Descomposiciones del politopo de bases de un matroide

J.L. Ramírez Alfonsín

Université de Montpellier

XXX Coloquio Víctor Neumann-Lara de Teoría de Gráficas, Combinatoria y sus Aplicaciones

Oaxaca, México, 4 Marzo 2015

Independientes

Un matroide M es una pareja ordenada $(E, \mathcal{I})$ donde E es un conjunto finito ($E = \{1, \ldots, n\}$) y $\mathcal{I}$ es una familia de subconjuntos de E que verifican las condiciones siguientes :

($I1$) $\emptyset \in \mathcal{I}$,

($I2$) Si $I \in \mathcal{I}$ y $I' \subset I$ entonces $I' \in \mathcal{I}$,

($I3$) Si $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ y $|I_1| < |I_2|$ entonces existe $e \in I_2 \backslash I_1$ tal que $I_1 \cup e \in \mathcal{I}$.

Los miembros en $\mathcal{I}$ son llamados los independientes de M. Un subconjunto de E que no pertenece a $\mathcal{I}$ es llamado dependiente.

Matroides $\mathbb{F}$-representables

Teorema (Whitney 1935) Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ el conjunto de columnas (vectores) de una matriz con coeficientes en $\mathbb{F}$. Sea $\mathcal{I}$ la familia de subconjuntos $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tales que las columnas $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ son linealmente independiantes en $\mathbb{F}$. Entonces, $(E, \mathcal{I})$ es un matroide.

Matroides $\mathbb{F}$-representables

Teorema (Whitney 1935) Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ el conjunto de columnas (vectores) de una matriz con coeficientes en $\mathbb{F}$. Sea $\mathcal{I}$ la familia de subconjuntos $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tales que las columnas $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ son linealmente independiantes en $\mathbb{F}$. Entonces, $(E, \mathcal{I})$ es un matroide.

Ejemplo : Sea A la siguiente matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matroides $\mathbb{F}$-representables

Teorema (Whitney 1935) Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ el conjunto de columnas (vectores) de una matriz con coeficientes en $\mathbb{F}$. Sea $\mathcal{I}$ la familia de subconjuntos $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\} = E$ tales que las columnas $\{e_{i_1}, \ldots, e_{i_m}\}$ son linealmente independiantes en $\mathbb{F}$. Entonces, $(E, \mathcal{I})$ es un matroide.

Ejemplo : Sea A la siguiente matriz con coeficientes en $\mathbb{R}$.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{4\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,5\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{4,5\}\} \subseteq \mathcal{I}(M)$$

Circuitos

Un subconjunto $X \subseteq E$ es dependiente minimal si todo subconjunto propio de X es independiente (tal conjunto es llamado circuito).

Circuitos

Un subconjunto $X \subseteq E$ es dependiente minimal si todo subconjunto propio de X es independiente (tal conjunto es llamado circuito).

Teorema Una familia $\mathcal{C}$ es el conjunto de circuitos de un matroide en E si y solo si $\mathcal{C}$ verifica las siguientes propiedades :

($C1$) $\emptyset \notin \mathcal{C}$,

($C2$) $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ y $C_1 \subseteq C_2$ entonces $C_1 = C_2$,

($C3$) Si $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, $C_1 \neq C_2$ y $e \in C_1 \cap C_2$ entonces existe $C_3 \in \mathcal{C}$ tal que $C_3 \subseteq \{C_1 \cup C_2\} \backslash \{e\}$.

Matroide Gráfico

Teorema El conjunto de ciclos de una gráfica $G = (V, E)$ es el conjunto de ciclo de un matroide con elementos E.

Matroide Gráfico

Teorema El conjunto de ciclos de una gráfica $G = (V, E)$ es el conjunto de ciclo de un matroide con elementos E.

Teorema Todo matroide gráfico es $\mathbb{F}$-representable.

Matroide Gráfico

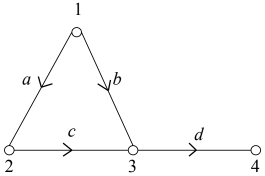
Teorema El conjunto de ciclos de una gráfica $G = (V, E)$ es el conjunto de ciclo de un matroide con elementos E.

Teorema Todo matroide gráfico es $\mathbb{F}$-representable.

Prueba (idea) Sea $G = (V, E)$ una gráfica y sea $\{x_i,\ i \in V\}$ la base canonica de $\mathbb{F}^{|V|}$. Considerar el conjunto de vectores $y_e = x_i - x_j$ donde $e = (i, j) \in E$.

Matroide Gráfico

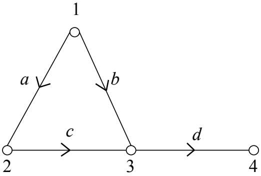
G



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_a & y_b & y_c & y_d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Matroide Gráfico

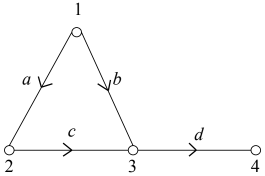
G



$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_a & y_b & y_c & y_d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M(G)$ es isomorfo a $M(A)$ $(a \to y_a, b \to y_b, c \to y_c, d \to y_d)$.

