Empaquetamientos de Apolonio: un paseo amistoso

J. L. Ramírez Alfonsín

Université de Montpellier

ATENEO, Universidad de Valladolid

2 marzo 2023

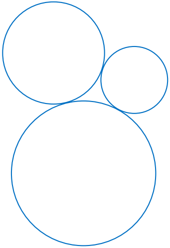
Apolonio de Perga

262 a.C. - 190 a.C. (72 años)

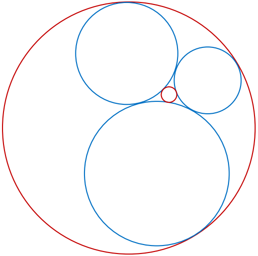
- Conocido como "El gran geometra"
- Su libro famoso *Conics* introduce los terminos de hyperbola y elipse.

Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutualmente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.

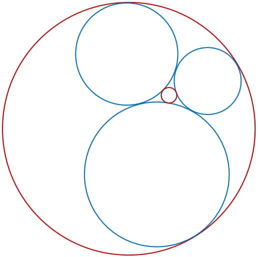
Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutualmente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.



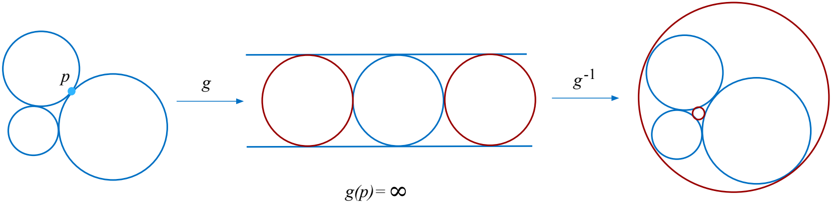
Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutuamente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.



Teorema (Apolonio de Perga) Dados 3 circulos mutuamente tangentes existen exactamente dos circulos tangentes a los tres.



Prueba (idea) :

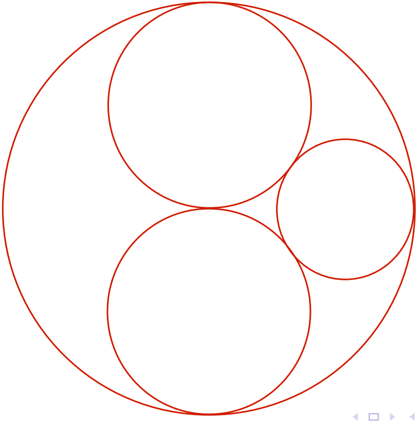


Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutualmente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos que son tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio) y asi obteniendo una nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente ...

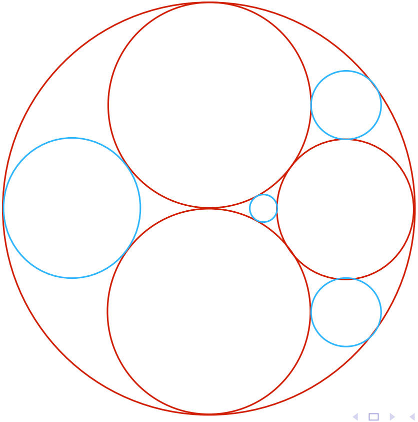
Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutualmente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos que son tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio) y asi obteniendo una nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente ...



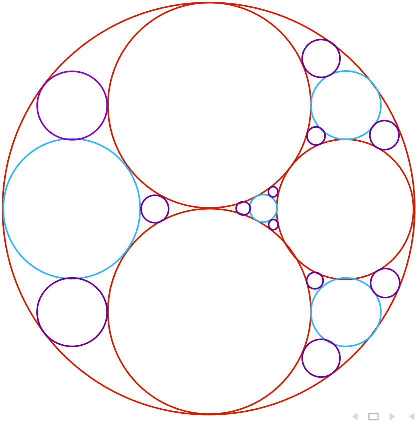
Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos que son tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio) y asi obteniendo una nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente ...



