Empaquetamientos de Apolonio, politopos y teorema de Descartes

J. L. Ramírez Alfonsín

Université de Montpellier

Trabajo en colaboración con I. Rasskin

Universidad de La Laguna, Tenerife

16 septiembre 2021

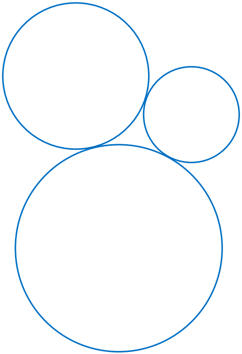
Apolonio de Perga

262 a.C. - 190 a.C. (72 años)

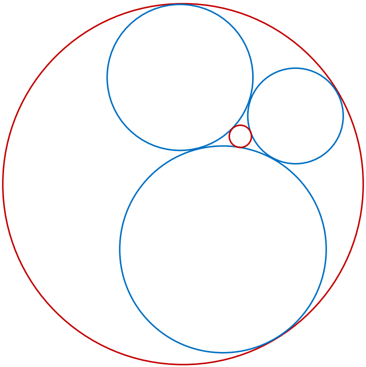
- Conocido como "El gran geometra"
- Su libro famoso *Conics* introduce los terminos de hyperbola y elipse.

Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutuamente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.

Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutuamente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.

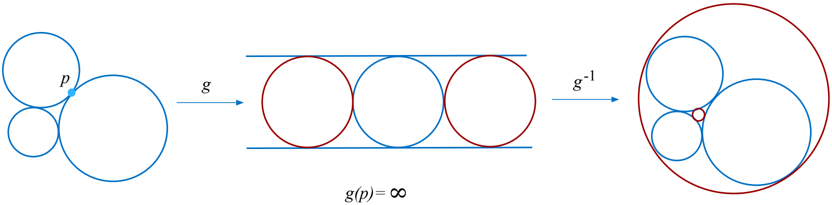


Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutuamente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.

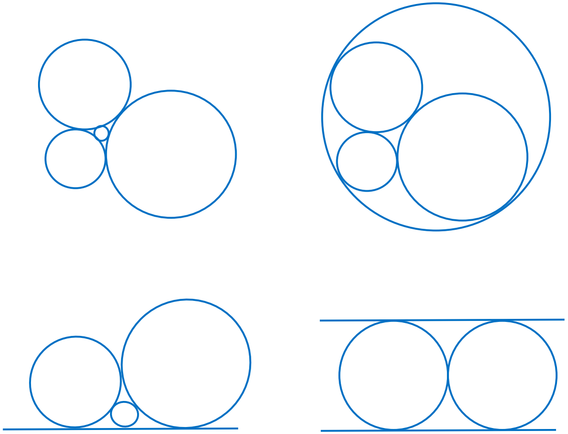


Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutuamente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.

Prueba (idea) :



Posibles representaciones de 4 circulos mutuamente tangentes



Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes

Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)

Empaquetamientos de Apolonio : construcción

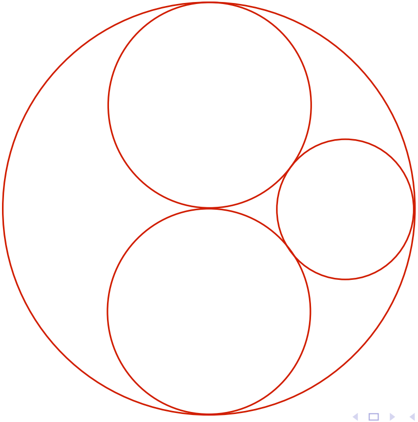
- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)
- Agreguemos otros nuevos circulos a la nueva configuración

Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)
- Agreguemos otros nuevos circulos a la nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente

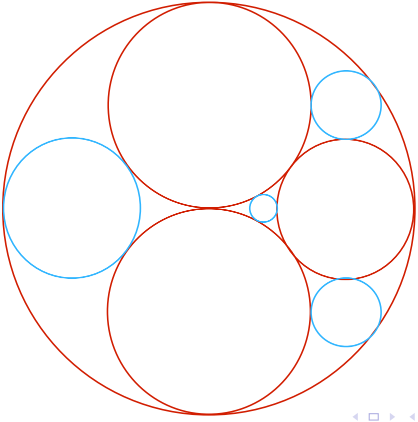
Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)
- Agreguemos otros nuevos circulos a la nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente



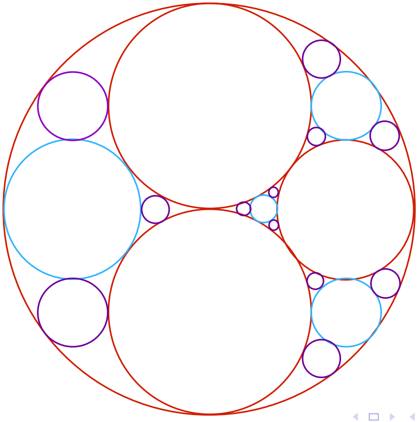
Empaquetamientos de Apolonio : construcción