Matroide Gráfico

G 

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_a & y_b & y_c & y_d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M(G)$ es isomorfo a $M(A)$ $(a \to y_a, b \to y_b, c \to y_c, d \to y_d)$.

El ciclo formado por las aristas $a = \{1,2\}$, $b = \{1,3\}$ y $c = \{2,3\}$ corresponden a la dependencia linear $y_b - y_a = y_c$.

Bases

Una base de un matroide es un conjunto independiente maximal.

Bases

Una base de un matroide es un conjunto independiente maximal.

Teorema Una familia $\mathcal{B}$ es el conjunto de bases de un matroide si y solo si verifica las siguientes condiciones :

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \backslash B_2$ entonces existe $y \in B_2 \backslash B_1$ tal que $(B_1 \backslash x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Bases

Una base de un matroide es un conjunto independiente maximal.

Teorema Una familia $\mathcal{B}$ es el conjunto de bases de un matroide si y solo si verifica las siguientes condiciones :

(B1) $\mathcal{B} \neq \emptyset$,

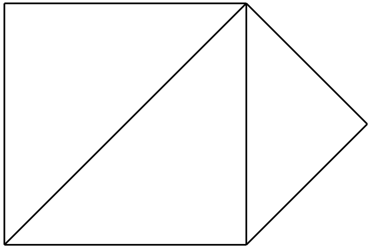
(B2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ y $x \in B_1 \backslash B_2$ entonces existe $y \in B_2 \backslash B_1$ tal que $(B_1 \backslash x) \cup y \in \mathcal{B}$.

Observación

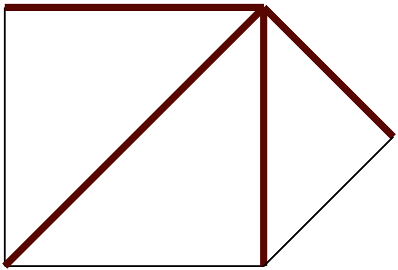
- Todas las bases tienen el mismo cardinal.

El rango de un matroide es el cardinal de una de sus bases.

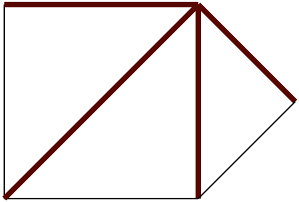
Bases

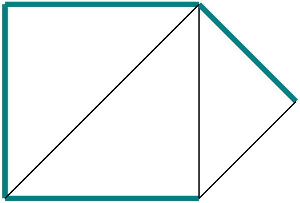


Bases

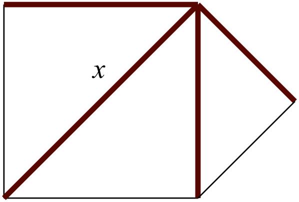


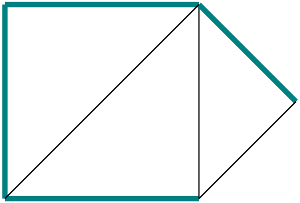
Bases



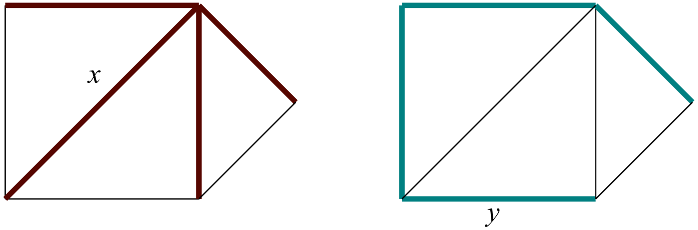


Bases

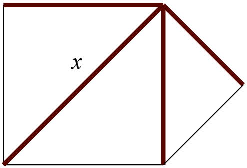


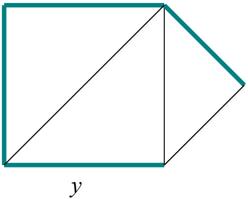


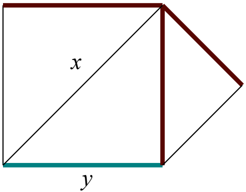
Bases



Bases







Descomposición del politopo de bases

Sea $P(M)$ el politopo de bases M definido como la envoltura convexa de los vectores incidentes a las bases de M, esto es,

$$P(M) := conv\left\{\sum_{i\in B} e_i : B \in \mathcal{B}\right\}$$

donde e_i denota el i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Descomposición del politopo de bases

Sea $P(M)$ el politopo de bases M definido como la envoltura convexa de los vectores incidentes a las bases de M, esto es,

$$P(M) := conv \left\{ \sum_{i \in B} e_i : B \in \mathcal{B} \right\}$$

donde e_i denota el i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Observación :
$P(M)$ es un politopo de dimension de a lo más $n-1$.