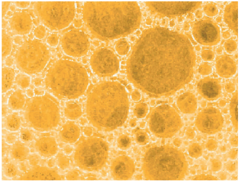
Empaquetamientos de Apolonio : construcción

- Tomemos 4 circulos mutuamente tangentes
- Agreguemos nuevos circulos tangentes a 3 de los cuatro circulos (previsto por Teorema de Apolonio)
- Agreguemos nuevos circulos a la nueva configuración
- Continuemos el procedimiento indifinidamente

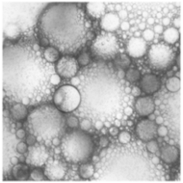


Motivación

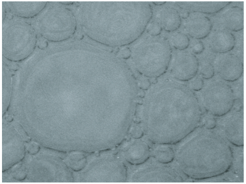
Empaquetamientos de Apolonio atractivos para estudiar :



Sistemas granulares



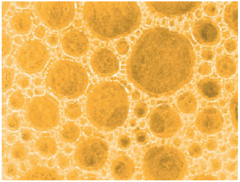
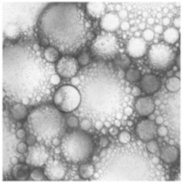
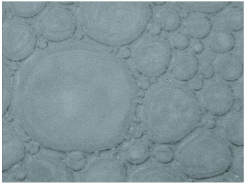
Emulsiones fluidas



Burbujas en espumas

Motivación

Empaquetamientos de Apolonio atractivos para estudiar :

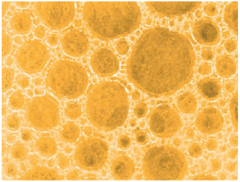
  

Sistemas granulares Emulsiones fluidas Burbujas en espumas

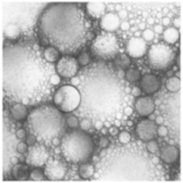
Aplicaciones : geometria hyperbolica, fractales, grupos geométricos,

Motivación

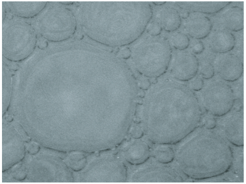
Empaquetamientos de Apolonio atractivos para estudiar :



Sistemas granulares

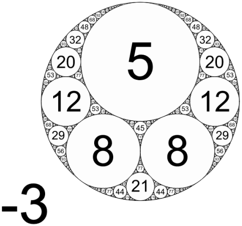


Emulsiones fluidas

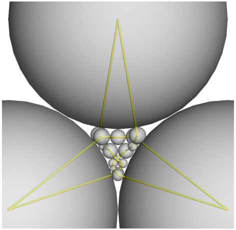


Burbujas en espumas

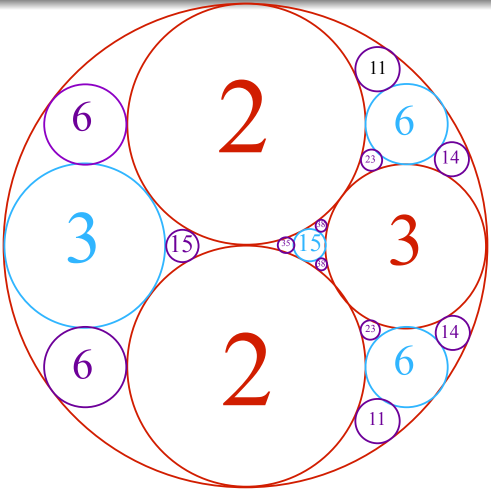
Aplicaciones : geometria hyperbolica, fractales, grupos geométricos,



Teoria de numeros



Teoria de nudos



Cada circulo etiquetado con su curvatura : $curv(C) = \frac{1}{radio(C)}$

La curvatura del circulo exterior es -1 (orientado al exterior para que los interiores sean disjuntos).

Teorema de Descartes

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ?

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ? SI

Teorema de Descartes

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ? SI

Teorema (Descartes 1643) Si a, b, c, d son las curvaturas de cuatro circulos mutualmente tangentes si y solo si satisfacen la ecuación cuadrática $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$

Teorema de Descartes

Un empaquetamiento Apolonio es integral si todas sus curvaturas son enteras.

Pregunta : ¿Existe algun empaquetamiento Apolonio integral ? SI

Teorema (Descartes 1643) Si a, b, c, d son las curvaturas de cuatro circulos mutualmente tangentes si y solo si satisfacen la ecuación cuadrática $2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) = (a + b + c + d)^2$

La démostración en una carta a la Princesa Elisabeth of Bohemia

Generalizando Descartes

Teorema (Soddy 1936) Si los cuatro primeros circulos de un empaquetamiento Apolonio $\mathcal{P}$ tienen curvaturas enteras entonces $\mathcal{P}$ es integral.

