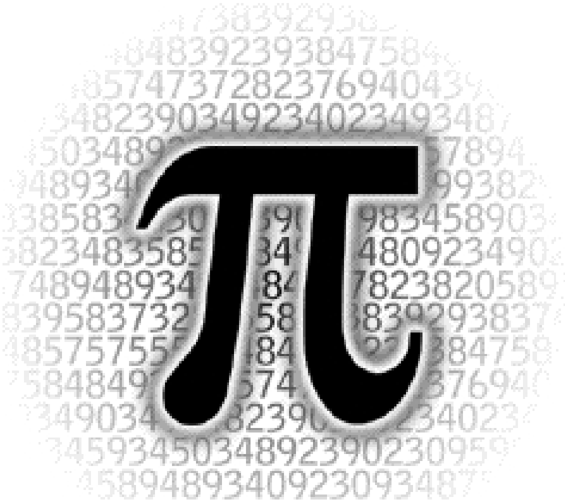
Combinatoria : nuevas tendencias e interacciones

J. Ramírez Alfonsín

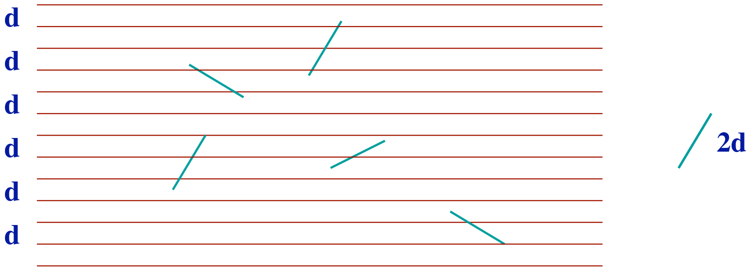
Université Montpellier 2, Francia

ITAM, México, D.F.
24 de Enero de 2013

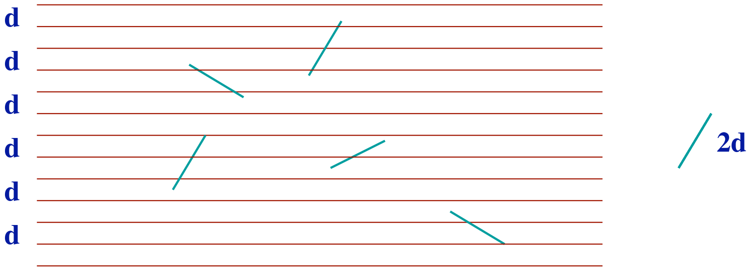
Algoritmos aleatorios



Método de Buffon

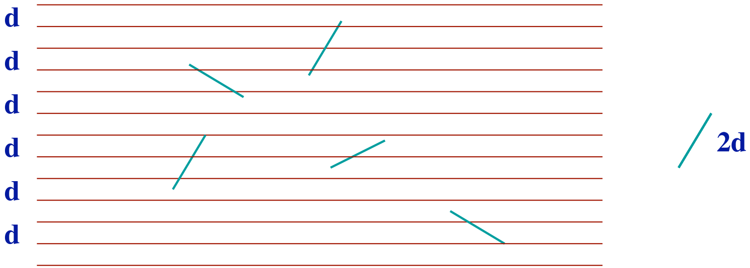


Método de Buffon



Prob(la aguja toca una de las lineas) $= \frac{1}{\pi}\cdot$

Método de Buffon



$Prob$(la aguja toca una de las lineas) $= \frac{1}{\pi}$.

Repitiendo este experimento y reteniendo el número de casos cuando la aguja toca una linea, podemos obtener una aproximación de π.

Probleme de matrimonios

$F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ un conjunto de n mujeres.
$G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ un conjunto de n hombres.

Cada mujer f_i hace una lista de hombres preferidos (del conjunto G) con los que le gustaría casarse.

Probleme de matrimonios

$F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ un conjunto de n mujeres.
$G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ un conjunto de n hombres.

Cada mujer f_i hace una lista de hombres preferidos (del conjunto G) con los que le gustaría casarse.

Pregunta : ¿Es posible cada mujer se case con un de los hombres que ella prefiera ?

Sea A la matriz cuadrada de orden n cuyas entradas (i, j) es une variable formal u_{ij} si y solamente si el hombre g_j esta en la lista de la mujer f_i, y 0 si no.