Ejemplo

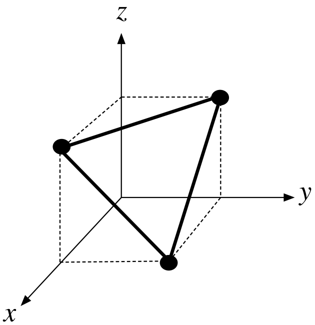
Consideremos el matroide uniforme $U_{2,3}$. Sabemos que $\mathcal{B}(U_{2,3}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ y tomemos $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Entonces

$$P(U_{2,3}) = conv\,\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

Ejemplo

Consideremos el matroide uniforme $U_{2,3}$. Sabemos que $\mathcal{B}(U_{2,3}) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\}\}$ y tomemos $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$. Entonces

$$P(U_{2,3}) = conv\,\{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$



Descomposición del politopo de bases

Una descomposición de $P(M)$ es una descomposición de la forma

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

donde cada $P(M_i)$ es también el politopo de bases de algún matroide M_i, y para cada $1 \leq i \neq j \leq t$, la intersección $P(M_i) \cap P(M_j)$ es una cara de ambos $P(M_i)$ and $P(M_j)$.

Descomposición del politopo de bases

Una descomposición de $P(M)$ es una descomposición de la forma

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

donde cada $P(M_i)$ es también el politopo de bases de algún matroide M_i, y para cada $1 \leq i \neq j \leq t$, la intersección $P(M_i) \cap P(M_j)$ es una cara de ambos $P(M_i)$ and $P(M_j)$.

Diremos que $P(M)$ es descomponible si tiene una descomposición con $t \geq 2$, e indescomponible en caso contrario.

Descomposición del politopo de bases

Una descomposición de $P(M)$ es una descomposición de la forma

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i)$$

donde cada $P(M_i)$ es también el politopo de bases de algún matroide M_i, y para cada $1 \leq i \neq j \leq t$, la intersección $P(M_i) \cap P(M_j)$ es una cara de ambos $P(M_i)$ and $P(M_j)$.

Diremos que $P(M)$ es descomponible si tiene una descomposición con $t \geq 2$, e indescomponible en caso contrario.

Una descomposition es llamada partición por hiperplano si $t = 2$.

Motivaciones

(Lafforgue 1999) Existencia de *compactificaciones* de las celdas de Schubert de los Grassmannianos si el politopo associado es indescomponible.

Motivaciones

(Lafforgue 1999) Existencia de *compactificaciones* de las celdas de Schubert de los Grassmannianos si el politopo associado es indescomponible.

Observación El trabajo de Lafforgue implica que para un matroide M representado por vectores en $\mathbb{F}^r$ si $P(M)$ es indescomponible entonces M sera rígido, esto es, M tendrá solamente un número finito de realizaciones (considerando escalas y acciones de $GL(r, \mathbb{F})$.

Motivaciones

(Lafforgue 1999) Existencia de *compactificaciones* de las celdas de Schubert de los Grassmannianos si el politopo associado es indescomponible.

Observación El trabajo de Lafforgue implica que para un matroide M representado por vectores en $\mathbb{F}^r$ si $P(M)$ es indescomponible entonces M sera rígido, esto es, M tendrá solamente un número finito de realizaciones (considerando escalas y acciones de $GL(r, \mathbb{F})$.

(Hacking, Keel y Tevelev 2006) Compactificación de ciertos espacios de arreglos de hiperplanos.

(Speyer 2009) Espacios tropicales lineales.

Motivaciones

(Lafforgue 1999) Existencia de *compactificaciones* de las celdas de Schubert de los Grassmannianos si el politopo associado es indescomponible.

Observación El trabajo de Lafforgue implica que para un matroide M representado por vectores en $\mathbb{F}^r$ si $P(M)$ es indescomponible entonces M sera rígido, esto es, M tendrá solamente un número finito de realizaciones (considerando escalas y acciones de $GL(r, \mathbb{F})$.

(Hacking, Keel y Tevelev 2006) Compactificación de ciertos espacios de arreglos de hiperplanos.

(Speyer 2009) Espacios tropicales lineales.

(Ardila, Fink y Rincon 2010) Existencia de funciones que se comportan como *valuaciones* con respecto a la descomposición del politopo de bases asociado.

Resultados conocidos

(Kapranov 1993)

• Todas las descomposiciones de matroides de rango 2 pueden ser obtenidas como una sucesión de particiones por hiperplanos.

Resultados conocidos

(Kapranov 1993)

• Todas las descomposiciones de matroides de rango 2 pueden ser obtenidas como una sucesión de particiones por hiperplanos.

(Billera, Jia y Reiner 2009)

• Cinco matroides de rango 3 con 6 elementos cuyos politopos de bases son indescomponibles.