Teorema (Soddy 1936) Si los cuatro primeros circulos de un empaquetamiento Apolonio $\mathcal{P}$ tienen curvaturas enteras entonces $\mathcal{P}$ es integral.

Prueba (idea) : Resolviendo $2(a^2+b^2+c^2+d^2)=(a+b+c+d)^2$ para d, encontramos que si a, b, c y $\sqrt{ab+ac+bc}$ son enteros entonces el empaquetamiento es integral.

Teorema (Soddy 1936) Si los cuatro primeros circulos de un empaquetamiento Apolonio $\mathcal{P}$ tienen curvaturas enteras entonces $\mathcal{P}$ es integral.

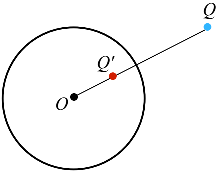
Prueba (idea) : Resolviendo $2(a^2+b^2+c^2+d^2) = (a+b+c+d)^2$ para d, encontramos que si a, b, c y $\sqrt{ab+ac+bc}$ son enteros entonces el empaquetamiento es integral.

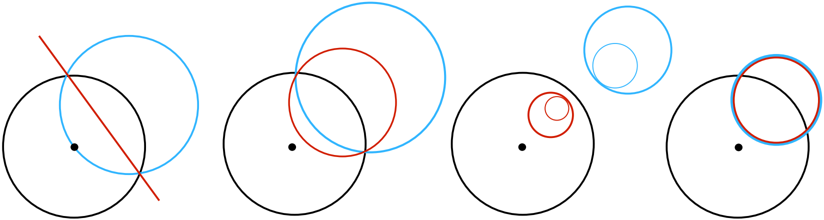
Teorema (Soddy-Gosset 1937) Las curvaturas $\kappa_1, \ldots, \kappa_{d+2}$ de $d+2$ d-bolas en $\mathbb{R}^d$ tangentes por parejas verifican $d(\kappa_1^2 + \cdots \kappa_{d+2}^2) = (\kappa_1 + \cdots + \kappa_{d+2})^2$.

Inversion con respecto a un circulo

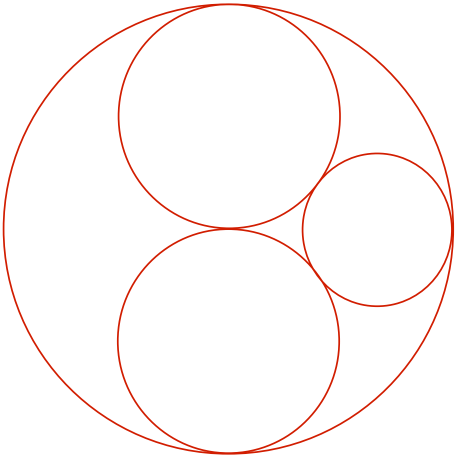
El inverso del punto Q con respecto a un circulo de centro O y radio r es el punto Q' que esta en el segmento $[O, Q]$ tal que $d(O, Q) \cdot d(O, Q') = r^2$.

El inverso del punto Q con respecto a un circulo de centro O y radio r es el punto Q' que esta en el segmento $[O, Q]$ tal que $d(O, Q) \cdot d(O, Q') = r^2$.