Sea A la matriz cuadrada de orden n cuyas entradas (i, j) es une variable formal u_{ij} si y solamente si el hombre g_j esta en la lista de la mujer f_i, y 0 si no.

Proposición Existe un conjunto de tales matrimonios si y solamente si el determinante de la matriz A no es idénticamente cero.

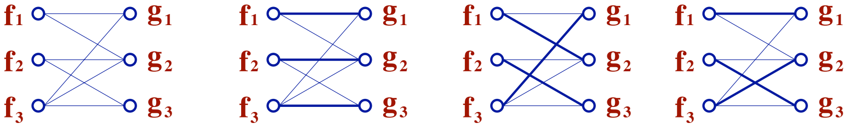
Ejemplo : $f_1 = \{g_1, g_2\},\ f_2 = \{g_2, g_3\},\ f_3 = \{g_1, g_2, g_3\}.$

Ejemplo : $f_1 = \{g_1, g_2\},\ f_2 = \{g_2, g_3\},\ f_3 = \{g_1, g_2, g_3\}.$

$$det(A) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{3,3} \end{bmatrix} = u_{11}u_{22}u_{33} + u_{12}u_{23}u_{31} - u_{11}u_{23}u_{32}$$

Ejemplo : $f_1 = \{g_1, g_2\}, \ f_2 = \{g_2, g_3\}, \ f_3 = \{g_1, g_2, g_3\}$.

$$det(A) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{3,3} \end{bmatrix} = u_{11}u_{22}u_{33} + u_{12}u_{23}u_{31} - u_{11}u_{23}u_{32}$$



- Calcular un determinante « simbólico » es difícil.
- Calcular un determinante « numérico » es fácil.

- Calcular un determinante ≪ simbólico ≫ es difícil.
- Calcular un determinante ≪ numérico ≫ es fácil.

≪ Estudio numérico ≫

Dar valores aleatorios a los indeterminantes y calcular el valor numérico.

- Calcular un determinante ≪ simbólico ≫ es difícil.
- Calcular un determinante ≪ numérico ≫ es fácil.

≪ Estudio numérico ≫

Dar valores aleatorios a los indeterminantes y calcular el valor numérico.

Si el valor no es cero

podemos afirmar que el valor simbólico no es cero.

- Calcular un determinante ≪ simbólico ≫ es difícil.
- Calcular un determinante ≪ numérico ≫ es fácil.

≪ Estudio numérico ≫

Dar valores aleatorios a los indeterminantes y calcular el valor numérico.

Si el valor no es cero

podemos afirmar que el valor simbólico no es cero.

Si el valor es cero

no podemos concluir que el valor simbólico sea cero.

Lema Sea $P(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ une polinomio diferente a cero en m variables, cada una de grado $\leq d$, y sea $M > 0$ un entero.
Entonces, el número de m-pletas
$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^m$ tales que
$P(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0$ es a lo mas igual a mdM^{m-1}.

Lema Sea $P(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ une polinomio diferente a cero en m variables, cada una de grado $\leq d$, y sea $M > 0$ un entero.
Entonces, el número de m-pletas
$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \{0, 1, \ldots, M-1\}^m$ tales que
$P(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0$ es a lo mas igual a mdM^{m-1}.

Algoritmo matrimonio

(1) selccionar al azar m enteros
$(a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \{0, 1, \ldots, 2m-1\}$

(2) calcular $det(A(a_1, a_2, \ldots, a_m))$

(3) si $det(A(a_1, a_2, \ldots, a_m)) \neq 0$ entonces responder
$\ll$ existe un conjunto de tales matrimonios $\gg$
si no responder
$\ll$ no existe *probablemente* un conjunto de tales matrimonios $\gg$

Observación : El algoritmo matrimonio nos da una respuesta segura en el caso de la existencia y solamente una respuesta ≪ probable ≫ en el otro caso.

Observación : El algoritmo matrimonio nos da una respuesta segura en el caso de la existencia y solamente una respuesta « probable » en el otro caso.

Pregunta : ¿Cuál es la probabilidad P que de una respuesta négativa falsa ?