Resultados conocidos

(Kapranov 1993)

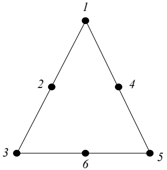
• Todas las descomposiciones de matroides de rango 2 pueden ser obtenidas como una sucesión de particiones por hiperplanos.

(Billera, Jia y Reiner 2009)

• Cinco matroides de rango 3 con 6 elementos cuyos politopos de bases son indescomponibles.

• Descomposición en tres partes (cada una indescomponible) de $P(W)$ que no puede ser obtenida con una sucesión de particiones por hiperplanos.

W :



Descomposición Combinatorica

Una descomposición de bases de un matroide M es una descomposición de la forma

$$\mathcal{B}(M) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}(M_i)$$

donde $\mathcal{B}(M_k)$, $1 \leq k \leq t$ y $\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$, $1 \leq i \neq j \leq t$ son colecciones de bases de matroides.

Descomposición Combinatorica

Una descomposición de bases de un matroide M es una descomposición de la forma

$$\mathcal{B}(M) = \bigcup_{i=1}^{t} \mathcal{B}(M_i)$$

donde $\mathcal{B}(M_k)$, $1 \leq k \leq t$ y $\mathcal{B}(M_i) \cap \mathcal{B}(M_j)$, $1 \leq i \neq j \leq t$ son colecciones de bases de matroides.

Diremos que M descomponible combinatoricamente si tiene una descomposición de bases.
La descomposición es no trivial si $\mathcal{B}(M_i) \neq \mathcal{B}(M)$ para todo i.

- Si $P(M)$ es descomponible entonces M es igualmente descomponible combinatoriacamente.

- Si $P(M)$ es descomponible entonces M es igualmente descomponible combinatoriacamente.
- Una descomposición combinatorica no induce necesariamente una descomposition del politopo de bases.

Ejemplo :

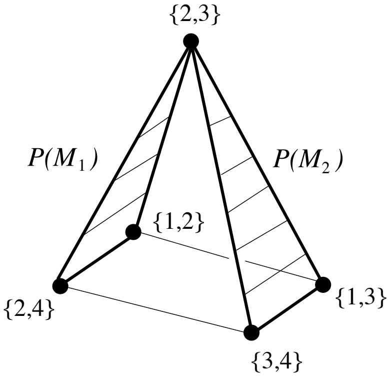
$\mathcal{B}(M) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ tiene una descomposición combinatorica

$\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,2\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ y $\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{3,4\}\}$

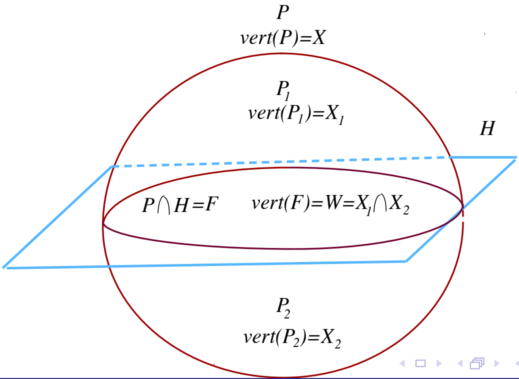
Podemos verificar que $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2)$ and $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{2,3\}$ son colecciones de bases de matroides.

Sin embargo, $P(M_1)$ and $P(M_2)$ no descompone $P(M)$.

Ejemplo



Proposición Sea P, d-politopo con vertices X. Sea H un hiperplano tal que $H \cap P \neq \emptyset$, H no soporte de P, esto es, H divide P en dos politopos P_1 y P_2, tal que $H \cap P = P_1 \cap P_2 = F \neq \emptyset$ y H particiona X en dos conjuntos X_1 y X_2 con $X_1 \cap X_2 = W$. Entonces, para cada arista $[u, v]$ de P tenemos $\{u, v\} \subset X_i$ para $i = 1$ or 2 si y solo si $F = conv(W)$.



Un poco de geometria

Proposición Sea P un d-politopo con vertices X. Sea H un hiperplano tal que $H \cap P \neq \emptyset$, H no soporte de P, esto es, H divide P en dos politopos P_1 y P_2, tal que $H \cap P = P_1 \cap P_2 = F \neq \emptyset$ y H particiona X en dos conjuntos X_1 y X_2 con $X_1 \cap X_2 = W$. Entonces, para cada arista $[u, v]$ de P tenemos $\{u, v\} \subset X_i$ para $i = 1$ or 2 si y solo si $F = conv(W)$.

Corolario $F = conv(W)$ si y solo si $P_i = conv(X_i)$, $i = 1, 2$ (en este caso $P = P_1 \cup P_2$ con P_1 y P_2 politopos de la misma dimensión que P y compartiendo una cara).

Sea (E_1, E_2) una partición E y sea $r_i > 1$, $i = 1, 2$ el rango de $M|_{E_i}$.