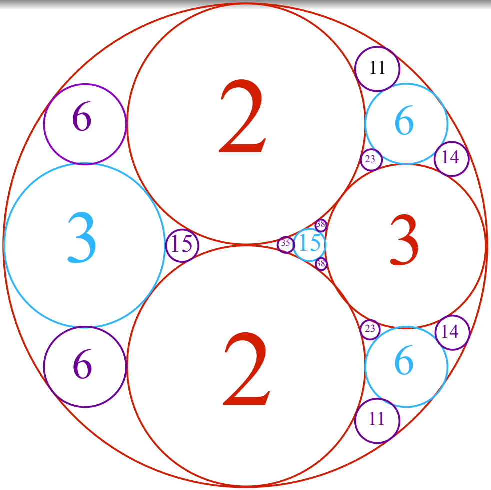
- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)
- Agreguemos nuevos circulos a la nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente



Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)
- Agreguemos nuevos circulos a la nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente





Cada circulo etiquetado con su curvatura : $curv(C) = \frac{1}{radio(C)}$
La curvatura del circulo exterior es -1 (orientado al exterior para que los interiores sean disjuntos).

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ?

Teorema de Descartes

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ? SI

Teorema de Descartes

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ? SI

Teorema (Descartes 1643) Si a, b, c, d son las curvaturas de cuatro circulos mutuamente tangentes si y solo si satisface la ecuación cuadrática $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$

Teorema de Descartes

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ? SI

Teorema (Descartes 1643) Si a, b, c, d son las curvaturas de cuatro circulos mutuamente tangentes si y solo si satisface la ecuación cuadrática $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$

La démostración en una carta a la Princesa Elisabeth of Bohemia

Teorema (Soddy 1936) Si los cuatro primeros circulos de un empaquetamiento Apolonio $\mathcal{P}$ tienen curvaturas enteras entonces $\mathcal{P}$ es integral.

Resultados relacionados

Teorema (Soddy 1936) Si los cuatro primeros circulos de un empaquetamiento Apolonio $\mathcal{P}$ tienen curvaturas enteras entonces $\mathcal{P}$ es integral.

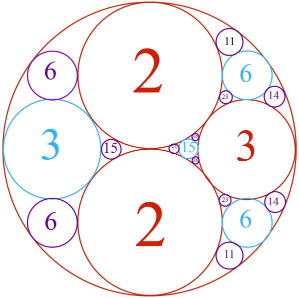
Teorema (Soddy-Gosset 1937) Las curvaturas $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d+2}$ de $d+2$ d-bolas en $\mathbb{R}^d$ tangentes por parejas verifican $d(\kappa_1^2 + \cdots \kappa_{d+2}^2) = (\kappa_1 + \cdots + \kappa_{d+2})^2$.

Teorema (Soddy 1936) Si los cuatro primeros circulos de un empaquetamiento Apolonio $\mathcal{P}$ tienen curvaturas enteras entonces $\mathcal{P}$ es integral.

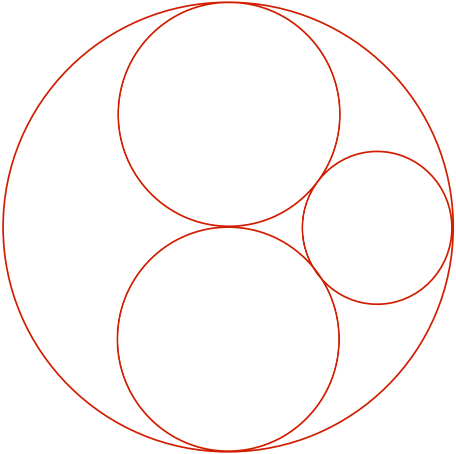
Teorema (Soddy-Gosset 1937) Las curvaturas $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d+2}$ de $d+2$ d-bolas en $\mathbb{R}^d$ tangentes por parejas verifican $d(\kappa_1^2 + \cdots \kappa_{d+2}^2) = (\kappa_1 + \cdots + \kappa_{d+2})^2$.

Ejemplo

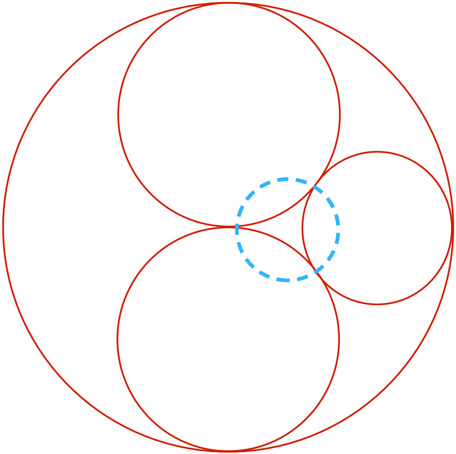
$$2((-1)^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2) = 36 = (-1+2+2+3)^2$$
$$2(2^2 + 6^2 + 3^2 + 23^2) = 1156 = (2+6+3+23)^2$$