Observación : El algoritmo matrimonio nos da una respuesta segura en el caso de la existencia y solamente una respuesta ≪ probable ≫ en el otro caso.

Pregunta : ¿Cuál es la probabilidad P que de una respuesta négativa falsa ?

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{\text{número } \textit{maximum de m-pletas que anulan el } \det(A), \textit{ que se suponen diferente de cero}}{\text{número } \textit{total de m-pletas}} \\ &= \frac{mdM^{m-1}}{M^m} \end{aligned}$$

Observación : El algoritmo matrimonio nos da una respuesta segura en el caso de la existencia y solamente una respuesta ≪ probable ≫ en el otro caso.

Pregunta : ¿Cuál es la probabilidad P que de una respuesta négativa falsa ?

$$\begin{aligned} P &\leq \frac{\text{número } \mathit{maximum\ de\ m\text{-}pletas\ que\ anulan\ el}\ \det(A),\ \mathit{que\ se\ suponen\ diferente\ de\ cero}}{\text{número } \mathit{total\ de\ m\text{-}pletas}} \\ &= \frac{mdM^{m-1}}{M^m} \end{aligned}$$

Como $d = 1$ y $M = 2m$, obtenemos que

$$P \leq \frac{1}{2}$$

Pregunta : ¿Cuál es el interés práctico ?

Pregunta : ¿Cuál es el interés práctico ?

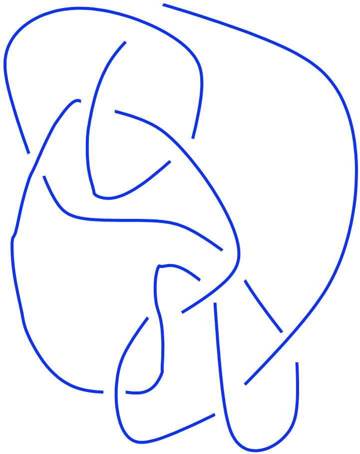
Repitiendo un k veces este procedimiento, la probabilidad de obtener une respuesta negativa falsa, tomando en cuenta todas las respuestas obtenidas, es de $\leq \frac{1}{2^k}$.

Pregunta : ¿Cuál es el interés práctico ?

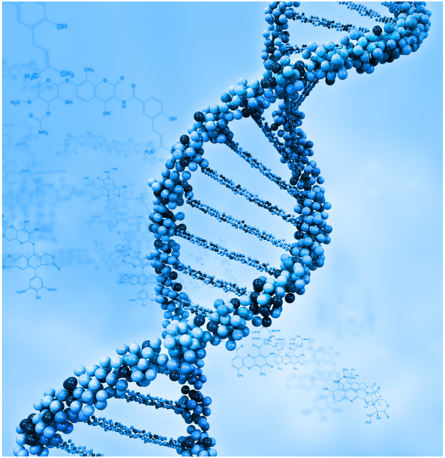
Repitiendo un k veces este procedimiento, la probabilidad de obtener une respuesta negativa falsa, tomando en cuenta todas las respuestas obtenidas, es de $\leq \frac{1}{2^k}$.

≪ Puede ser calculado que la probabilidad que una computadora sea destruida por un meteorito durante cada microsegundo de sus cálculos es al menos igual a $\frac{1}{2^{100}}$ (bajo la hipótesis de un impacto de un meteorito por milenio que destruye al menos 100 m^2 de la superficie terrestre) ≫

Nudos



ADN



ADN y la teoría de nudos

- La molécula de ADN dúplex consiste en dos cadenas helicoidales constituidas de azúcar y fósforo, además, adherida a cada molécula de azúcar está una de los cuatros nucleotidos base : Adenina, Citosina, Guanina y Timina

ADN y la teoría de nudos

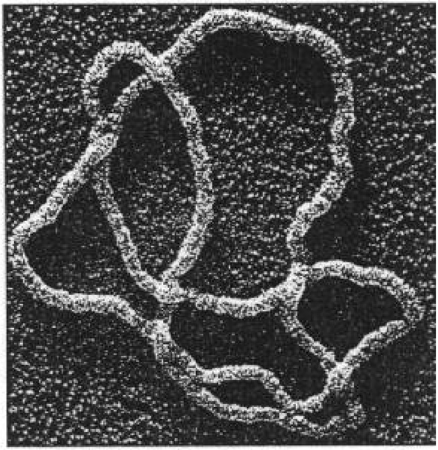
- La molécula de ADN dúplex consiste en dos cadenas helicoidales constituidas de azúcar y fósforo, además, adherida a cada molécula de azúcar está una de los cuatros nucleotidos base : Adenina, Citosina, Guanina y Timina
- Podemos pensar el ADN como dos cuerdas entrelazadas que, a su vez, pueden estar enlazados con otros moléculas de ADN.