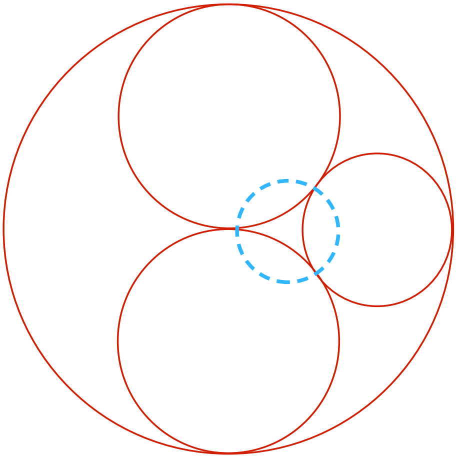




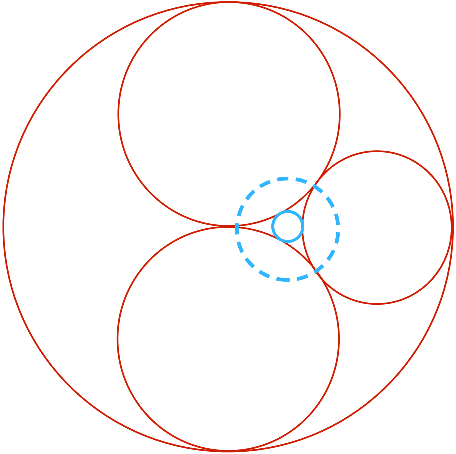
A partir del Tetraedro



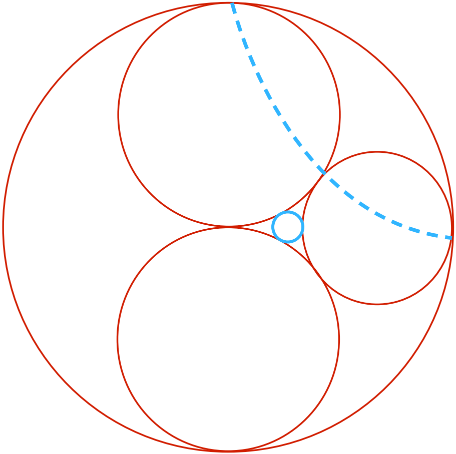
A partir del Tetraedro



A partir del Tetraedro

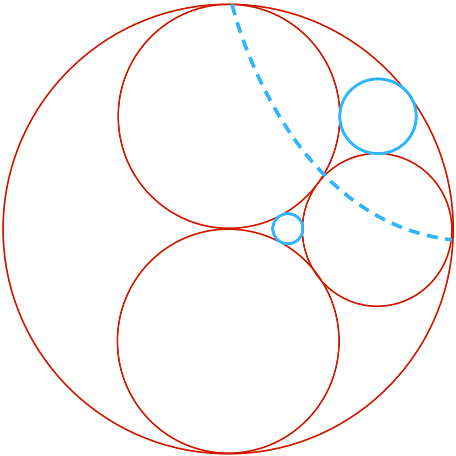


A partir del Tetraedro

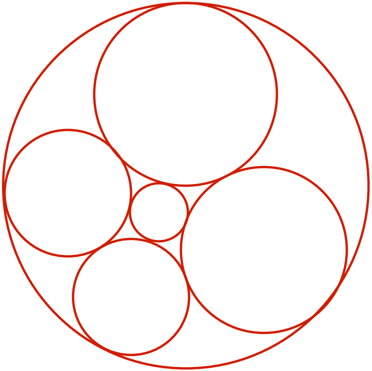


Empaquetamientos utilizando inversiones

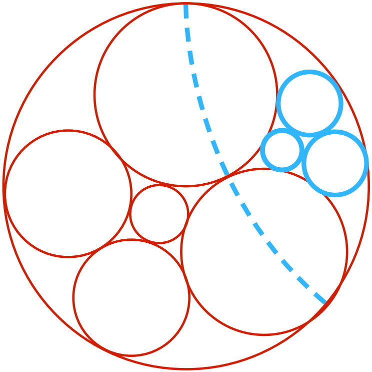
A partir del Tetraedro



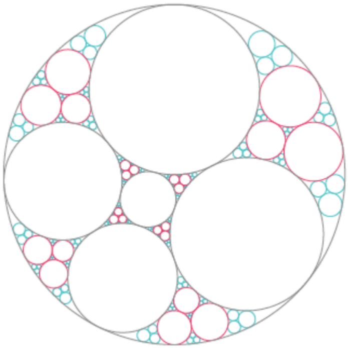
A partir del Octaedro



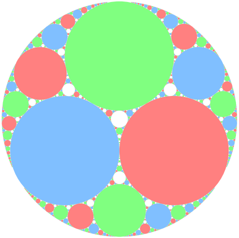
A partir del Octaedro

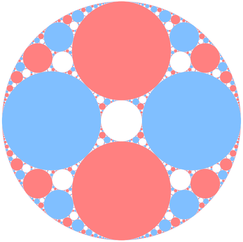


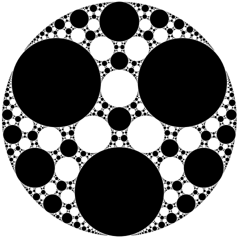
A partir del Octaedro



Empaquetamientos a partir de el Tetraedro, el Octaedro y el Cubo

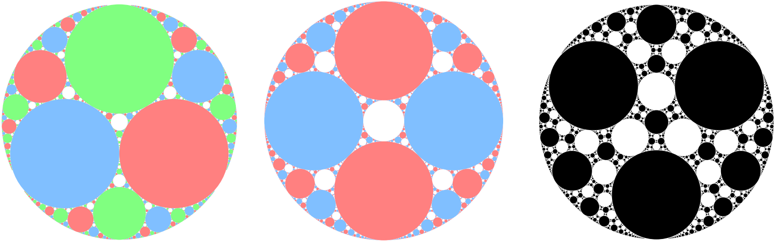






(figuras realizadas con un software programado por I. Rasskin)

