3 + 3 + y - 1 = x^2 + x + y.
\end{aligned}$$

Polynôme de Tutte

Une boucle d'un matroïde M est un circuit de cardinal un et un isthme de M est un élément qui est dans toutes les bases de M.

Polynôme de Tutte

Une boucle d'un matroïde M est un circuit de cardinal un et un isthme de M est un élément qui est dans toutes les bases de M.

Le polynôme de Tutte peut-être exprimé récursivement comme suit

$$t(M;x,y)=\begin{cases} t(M\setminus e;x,y)+t(M/e;x,y) & \text{si } e\neq \text{isthme, boucle,}\\ xt(M\setminus e;x,y) & \text{si } e \text{ est un isthme,}\\ yt(M/e;x,y) & \text{si } e \text{ est une boucle.}\end{cases}$$

Orientations acycliques

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Une orientation de G est une orientation des arêtes de G.

On dit qu'une orientation est acyclique si le graphe orienté n'a pas de cycle orienté (i.e., pas de cycle dont les orientations des arêtes sont conformes à un sens de parcours du cycle).

Orientations acycliques

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Une orientation de G est une orientation des arêtes de G.

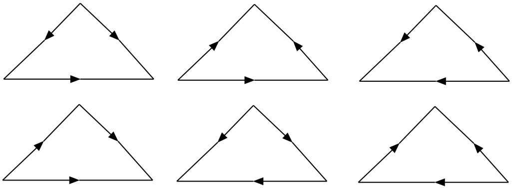
On dit qu'une orientation est acyclique si le graphe orienté n'a pas de cycle orienté (i.e., pas de cycle dont les orientations des arêtes sont conformes à un sens de parcours du cycle).

Théorème Le nombre d'orientations acycliques de G est égal à

$$t(M(G); 2, 0).$$

Orientations acycliques

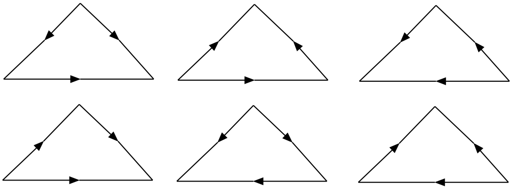
Exemple : Il y a 6 orientations acyclique de C_3



Remarquons que $M(C_3)$ est isomorphe à $U_{2,3}$.

Orientations acycliques

Exemple : Il y a 6 orientations acyclique de C_3

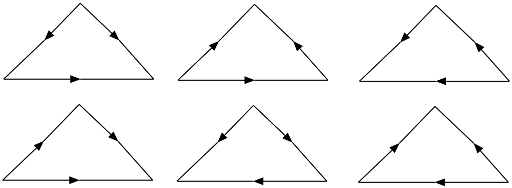


Remarquons que $M(C_3)$ est isomorphe à $U_{2,3}$.

On sait que $t(U_{2,3}; x, y) = x^2 + x + y$.

Orientations acycliques

Exemple : Il y a 6 orientations acyclique de C_3



Remarquons que $M(C_3)$ est isomorphe à $U_{2,3}$.

On sait que $t(U_{2,3}; x, y) = x^2 + x + y$.

Donc, le nombre d'orientation acycliques de C_3 est $t(U_{2,3}; 2, 0) = 2^2 + 2 + 0 = 6$.

Polynôme chromatique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et λ un entier positif.

Polynôme chromatique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et λ un entier positif.
Une λ-coloration de G est une application $\phi : V \longrightarrow \{1, \ldots, \lambda\}$.

Polynôme chromatique

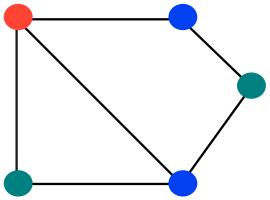
Soit $G = (V, E)$ un graphe et λ un entier positif.
Une λ-coloration de G est une application $\phi : V \longrightarrow \{1, \ldots, \lambda\}$.

La coloration est dite propre si pour toute arête $\{u, v\} \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$.

Polynôme chromatique

Soit $G = (V, E)$ un graphe et λ un entier positif.
Une λ-coloration de G est une application $\phi : V \longrightarrow \{1, \ldots, \lambda\}$.

La coloration est dite propre si pour toute arête $\{u, v\} \in E(G)$, $\phi(u) \neq \phi(v)$.



Polynôme chromatique

Soit $\chi(G, \lambda)$ le nombre de λ-colorations propres de G.

Polynôme chromatique

Soit $\chi(G, \lambda)$ le nombre de λ-colorations propres de G.

Exemples : $\chi(K_n, \lambda) = \lambda!$, $\quad \chi(T_n, \lambda) = \lambda \cdot \lambda^{n-1}$.

Polynôme chromatique

Soit $\chi(G,\lambda)$ le nombre de λ-colorations propres de G.

Exemples : $\chi(K_n,\lambda) = \lambda!$, $\quad \chi(T_n,\lambda) = \lambda \cdot \lambda^{n-1}$.

Théorème $\chi(G,\lambda) = \sum_{X \subseteq E} (-1)^{|X|} \lambda^{\omega(G[X])}$

où $\omega(G[X])$ désigne le nombre de composantes connexes du sous-graphe engendré par X.

Démonstration (idée) En utilisant le principe d'inclusion-exclusion.

Polynôme chromatique

Le polynôme chromatique a été introduit par Birkhoff comme un outil pour attaquer le problème de quatre couleurs.