ADN y la teoría de nudos

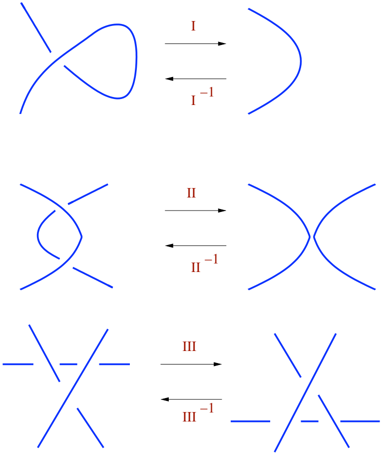
- La molécula de ADN dúplex consiste en dos cadenas helicoidales constituidas de azúcar y fósforo, además, adherida a cada molécula de azúcar está una de los cuatros nucleotidos base : Adenina, Citosina, Guanina y Timina
- Podemos pensar el ADN como dos cuerdas entrelazadas que, a su vez, pueden estar enlazados con otros moléculas de ADN.
- El ADN es muy ENROLLADO dentro de la célula, es equivalente a poner dentro de un balón de fútbol unos 200 Km de hilo para pescar.

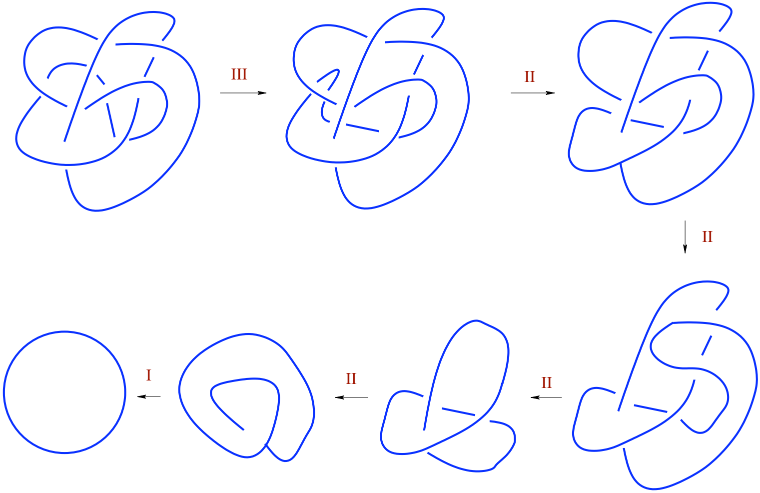
- La teoría de nudos aparece de forma natural en el análisis estructural en el ADN. Por ejemplo, la detección de cambios provocados por una *enzima* en el ADN

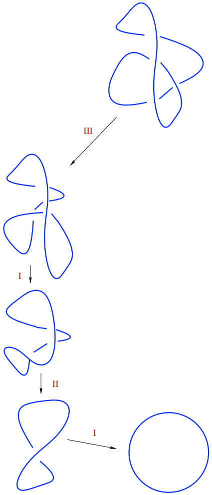
- La teoría de nudos aparece de forma natural en el análisis estructural en el ADN. Por ejemplo, la detección de cambios provocados por una *enzima* en el ADN