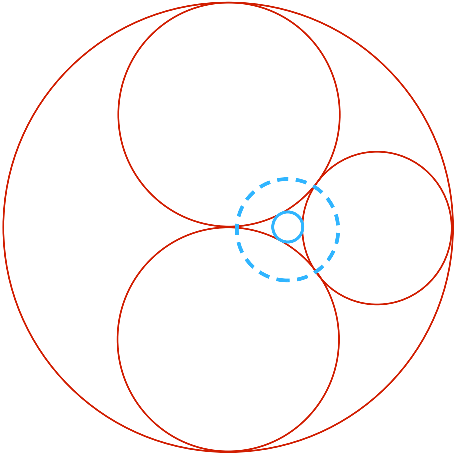
A partir del Tetraedro



A partir del Tetraedro

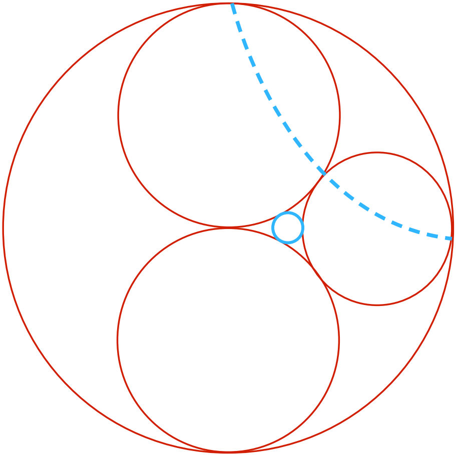


A partir del Tetraedro

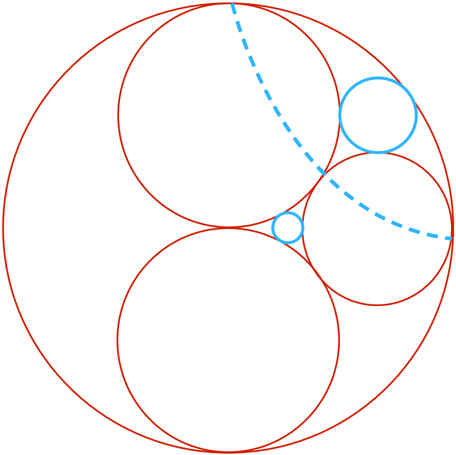


Empaquetamientos utilizando inversiones

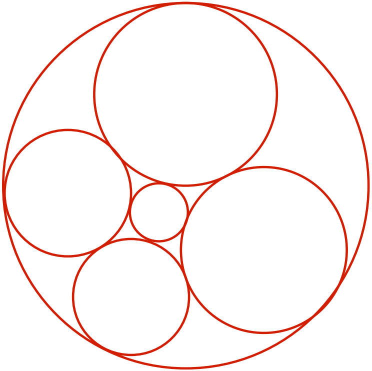
A partir del Tetraedro



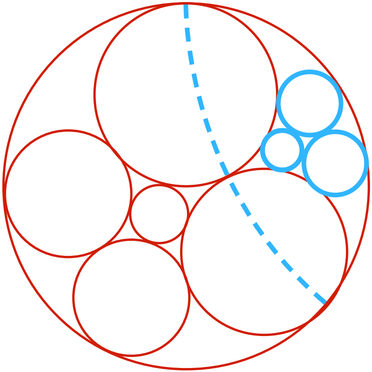
A partir del Tetraedro



A partir del Octaedro

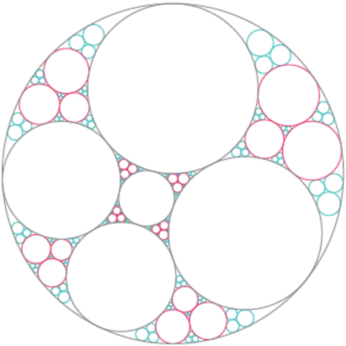


A partir del Octaedro

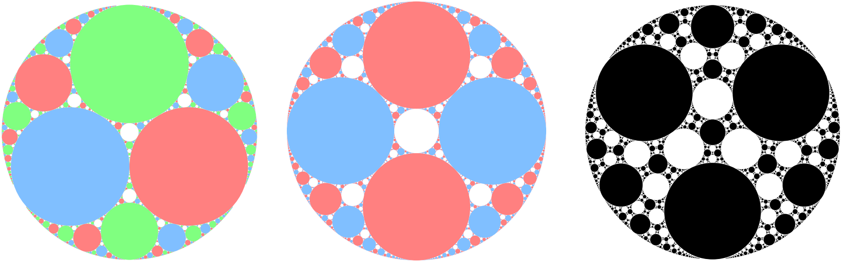


Otros empaquetamientos utilizando inversiones

A partir del Octaedro



A partir del Tetraedro, Octaedro y el Cubo



Figuras realizadas con un software programado por I. Rasskin

Algunas preguntas

Es natural preguntarse

Algunas preguntas

Es natural preguntarse

Pregunta 1 ¿ Qué números enteros aparecen como curvaturas en un empaquetamiento ?