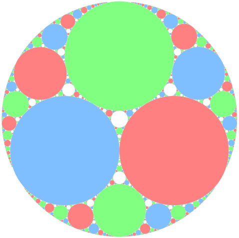
Empaquetamientos a partir de el Tetraedro, el Octaedro y el Cubo

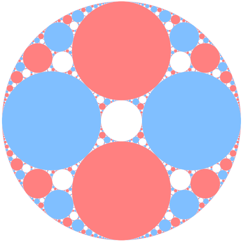


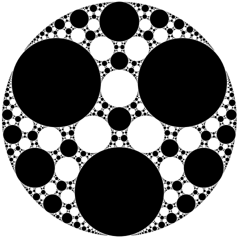
(figuras realizadas con un software programado por I. Rasskin)

Pregunta 1 ¿ Qué números enteros aparecen como curvaturas en un empaquetamiento ?

Empaquetamientos a partir de el Tetraedro, el Octaedro y el Cubo





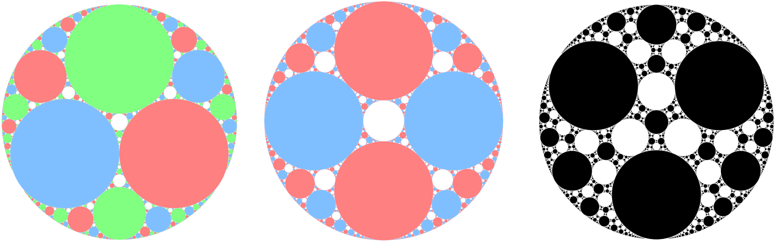


(figuras realizadas con un software programado por I. Rasskin)

Pregunta 1 ¿ Qué números enteros aparecen como curvaturas en un empaquetamiento ?

Pregunta 2 ¿ Que podemos decir sobre empaquetamientos de d-bolas en $\mathbb{R}^d$?

Empaquetamientos a partir de el Tetraedro, el Octaedro y el Cubo



(figuras realizadas con un software programado por I. Rasskin)

Pregunta 1 ¿ Qué números enteros aparecen como curvaturas en un empaquetamiento ?

Pregunta 2 ¿ Que podemos decir sobre empaquetamientos de d-bolas en $\mathbb{R}^d$?

Pregunta 3 ¿ Existen otras relaciones de tipo-Descartes ?

Un poco sobre la teoria de Lorenzianos

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

El vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$ se llama *space-like* si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$

Un poco sobre la teoria de Lorenzianos

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

El vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$ se llama *space-like* si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$

- Existe una biyección entre el espacio de d-bolas $Ball(\widehat{\mathbb{R}^d})$ en $\widehat{\mathbb{R}^d} := \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ y el conjunto de vectores space-like normalizados de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Un poco sobre la teoria de Lorenzianos

Sea $d \geq 1$. El *espacio Lorentziano* $\mathbb{L}^{d+1,1}$, de dimension $d+2$, es el espacio vectorial de dimension $d+2$ dotado del *producto Lorentziano*

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_{d+1} y_{d+1} - x_{d+2} y_{d+2}, \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$$

El vector $\boldsymbol{v} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$ se llama *space-like* si $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle > 0$

- Existe una biyección entre el espacio de d-bolas $Ball(\widehat{\mathbb{R}^d})$ en $\widehat{\mathbb{R}^d} := \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}$ y el conjunto de vectores space-like normalizados de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

$$\langle v_b, v_{b'} \rangle \begin{cases} > 1 & \text{if } b \text{ and } b' \text{ are nested} \\ = 1 & \text{if } b \text{ and } b' \text{ are internally tangent} \\ = 0 & \text{if } b \text{ and } b' \text{ are orthogonal} \\ = -1 & \text{if } b \text{ and } b' \text{ are externally tangent} \\ < -1 & \text{if } b \text{ and } b' \text{ are disjoint} \end{cases}$$