(E_1, E_2) es una buena partición si existen enteros $0 < a_1 < r_1$ and $0 < a_2 < r_2$ tales que :

(P1) $r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2$ y

(P2) para cualquier $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ con $|X| \leq r_1 - a_1$ y
para cualquier $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ con $|Y| \leq r_2 - a_2$
tenemos $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Sea (E_1, E_2) una partición E y sea $r_i > 1$, $i = 1, 2$ el rango de $M|_{E_i}$.

(E_1, E_2) es una buena partición si existen enteros $0 < a_1 < r_1$ and $0 < a_2 < r_2$ tales que :

(P1) $r_1 + r_2 = r + a_1 + a_2$ y

(P2) para cualquier $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1})$ con $|X| \leq r_1 - a_1$ y
para cualquier $Y \in \mathcal{I}(M|_{E_2})$ con $|Y| \leq r_2 - a_2$
tenemos $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Lema Sea (E_1, E_2) una buena partición E. Sea

$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq r_1 - a_1\}$

$\mathcal{B}(M_2) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_2| \leq r_2 - a_2\}$.

Entonces, $\mathcal{B}(M_1)$ y $\mathcal{B}(M_2)$ son colecciones de bases de matroides.

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide y sea (E_1, E_2) una buena partición de E. Entonces, $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ es una partición por hiperplano donde M_1 y M_2 son los matroides definidos en el lema.

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide y sea (E_1, E_2) una buena partición de E. Entonces, $P(M) = P(M_1) \cup P(M_2)$ es una partición por hiperplano donde M_1 y M_2 son los matroides definidos en el lema.

Prueba (idea) (i) $\mathcal{B}(M) = \mathcal{B}(M_1) \cup \mathcal{B}(M_2)$,

(ii) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2) \subset \mathcal{B}(M)$,

(iii) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2) \not\subseteq \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$,

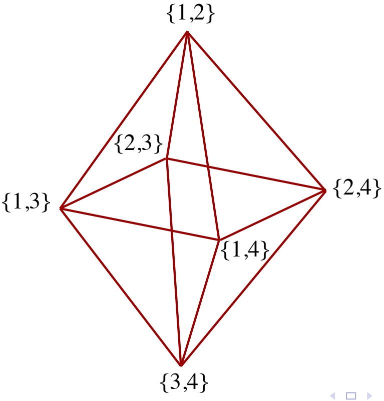
(iv) $\mathcal{B}(M_1), \mathcal{B}(M_2), \mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ son colecciones de bases,

(v) existe un hiperplano conteneniendo los vertices correspondientes a $\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2)$ y no de soporte de $P(M)$,

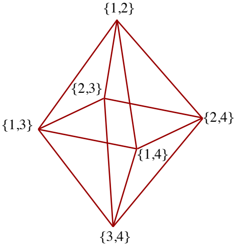
(vi) cada arista de $P(M)$ es una arista de $P(M_1)$ o $P(M_2)$.

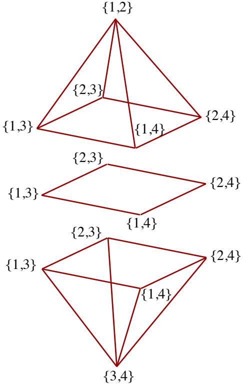
Ejemplo. Consideremos $U_{2,4}$ y la buena partición $E_1 = \{1, 2\}$ y $E_2 = \{3, 4\}$ (donde $r_1 = r_2 = 2$) con $a_1 = a_2 = 1$.
Obtenemos $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$,
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ y
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$.

Ejemplo. Consideremos $U_{2,4}$ y la buena partición $E_1 = \{1, 2\}$ y $E_2 = \{3, 4\}$ (donde $r_1 = r_2 = 2$) con $a_1 = a_2 = 1$.
Obtenemos $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$,
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ y
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$.



Ejemplo. Consideremos $U_{2,4}$ y la buena partición $E_1 = \{1, 2\}$ y $E_2 = \{3, 4\}$ (donde $r_1 = r_2 = 2$) con $a_1 = a_2 = 1$.
Obtenemos $\mathcal{B}(M_1) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$,
$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$ y
$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}$.





Descomposición de Matroides Uniformes

Diremos que dos separaciones por hiperplano $P(M_1) \cup P(M_2)$ y $P(M_1') \cup P(M_2')$ of $P(M)$ son equivalentes si $P(M_i)$ es combinatoriamente equivalente a $P(M_i')$, $i = 1, 2$ (las separaciones son diferentes en caso contrario).

Descomposición de Matroides Uniformes

Diremos que dos separaciones por hiperplano $P(M_1) \cup P(M_2)$ y $P(M_1') \cup P(M_2')$ of $P(M)$ son equivalentes si $P(M_i)$ es combinatoriamente equivalente a $P(M_i')$, $i = 1, 2$ (las separaciones son diferentes en caso contrario).