Algunas preguntas

Es natural preguntarse

Pregunta 1 ¿ Qué números enteros aparecen como curvaturas en un empaquetamiento ?

Pregunta 2 ¿ Que podemos decir sobre empaquetamientos de d-bolas en $\mathbb{R}^d$?

Algunas preguntas

Es natural preguntarse

Pregunta 1 ¿ Qué números enteros aparecen como curvaturas en un empaquetamiento ?

Pregunta 2 ¿ Que podemos decir sobre empaquetamientos de d-bolas en $\mathbb{R}^d$?

Pregunta 3 ¿ Existen otras relaciones de tipo-Descartes ?

Un poco sobre la teoria de Lorenzianos

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

El vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$ se llama *space-like* si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ y *normalizado* si $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle| = 1$.

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

El vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$ se llama *space-like* si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ y *normalizado* si $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle| = 1$.

- Existe una biyección entre el espacio de d-bolas $Ball(\hat{\mathbb{R}}^d)$ en $\hat{\mathbb{R}}^d := \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ y el conjunto de vectores space-like normalizados de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

El vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$ se llama *space-like* si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$ y *normalizado* si $|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle| = 1$.

• Existe una biyección entre el espacio de d-bolas $Ball(\hat{\mathbb{R}}^d)$ en $\hat{\mathbb{R}}^d := \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ y el conjunto de vectores space-like normalizados de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

• El *grupo de Möbius* $\text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}^d)$ es el grupo generado por las inversiones de d-bolas.

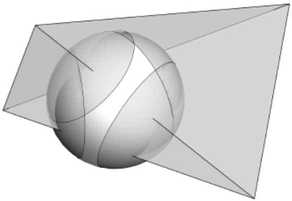
Arreglo de bolas

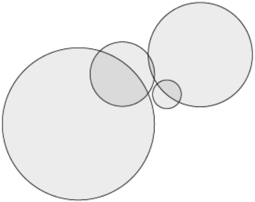
Sea P un $(d+1)$-politopo *esfera-exterior* (vertices afuera de la esfera)

Arreglo de bolas

Sea P un $(d+1)$-politopo *esfera-exterior* (vertices afuera de la esfera)

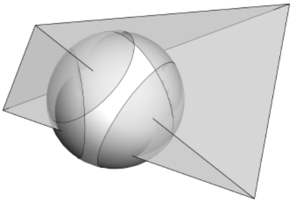
El *arreglo de bolas proyectado* de P, $B(P)$, es la colección de d-bolas cuyas *fuentes de luz* son los vértices de P.

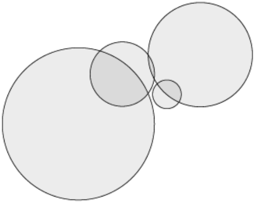




Arreglo de bolas

Sea P un $(d+1)$-politopo *esfera-exterior* (vertices afuera de la esfera)
El *arreglo de bolas proyectado* de P, $B(P)$, es la colección de d-bolas cuyas *fuentes de luz* son los vértices de P.





Si P es un $(d+1)$-politopo *arista-inscribible* (i.e., todas las aristas de P son tangentes a $\mathbb{S}^d$) entonces $B(P)$ es un *empaquetamiento de d-bolas B_P*.

Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\hat{\mathbb{R}}^d)$ tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

Empaquetamientos polytopales

Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\hat{\mathbb{R}}^d)$ tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

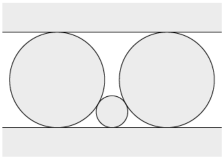
Observaciones

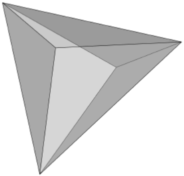
- el grafo de tangencia de B_P y el esqueleto de P son isomorfos.
- No todos los empaquetamientos de d-bolas son politopales

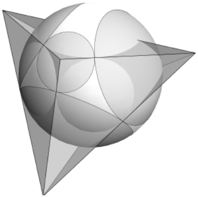
Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\hat{\mathbb{R}}^d)$ tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

Observaciones

- el grafo de tangencia de B_P y el esqueleto de P son isomorfos.
- No todos los empaquetamientos de d-bolas son politopales





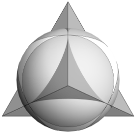
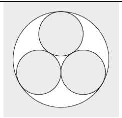
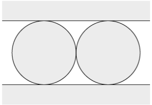
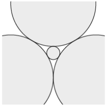
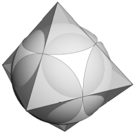
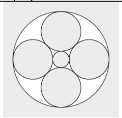
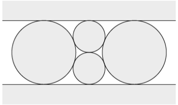
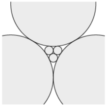


Proyecciones de empaquetamientos centrados

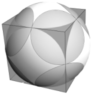
Realización arista-inscribible de un $(d+1)$-politopo regular.
La proyección *centrada* es la colección de proyecciones de las bolas con una k-cara cuyo baricentro esta en el rayo generado a partir del polo Norte.