En effet, si pour un graphe planaire G on a $\chi(G,4) > 0$ alors G admet bien une 4-coloration.

Polynôme chromatique

Le polynôme chromatique a été introduit par Birkhoff comme un outil pour attaquer le problème de quatre couleurs.

En effet, si pour un graphe planaire G on a $\chi(G,4) > 0$ alors G admet bien une 4-coloration.

Théorème Soit G est un graphe avec $\omega(G)$ composantes connexes. Alors,

$$\chi(G,\lambda) = \lambda^{\omega(G)}(-1)^{|V(G)|-\omega(G)}t(M(G);1-\lambda,0).$$

Polynôme chromatique

Le polynôme chromatique a été introduit par Birkhoff comme un outil pour attaquer le problème de quatre couleurs.

En effet, si pour un graphe planaire G on a $\chi(G,4)>0$ alors G admet bien une 4-coloration.

Théorème Soit G est un graphe avec $\omega(G)$ composantes connexes. Alors,

$$\chi(G,\lambda)=\lambda^{\omega(G)}(-1)^{|V(G)|-\omega(G)}t(M(G);1-\lambda,0).$$

$$\begin{aligned}\chi(K_3,3)&=3^1(-1)^{3-1}t(K_3;1-3,0)\\&=3\cdot 1\cdot t(U_{2,3};-2,0)=3((-2)^2-2+0)=6.\end{aligned}$$

Polynôme d'Ehrhart

La théorie d'Ehrhart s'intéresse à compter le nombre de points à coordonnées entieres dans un polytope.

Polynôme d'Ehrhart

La théorie d'Ehrhart s'intéresse à compter le nombre de points à coordonnées entieres dans un polytope.
Un polytope est dit entier si tous ses sommets ont de coordonnées entieres.
Ehrhart a étudié la fonction i_P qui compte le nombre de points entiers dans le polytope P dilaté d'un facteur t

$$i_P : \quad \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ t \mapsto \left|tP \cap \mathbb{Z}^d\right| \end{array}$$

Polynôme d'Ehrhart

Théorème (Ehrhart) La fonction i_P est un polynôme en t de degré d,

$$i_P(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

Polynôme d'Ehrhart

Théorème (Ehrhart) La fonction i_P est un polynôme en t de degré d,

$$i_P(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

- c_d est égal au $Vol(P)$ (le volume du P),

Polynôme d'Ehrhart

Théorème (Ehrhart) La fonction i_P est un polynôme en t de degré d,

$$i_P(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

- c_d est égal au $Vol(P)$ (le volume du P),
- c_{d-1} est égal au $Vol(\partial(P)/2)$ où $\partial(P)$ est la surface de P,

Polynôme d'Ehrhart

Théorème (Ehrhart) La fonction i_P est un polynôme en t de degré d,

$$i_P(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

- c_d est égal au $Vol(P)$ (le volume du P),
- c_{d-1} est égal au $Vol(\partial(P)/2)$ où $\partial(P)$ est la surface de P,
- $c_0 = 1$ est la caractéristique d'Euler de P.

Polynôme d'Ehrhart

Théorème (Ehrhart) La fonction i_P est un polynôme en t de degré d,

$$i_P(t) = c_d t^d + c_{d-1} t^{d-1} + \cdots + c_1 t + c_0.$$

- c_d est égal au $Vol(P)$ (le volume du P),
- c_{d-1} est égal au $Vol(\partial(P)/2)$ où $\partial(P)$ est la surface de P,
- $c_0 = 1$ est la caractéristique d'Euler de P.

Tous les autres coefficients restent encore un mystère ! !

Polynôme d'Ehrhart

La somme de Minkowski de deux ensembles A et B de $\mathbb{R}^d$ est $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Polynôme d'Ehrhart

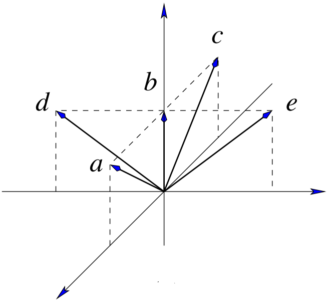
La somme de Minkowski de deux ensembles A et B de $\mathbb{R}^d$ est $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.

Soit $A = \{v_1, \ldots, v_k\}$ un ensemble fini d'éléments de $\mathbb{R}^d$.

Un zonotope engendré par A, noté $Z(A)$, est le polytope formé par la somme de Minkowski des segments de droites

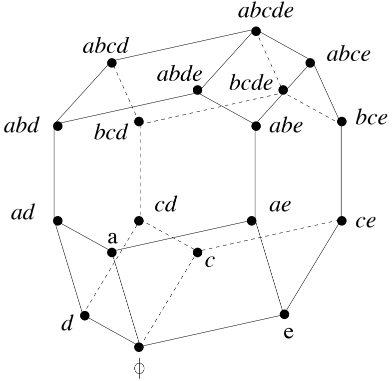
$$Z(A) = \{\alpha_1 + \cdots + \alpha_k | \alpha_i \in [-v_i, v_i]\}.$$

Polynôme d'Ehrhart



Polynôme d'Ehrhart

Permutaèdre



Polynôme d'Ehrhart

Théorème Soit M un matroide régulier et soit A l'une de ses représentations. Alors, le polynôme d'Ehrhart associé au zonotope $Z(A)$ est donnée par

$$i_{Z(A)}(q) = q^{r(M)} t\left(M; 1 + \frac{1}{q}, 1\right).$$