Corolario (Chatelain y R.A. 2011) Sean $n \geq r + 2 \geq 4$ enteros y sea $h(U_{r,n})$ el número de decomposiciones por hiperplano diferentes de $P(U_{r,n})$. Entonces,

$$h(U_{r,n}) \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

donde $U_{r,n}$ denota el matroide uniforme de rango r con n elementos.

Suma Directa

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ y $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ dos matroides de rango r_1 y r_2 respectivamente donde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Entonces, $P(M_1 \oplus M_2)$ tiene una partición por hiperplano si y solo si $P(M_1)$ y/o $P(M_2)$ tiene una partición por hyperplano.

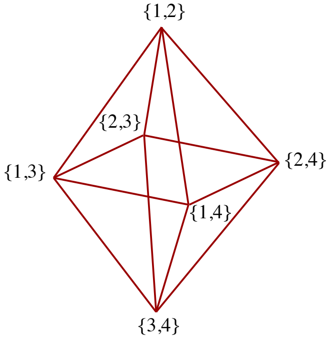
Gráfica de bases de un matroide

La gráfica de bases $G(M)$ de un matroide M tiene como vertices el conjunto de bases y dos vertices son adyacentes si la diferencia simétrica de las bases correspondientes es igual a dos.

Gráfica de bases de un matroide

La gráfica de bases $G(M)$ de un matroide M tiene como vertices el conjunto de bases y dos vertices son adyacentes si la diferencia simétrica de las bases correspondientes es igual a dos.

Ejemplo. Consideremos $G(U_{2,4})$



Gráfica de bases de un matroide

(Maurer 1973)

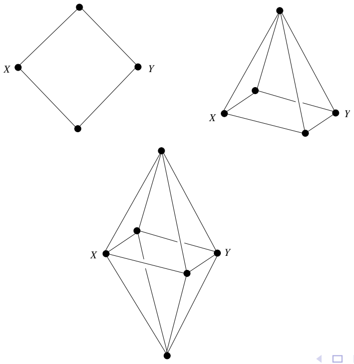
• Caracteriza las gráficas que son gráficas de bases de un matroide.

• Si x, y son dos vertices a distancia dos entonces x, y y sus vecinos comunes forman un cuadrado, una piramide o un octaedro.

Gráfica de bases de un matroide

(Maurer 1973)

- Caracteriza las gráficas que son gráficas de bases de un matroide.
- Si x, y son dos vertices a distancia dos entonces x, y y sus vecinos comunes forman un cuadrado, una piramide o un octaedro.



Lema Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide binario y sea $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}_1$ ies la colección de bases de un matroide. Si $X \in \mathcal{B}_1$ y todos los vecinos de X (esto es, el conjunto de vertices de $G(M)$ adyacentes a X) son elementos de $\mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.

Lema Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide binario y sea $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}_1$ ies la colección de bases de un matroide. Si $X \in \mathcal{B}_1$ y todos los vecinos de X (esto es, el conjunto de vertices de $G(M)$ adyacentes a X) son elementos de $\mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea M un matroide binario. Entonces, $P(M)$ no tiene una partición por hiperplano.

Lema Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide binario y sea $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}_1$ ies la colección de bases de un matroide. Si $X \in \mathcal{B}_1$ y todos los vecinos de X (esto es, el conjunto de vertices de $G(M)$ adyacentes a X) son elementos de $\mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea M un matroide binario. Entonces, $P(M)$ no tiene una partición por hiperplano.

Corolario Sea M un matroide binario. Si $G(M)$ tiene un vértice X que tiene exactamente d vecinos donde $d = dim(P(M))$ entonces $P(M)$ es indsecomponible.

Lema Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide binario y sea $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}_1$ ies la colección de bases de un matroide. Si $X \in \mathcal{B}_1$ y todos los vecinos de X (esto es, el conjunto de vertices de $G(M)$ adyacentes a X) son elementos de $\mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea M un matroide binario. Entonces, $P(M)$ no tiene una partición por hiperplano.

Corolario Sea M un matroide binario. Si $G(M)$ tiene un vértice X que tiene exactamente d vecinos donde $d = dim(P(M))$ entonces $P(M)$ es indsecomponible.

Observación : El d-hipercubo es la gráfica de bases de un matroide binario.

Lema Sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide binario y sea $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}$ tel que $\mathcal{B}_1$ ies la colección de bases de un matroide. Si $X \in \mathcal{B}_1$ y todos los vecinos de X (esto es, el conjunto de vertices de $G(M)$ adyacentes a X) son elementos de $\mathcal{B}_1$ entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}$.

Teorema (Chatelain y R.A. 2011) Sea M un matroide binario. Entonces, $P(M)$ no tiene una partición por hiperplano.

Corolario Sea M un matroide binario. Si $G(M)$ tiene un vértice X que tiene exactamente d vecinos donde $d = dim(P(M))$ entonces $P(M)$ es indsecomponible.

Observación : El d-hipercubo es la gráfica de bases de un matroide binario.