Proyecciones de empaquetamientos centrados

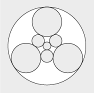
Realización arista-inscribible de un $(d+1)$-politopo regular.
La proyección *centrada* es la colección de proyecciones de las bolas con una k-cara cuyo baricentro esta en el rayo generado a partir del polo Norte.

<table>
<tr><th>Edge-scribed realization</th><th>Vertex centered at ∞</th><th>Edge centered at ∞</th><th>Face centered at ∞</th></tr>
<tr>
<td>
$\ell_{\{3,3\}} = \sqrt{2}$</td>
<td>
<table><tr><th>n</th><th>κ</th></tr><tr><td>1</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{3})$</td></tr><tr><td>3</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{1/3})$</td></tr></table></td>
<td>
<table><tr><th>n</th><th>κ</th></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>$\sqrt{2}$</td></tr></table></td>
<td>
<table><tr><th>n</th><th>κ</th></tr><tr><td>3</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{1/3})$</td></tr><tr><td>1</td><td>$\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3})$</td></tr></table></td>
</tr>
<tr>
<td>
$\ell_{\{3,4\}} = 1$</td>
<td>
<table><tr><th>n</th><th>κ</th></tr><tr><td>1</td><td>$1-\sqrt{2}$</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>$1+\sqrt{2}$</td></tr></table></td>
<td>
<table><tr><th>n</th><th>κ</th></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>2</td><td>1</td></tr><tr><td>2</td><td>2</td></tr></table></td>
<td>
<table><tr><th>n</th><th>κ</th></tr><tr><td>3</td><td>$1-\sqrt{2/3}$</td></tr><tr><td>3</td><td>$1+\sqrt{2/3}$</td></tr></table></td>
</tr>
</table>

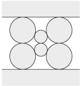
Proyecciones de empaquetamientos centrados



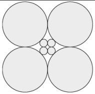
$\ell_{\{4,3\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



n	κ
1	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$
3	$\sqrt{2}-\sqrt{1/3}$
3	$\sqrt{2}+\sqrt{1/3}$
1	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

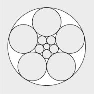


n	κ
2	0
4	$\sqrt{2}$
2	$2\sqrt{2}$

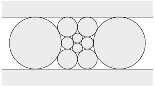


n	κ
4	$\sqrt{2}-1$
4	$\sqrt{2}+1$

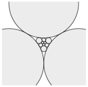
$\ell_{\{3,5\}} = \frac{1}{\varphi}$



n	κ
1	$\varphi-\sqrt{\varphi+2}$
5	$\varphi-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}$
5	$\varphi+\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}$
1	$\varphi+\sqrt{\varphi+2}$

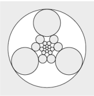


n	κ
2	0
2	$\varphi-1$
4	φ
2	$\varphi+1$
2	2φ

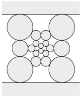


n	κ
3	$\varphi-\varphi^2\sqrt{1/3}$
3	$\varphi-\varphi^{-1}\sqrt{1/3}$
3	$\varphi+\varphi^{-1}\sqrt{1/3}$
3	$\varphi+\varphi^2\sqrt{1/3}$

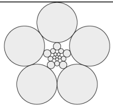
$\ell_{\{5,3\}} = \frac{1}{\varphi^2}$



n	κ
1	$\varphi^2-\varphi\sqrt{3}$
3	$\varphi^2-\varphi\sqrt{5/3}$
6	$\varphi^2-\varphi\sqrt{1/3}$
6	$\varphi^2+\varphi\sqrt{1/3}$
3	$\varphi^2+\varphi\sqrt{5/3}$
1	$\varphi^2+\varphi\sqrt{3}$



n	κ
2	0
4	$\varphi^2-\varphi$
2	φ^2-1
4	φ^2
2	φ^2+1
4	$\varphi^2+\varphi$
2	$2\varphi^2$



n	κ
5	$\varphi^2-\sqrt{\frac{1}{5}(7+11\varphi)}$
5	$\varphi^2-\sqrt{\frac{1}{5}(3-\varphi)}$
5	$\varphi^2+\sqrt{\frac{1}{5}(3-\varphi)}$
5	$\varphi^2+\sqrt{\frac{1}{5}(7+11\varphi)}$

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.
- B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.
- B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
- Existe una transformación de Möbius μ tal que $\mu(B_P) = B(P_0)$.

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.
- B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
- Existe una transformación de Möbius μ tal que $\mu(B_P) = B(P_0)$.
- El *dual* de B_P es el arreglo de bolas $B_P^* := \mu^{-1}(B(P^*))$.

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.
- B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
- Existe una transformación de Möbius μ tal que $\mu(B_P) = B(P_0)$.
- El *dual* de B_P es el arreglo de bolas $B_P^* := \mu^{-1}(B(P^*))$.
- Como P_0 es arista-inscribible P_0^* es *ridge-scribed* ($(d-1)$-cara inscribible).