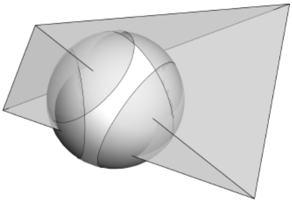
Arreglo de bolas

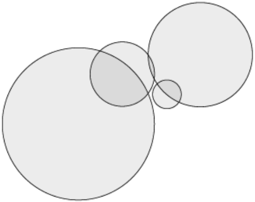
Sea P un $(d+1)$-politopo *esfera-exterior* (vertices afuera de la esfera)

Arreglo de bolas

Sea P un $(d+1)$-politopo *esfera-exterior* (vertices afuera de la esfera)

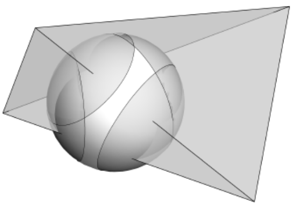
El *arreglo de bolas proyectado* de P, $B(P)$, es la colección de d-bolas cuyas *fuentes de luz* son los vértices de P.

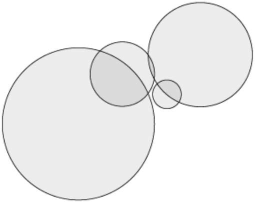




Arreglo de bolas

Sea P un $(d+1)$-politopo *esfera-exterior* (vertices afuera de la esfera)
El *arreglo de bolas proyectado* de P, $B(P)$, es la colección de d-bolas cuyas *fuentes de luz* son los vértices de P.





Si P es un $(d+1)$-politopo *arista-inscribible* (i.e., todas las aristas de P son tangentes a $\mathbb{S}^d$) entonces $B(P)$ es un *empaquetamiento de d-bolas B_P*.

Empaquetamientos polytopales

Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\widehat{\mathbb{R}^d})$ (*grupo de Möbius* generado por las inversiones de d-bolas) tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

Empaquetamientos polytopales

Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\widehat{\mathbb{R}^d})$ (*grupo de Möbius* generado por las inversiones de d-bolas) tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

Observaciones

- No todos los empaquetamientos de d-bolas son politopales

Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\widehat{\mathbb{R}^d})$ (*grupo de Möbius* generado por las inversiones de d-bolas) tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

Observaciones

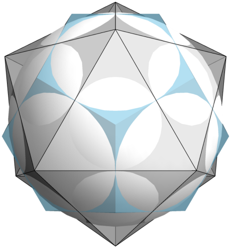
- No todos los empaquetamientos de d-bolas son politopales
- Todo empaquetamiento politopal admite un empaquetamiento dual $B^*(P)$ inducido por proyección del empaquetamiento de bolas a partir del polar P^*.

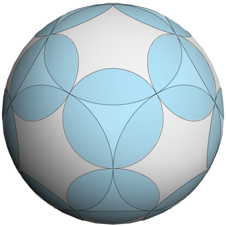
Un empaquetamiento de d-bolas B_P est *politopal* si existe $\mu \in$Möb$(\widehat{\mathbb{R}^d})$ (*grupo de Möbius* generado por las inversiones de d-bolas) tal que $\mu(B_p) = B(P)$.

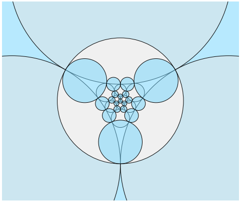
Observaciones

- No todos los empaquetamientos de d-bolas son politopales
- Todo empaquetamiento politopal admite un empaquetamiento dual $B^*(P)$ inducido por proyección del empaquetamiento de bolas a partir del polar P^*.

Un icosaedro arista-inscribible y su polar en azul.



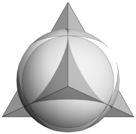
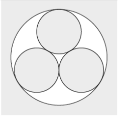
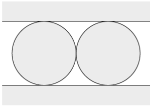
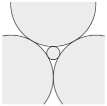
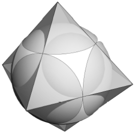
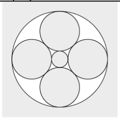
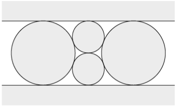
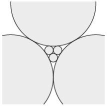




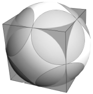
Proyecciones de empaquetamientos centrados

La proyección *centrada* es la proyecciones de las bolas con una k-cara cuyo baricentro esta en el rayo generado a partir del polo Norte.

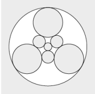
La proyección *centrada* es la proyecciones de las bolas con una k-cara cuyo baricentro esta en el rayo generado a partir del polo Norte.