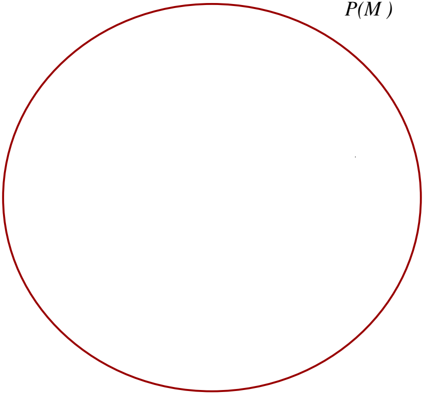
Corolario Sea $P(M)$ el politopo de bases del matroide M que tiene como 1-esqueleto el d-hipercubo. Entonces, $P(M)$ es indescomponible.

Multi-Descomposiciones

Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?

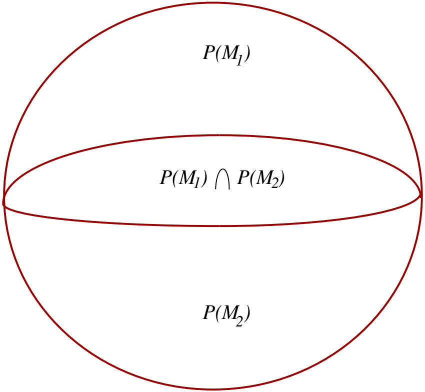
Multi-Descomposiciones

Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?



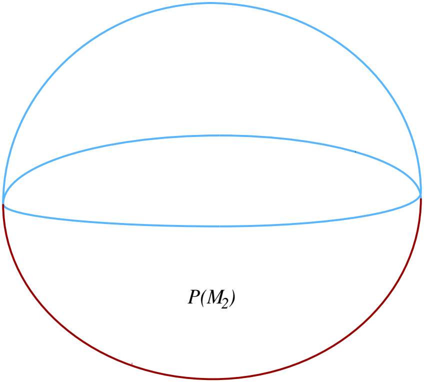
Multi-Descomposiciones

Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?



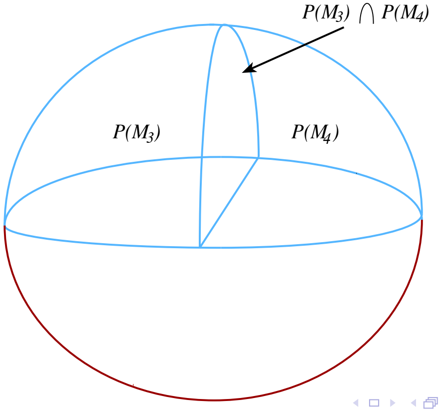
Multi-Descomposiciones

Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?

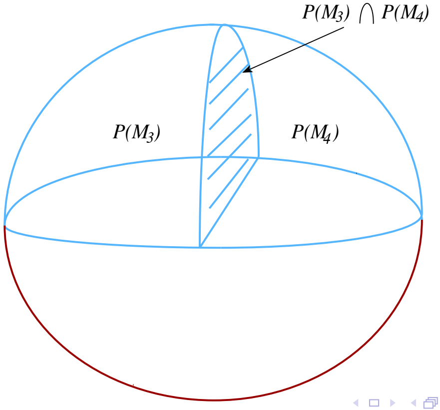


Multi-Descomposiciones

Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?

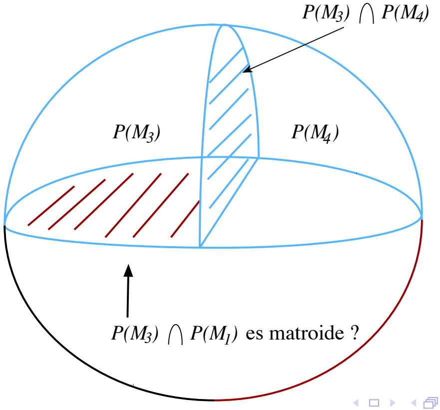


Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?



Multi-Descomposiciones

Pregunta : ¿Podemos encontrar una t-descomposición con $t \geq 3$ aplicando una secuencia de descomposiciones por hiperplanos ?



Multi-Descomposiciones

Recordar : la intersección $P(M_i) \cap P(M_j)$ debe ser une matroide para todo i, j

Ejemplo :

$\mathcal{B}(M_1) = \{\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\}\}$

$\mathcal{B}(M_2) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$

pero

$\mathcal{B}(M_1) \cap \mathcal{B}(M_2) = \{\{1,3\},\{2,3\},\{2,4\}\}$ no es matroide.

Generalización de las condiciones

Sea $t \geq 2$ un entero con $r \geq t$. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una t-partición de $E = \{1, \ldots, n\}$ y sea $r_i = r(M|_{E_i}) > 1$, $i = 1, \ldots, t$.

Generalización de las condiciones

Sea $t \geq 2$ un entero con $r \geq t$. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una t-partición de $E = \{1, \ldots, n\}$ y sea $r_i = r(M|_{E_i}) > 1$, $i = 1, \ldots, t$.