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.
- B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
- Existe una transformación de Möbius μ tal que $\mu(B_P) = B(P_0)$.
- El *dual* de B_P es el arreglo de bolas $B_P^* := \mu^{-1}(B(P^*))$.
- Como P_0 es arista-inscribible P_0^* es *ridge-scribed* ($(d-1)$-cara inscribible).
- $d = 2$, P_0^* es también arista-inscribible y entonces B_P and B_P^* son ambos empaquetamientos de discos.

Dualidad

- P un $(d+1)$-politopo arista-inscribible.
- P_0 una realización de P conteniendo el origen.
- B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
- Existe una transformación de Möbius μ tal que $\mu(B_P) = B(P_0)$.
- El *dual* de B_P es el arreglo de bolas $B_P^* := \mu^{-1}(B(P^*))$.
- Como P_0 es arista-inscribible P_0^* es *ridge-scribed* ($(d-1)$-cara inscribible).
- $d = 2$, P_0^* es también arista-inscribible y entonces B_P and B_P^* son ambos empaquetamientos de discos.
- La union de $B_P \cup B_P^*$ es llamado *representación primal-dual* de P.

Ejemplo de dualidad

Teorema (Brightwell, Scheinerman) Siempre existe una única representación (bajo una posible transformación de Möbius) primal-dual para todo poliedro.

Ejemplo de dualidad

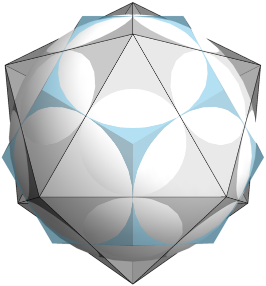
Teorema (Brightwell, Scheinerman) Siempre existe una única representación (bajo una posible transformación de Möbius) primal-dual para todo poliedro.

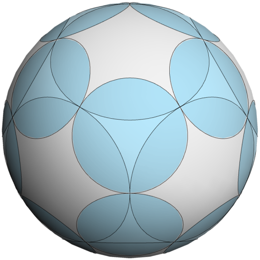
- Considerado como una version mas fuerte del conocido teorema de empaquetamientos de circulos de Koebe-Andreev-Thurston.

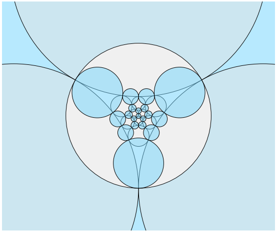
Ejemplo de dualidad

Teorema (Brightwell, Scheinerman) Siempre existe una única representación (bajo una posible transformación de Möbius) primal-dual para todo poliedro.
- Considerado como una version mas fuerte del conocido teorema de empaquetamientos de circulos de Koebe-Andreev-Thurston.

Un icosaedro arista-inscribible y su polar en azul.







Möbius unicidad

Dos empaquetamientos de d-bolas B y B' son *Möbius equivalentes* si uno puede enviar uno al otro con una transformación de Möbius.

Dos empaquetamientos de d-bolas B y B' son *Möbius equivalentes* si uno puede enviar uno al otro con una transformación de Möbius.

Un $(d+1)$-politopo arista-inscribible es *Möbius único* si las proyecciones de arreglo de bolas de todas sus realizaciones arista-inscribible son Möbius eqivalentes.

Dos empaquetamientos de d-bolas B y B' son *Möbius equivalentes* si uno puede enviar uno al otro con una transformación de Möbius.

Un $(d+1)$-politopo arista-inscribible es *Möbius único* si las proyecciones de arreglo de bolas de todas sus realizaciones arista-inscribible son Möbius eqivalentes.

Teorema (Rasskin + R.A. 2021)
a) El único poligono Möbius único es el triangulo.
b) El $(d+1)$-simplex es Möbius único, para todo $d \geq 1$.
c) El $(d+1)$-cubo es Möbius único, para todo $d \geq 2$.

Möbius unicidad

Dos empaquetamientos de d-bolas B y B' son *Möbius equivalentes* si uno puede enviar uno al otro con una transformación de Möbius.

Un $(d+1)$-politopo arista-inscribible es *Möbius único* si las proyecciones de arreglo de bolas de todas sus realizaciones arista-inscribible son Möbius eqivalentes.

Teorema (Rasskin + R.A. 2021)
a) El único poligono Möbius único es el triangulo.
b) El $(d+1)$-simplex es Möbius único, para todo $d \geq 1$.
c) El $(d+1)$-cubo es Möbius único, para todo $d \geq 2$.