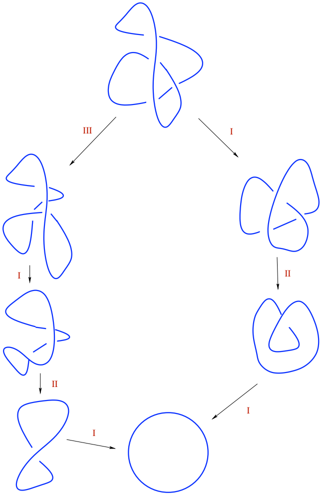


Movimientos de Reidemeister



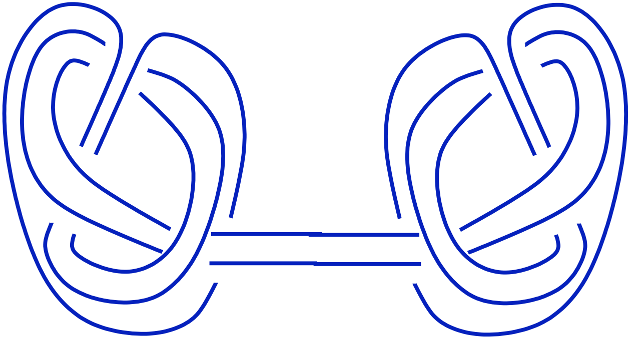

III
II
II
II
II
I


III
I
II
I


III
I
I
II
II
I
I

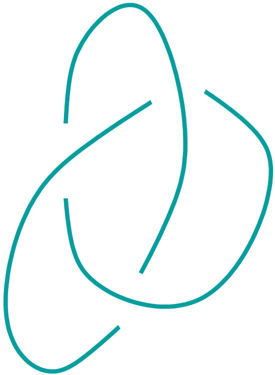
Detectar nudos triviales

Dado un nudo K ¿existe une buen método para decidir si K es trivial o no ?



El trébol

¿Es el trébol un nudo no trivial ?



Teorema (Papakyriakopoulos 1957) Un nudo es trivial si y solamente si el grupo fundamental de su complemento es abeliano.

Teorema (Papakyriakopoulos 1957) Un nudo es trivial si y solamente si el grupo fundamental de su complemento es abeliano.

Teorema El grupo fundamental del complemento del trébol no es abeliano.

Teorema (Papakyriakopoulos 1957) Un nudo es trivial si y solamente si el grupo fundamental de su complemento es abeliano.

Teorema El grupo fundamental del complemento del trébol no es abeliano.

Teorema (Hass, Lagarias 2001) Todo diagrama de un nudo trivial con n cruces puede ser transformado a un diagrama sin cruces en a lo mas $2^{n \cdot 10^{11}}$ movimientos de Reidemeister.

Coloreando nudos

Un nudo K es coloreable si cada arco puede ser coloreable con 3 colores (digamos, **rojo**, **azul**, **verde**) de tal forma que

1) al menos 2 colores son utilizados

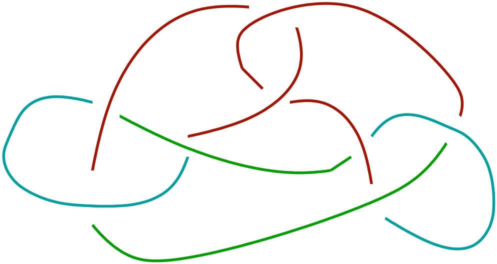
2) en cualquier cruce aparecen 1 o 3 colores.

Coloreando nudos

Un nudo K es coloreable si cada arco puede ser coloreable con 3 colores (digamos, **rojo**, **azul**, **verde**) de tal forma que

1) al menos 2 colores son utilizados

2) en cualquier cruce aparecen 1 o 3 colores.



Teorema Si un diagrama de un nudo K es coloreable entonces todo diagrama de K es coloreable.

Teorema Si un diagrama de un nudo K es coloreable entonces todo diagrama de K es coloreable.

Demostración Los movimientos de Reidemeister conservan la propiedad de coloración.

Teorema Si un diagrama de un nudo K es coloreable entonces todo diagrama de K es coloreable.

Demostración Los movimientos de Reidemeister conservan la propiedad de coloración.

Corolario Un nudo trivial no es coloreable.

Teorema Si un diagrama de un nudo K es coloreable entonces todo diagrama de K es coloreable.

Demostración Los movimientos de Reidemeister conservan la propiedad de coloración.

Corolario Un nudo trivial no es coloreable.

Corolario El trébol no es trivial.

Teorema Si un diagrama de un nudo K es coloreable entonces todo diagrama de K es coloreable.

Demostración Los movimientos de Reidemeister conservan la propiedad de coloración.

Corolario Un nudo trivial no es coloreable.

Corolario El trébol no es trivial.

Corolario Si un enlace es separable entonces es coloreable.