Diremos que $\bigcup_{i=1}^{t} E_i$ es una buena t-partición si existen enteros $0 < a_i < r_i$ tales que :

$(P1)$ $r = \sum_{i=1}^{t} a_i$,

$(P2)$

(a) Para toda j con $1 \leq j \leq t-1$

si $X \in \mathcal{I}(M|_{E_1 \cup \cdots \cup E_j})$ con $|X| \leq a_1$ y
$Y \in \mathcal{I}(M|_{E_{j+1} \cup \cdots \cup E_t})$ con $|Y| \leq a_2$,
entonces $X \cup Y \in \mathcal{I}(M)$.

Generalización de las condiciones

$(P2)$

(b) Para todo par j, k con $1 \leq j < k \leq t-1$

$$\text{if } X \in \mathcal{I}(M|_{E_1 \cup \cdots \cup E_j}) \qquad \text{con } |X| \leq \sum_{i=1}^{j} a_i,$$

$$Y \in \mathcal{I}(M|_{E_{j+1} \cup \cdots \cup E_k}) \qquad \text{con } |Y| \leq \sum_{i=j+1}^{k} a_i,$$

$$Z \in \mathcal{I}(M|_{E_{k+1} \cup \cdots \cup E_t}) \qquad \text{con } |Z| \leq \sum_{i=k+1}^{t} a_i,$$

entonces $X \cup Y \cup Z \in \mathcal{I}(M)$.

Generalización de las condiciones

$(P2)$

(b) Para todo par j, k con $1 \leq j < k \leq t-1$

$$
\begin{array}{ll}
\text{if } X \in \mathcal{I}(M|_{E_1 \cup \cdots \cup E_j}) & \text{con } |X| \leq \sum_{i=1}^{j} a_i, \\
Y \in \mathcal{I}(M|_{E_{j+1} \cup \cdots \cup E_k}) & \text{con } |Y| \leq \sum_{i=j+1}^{k} a_i, \\
Z \in \mathcal{I}(M|_{E_{k+1} \cup \cdots \cup E_t}) & \text{con } |Z| \leq \sum_{i=k+1}^{t} a_i,
\end{array}
$$

entonces $X \cup Y \cup Z \in \mathcal{I}(M)$.

Una buena 2-partición dada por $(P2)$ caso (a) con $t = 2$ es una *buena partición*

Lema Sea $t \geq 2$ un entero y sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una buena t-partición con enteros $0 < a_i < r(M|_{E_i})$, $i = 1, \ldots, t$. Sea

$$\mathcal{B}(M_1) = \{B \in \mathcal{B}(M) : |B \cap E_1| \leq a_1\}$$

y para cada $j = 2, \ldots, t$, sea

$$\mathcal{B}(M_j) = \Big\{B \in \mathcal{B}(M) \quad : |B \cap E_1| \geq a_1, \ldots, |B \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i| \geq \sum_{i=1}^{j-1} a_i, \quad |B \cap \bigcup_{i=1}^{j} E_i| \leq \sum_{i=1}^{j} a_i \Big\}.$$

Entonces, $\mathcal{B}(M_j)$ es la colección de bases de un matroide para cada $j = 1, \ldots, t$.

Teorema (Chatelain y R.A. 2014) Sea $t \geq 2$ un entero y sea $M = (E, \mathcal{B})$ un matroide de rango r. Sea $E = \bigcup_{i=1}^{t} E_i$ una buena t-partición con enteros $0 < a_i < r(M|_{E_i})$, $i = 1, \ldots, t$. Entonces, $P(M)$ tiene una secesión de descomposiciones por hiperplano que da una descomposición

$$P(M) = \bigcup_{i=1}^{t} P(M_i),$$

donde M_i, $1 \leq i \leq t$, son los matroides definidos en el lema anterior.

Matroides uniformes

Corolario (Chatelain y R.A. 2014) Sean $n, r, t \geq 2$ enteros con $n \geq r + t$ y $r \geq t$. Sea $p_t(n)$ el número de diferentes descomposiciones del entero n de la forma $n = \sum_{i=1}^{t} p_i$ con $p_i \geq 2$ y sea $h_t(U_{n,r})$ el número de descomposiciones *diferentes* de $P(U_{r,n})$ en t partes. Entonces,

$$h_t(U_{r,n}) \geq p_t(n).$$

Suma Directa

Teorema (Chatelain y R.A. 2014) Sea $M_1 = (E_1, \mathcal{B})$ and $M_2 = (E_2, \mathcal{B})$ matroides de rango r_1 y r_2 respectivamente donde $E_1 \cap E_2 = \emptyset$. Entonces, $P(M_1 \oplus M_2)$ tiene una secesión de t decomposiciones par hiperplanos si $P(M_1)$ y/o $P(M_2)$ tiene una secesión de t decomposiciones par hiperplanos.