Prueba (idea) : B Möbius equivalente B' sss $Gram(B) = Gram(B')$ dónde

$$Gram(B) = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \end{pmatrix}$$

$B = \{v_1, \dots v_n\} \subset \mathbb{R}^{d+1,1}$

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$
El grupo *Apoloniano* : $A(B_P) := \langle S(B_P^*) \rangle$ dónde $S(B_P^*)$ es el conjunto de inversiones de las d-bolas de B_P^*

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$
El grupo *Apoloniano* : $A(B_P) := \langle S(B_P^*) \rangle$ dónde $S(B_P^*)$ es el conjunto de inversiones de las d-bolas de B_P^*
El grupo *Super Simétrico Apoloniano* :
$SSA(B_P) := \langle Sym(B_P) \cup A(B_P) \cup A(B_P^*) \rangle$

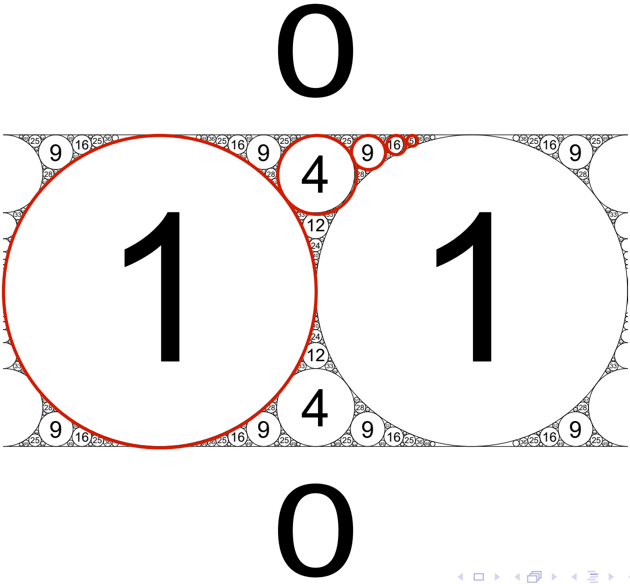
Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal.
El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\hat{\mathbb{R}}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$
El grupo *Apoloniano* : $A(B_P) := \langle S(B_P^*) \rangle$ dónde $S(B_P^*)$ es el conjunto de inversiones de las d-bolas de B_P^*
El grupo *Super Simétrico Apoloniano* :
$SSA(B_P) := \langle Sym(B_P) \cup A(B_P) \cup A(B_P^*) \rangle$

Teorema (Rasskin + R.A. 2021)

Existen empaquetamientos del tetraedrales, cúbicos y dodecaedrales de Apolonio donde el conjunto de curvaturas contienen todos los cuadrados perfectos.

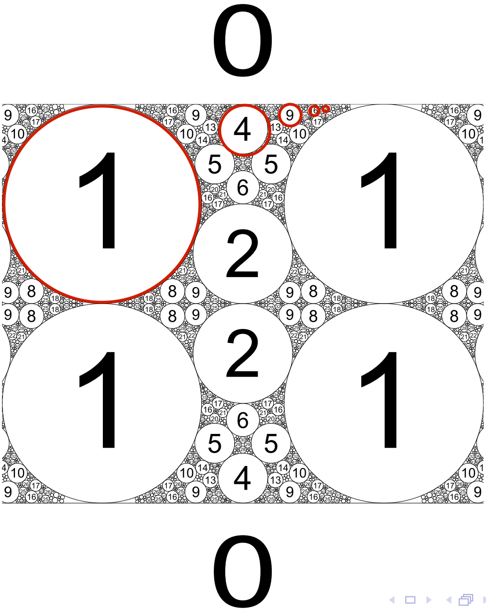
Ejemplo de empaquetamiento

Tetraedral



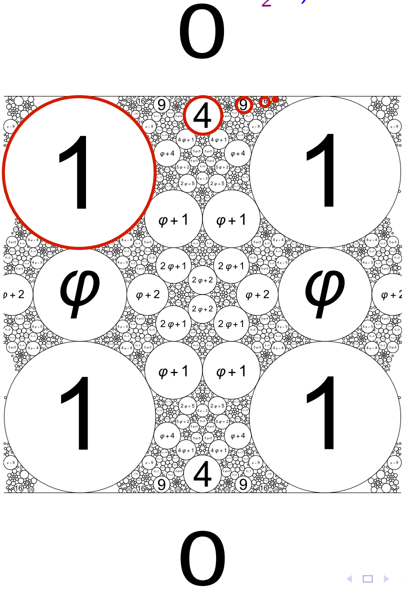
Ejemplo de empaquetamiento

Cúbico



Ejemplo de empaquetamiento

Dodecaedral (φ es el número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)



Curvaturas Lorentzianas de politopos

Para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$, definamos

$$\kappa(\mathbf{x}) = -\langle \mathbf{x}_N, \mathbf{x} \rangle$$

dónde $\mathbf{x}_N = (e_{d+1} + e_{d+2})$ con e_i vector canónico de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$, definamos

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x} \rangle$$

dónde $\boldsymbol{x}_N = (e_{d+1} + e_{d+2})$ con e_i vector canónico de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Notemos que si $\boldsymbol{x}$ es space-like normalizado entonces

(curvatura de b) $\qquad \kappa(b) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_b \rangle$

Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$, definamos

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x} \rangle$$

dónde $\boldsymbol{x}_N = (e_{d+1} + e_{d+2})$ con e_i vector canónico de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Notemos que si $\boldsymbol{x}$ es space-like normalizado entonces

(curvatura de b) $\quad \kappa(b) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_b \rangle$

Sea $P \subset E^{d+1}$ esfera-exterior. El *baricentro Lorentziano* de P es

$$\boldsymbol{x}_P := \frac{1}{|\mathcal{F}_0(P)|} \sum_{v \in \mathcal{F}_0(P)} \boldsymbol{x}_{b(v)}$$

dónde $b(v)$ es la région iluminada a partir de v.

La *curvatura Lorentziana* de P es definida commo

$$\kappa_P := \kappa(\boldsymbol{x}_P)$$

Curvaturas Lorentzianas de politopos

La *curvatura Lorentziana* de P es definida commo

$$\kappa_P := \kappa(\boldsymbol{x}_P)$$

Por linearidad tenemos que

$$\kappa_P := \frac{1}{|\mathcal{F}_0(P)|} \sum_{v \in \mathcal{F}_0(P)} \kappa(b(v))$$

Resultado

Teorema (Rasskin + R.A. 2021) Sea $d \geq 1$. Tomemos una realización arista-inscribible de un $(d+1)$-politopo regular P con simbolos de Schläfli $\{p_1, \ldots, p_d\}$. Las curvaturas Lorentzianas de una *bandera* $(f_0, f_1, \ldots, f_d, f_{d+1} = P)$ satisface

$$\kappa_P^2 = L_P(d+1) \sum_{i=0}^{d} \frac{(\kappa_{f_i} - \kappa_{f_{i+1}})^2}{L_P(i+1) - L_P(i)}$$

con

$$L_P(i) := \begin{cases} -1 & i = 0 \\ 0 & i = 1 \\ \ell_{\{p_1,\ldots,p_{i-1}\}}^{-2} & \text{if } 2 \leq i \leq d+1 \end{cases}$$

dónde $\ell_{\{p_1,\ldots,p_{i-1}\}}$ es la mitad de la longitud de una arista de la ralización arista-inscribible de la cara regular f_i.

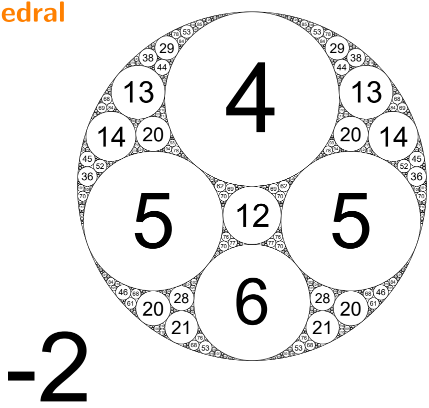
Integralidad empaquetamientos Octaedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal octaedral B_O. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_O es integral.

Integralidad empaquetamientos Octaedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal octaedral B_O. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_O es integral.

Octaedral

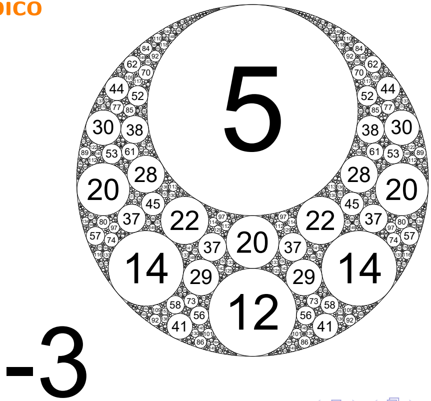


Integralidad empaquetamientos Cúbico

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal cúbico B_C. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_C es integral.

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal cúbico B_C. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_C es integral.

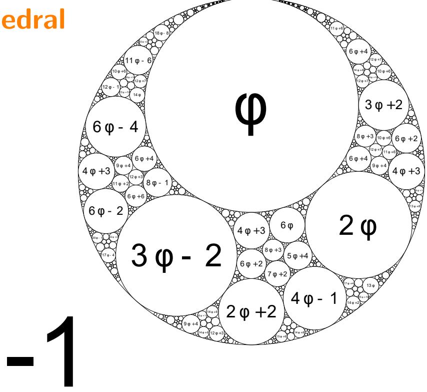
Cúbico



Integralidad empaquetamientos Icoedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal icoaedral B_I. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_I es φ-integral.

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal icoaedral B_I. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_I es φ-integral.

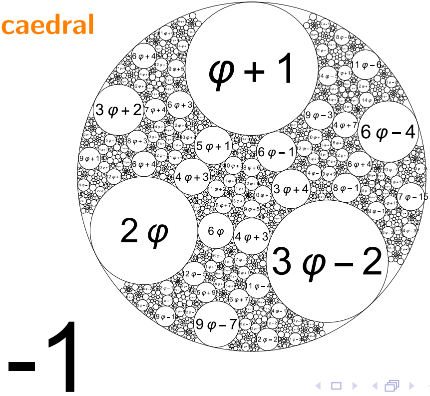


Integralidad empaquetamientos Dodecaedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal dodecaedral B_D. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\varphi^2\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_D es φ-integral.

Proposición (Rasskin + R.A. 2021) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal dodecaedral B_D. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\varphi^2\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_D es φ-integral.

Dodecaedral



Gracias por su atención ! !