<table>
<tr><th>Edge-scribed realization</th><th>Vertex centered at ∞</th><th>Edge centered at ∞</th><th>Face centered at ∞</th></tr>
<tr>
<td>
$\ell_{\{3,3\}} = \sqrt{2}$</td>
<td>
$\begin{array}{c|c} n & \kappa \\ \hline 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{3}) \\ 3 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{1/3}) \end{array}$</td>
<td>
$\begin{array}{c|c} n & \kappa \\ \hline 2 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} \end{array}$</td>
<td>
$\begin{array}{c|c} n & \kappa \\ \hline 3 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{1/3}) \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{3}) \end{array}$</td>
</tr>
<tr>
<td>
$\ell_{\{3,4\}} = 1$</td>
<td>
$\begin{array}{c|c} n & \kappa \\ \hline 1 & 1-\sqrt{2} \\ 4 & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{2} \end{array}$</td>
<td>
$\begin{array}{c|c} n & \kappa \\ \hline 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{array}$</td>
<td>
$\begin{array}{c|c} n & \kappa \\ \hline 3 & 1-\sqrt{2/3} \\ 3 & 1+\sqrt{2/3} \end{array}$</td>
</tr>
</table>

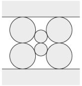
Proyecciones de empaquetamientos centrados



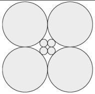
$\ell_{\{4,3\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$



n	κ
1	$\sqrt{2}-\sqrt{3}$
3	$\sqrt{2}-\sqrt{1/3}$
3	$\sqrt{2}+\sqrt{1/3}$
1	$\sqrt{2}+\sqrt{3}$

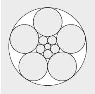


n	κ
2	0
4	$\sqrt{2}$
2	$2\sqrt{2}$

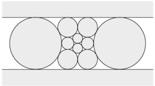


n	κ
4	$\sqrt{2}-1$
4	$\sqrt{2}+1$

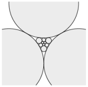
$\ell_{\{3,5\}} = \frac{1}{\varphi}$



n	κ
1	$\varphi-\sqrt{\varphi+2}$
5	$\varphi-\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}$
5	$\varphi+\sqrt{\frac{\varphi+2}{5}}$
1	$\varphi+\sqrt{\varphi+2}$

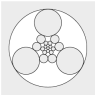


n	κ
2	0
2	$\varphi-1$
4	φ
2	$\varphi+1$
2	2φ

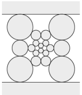


n	κ
3	$\varphi-\varphi^2\sqrt{1/3}$
3	$\varphi-\varphi^{-1}\sqrt{1/3}$
3	$\varphi+\varphi^{-1}\sqrt{1/3}$
3	$\varphi+\varphi^2\sqrt{1/3}$

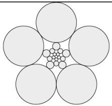
$\ell_{\{5,3\}} = \frac{1}{\varphi^2}$



n	κ
1	$\varphi^2-\varphi\sqrt{3}$
3	$\varphi^2-\varphi\sqrt{5/3}$
6	$\varphi^2-\varphi\sqrt{1/3}$
6	$\varphi^2+\varphi\sqrt{1/3}$
3	$\varphi^2+\varphi\sqrt{5/3}$
1	$\varphi^2+\varphi\sqrt{3}$



n	κ
2	0
4	$\varphi^2-\varphi$
2	φ^2-1
4	φ^2
2	φ^2+1
4	$\varphi^2+\varphi$
2	$2\varphi^2$



n	κ
5	$\varphi^2-\sqrt{\frac{1}{5}(7+11\varphi)}$
5	$\varphi^2-\sqrt{\frac{1}{5}(3-\varphi)}$
5	$\varphi^2+\sqrt{\frac{1}{5}(3-\varphi)}$
5	$\varphi^2+\sqrt{\frac{1}{5}(7+11\varphi)}$

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal

El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}^d}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal
El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}^d}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$
El grupo *Apoloniano* : $A(B_P) := \langle S(B_P^*) \rangle$ dónde $S(B_P^*)$ es el conjunto de inversiones de las d-bolas de B_P^*

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal

El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}^d}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$

El grupo *Apoloniano* : $A(B_P) := \langle S(B_P^*) \rangle$ dónde $S(B_P^*)$ es el conjunto de inversiones de las d-bolas de B_P^*

El grupo *Super Simétrico Apoloniano* :

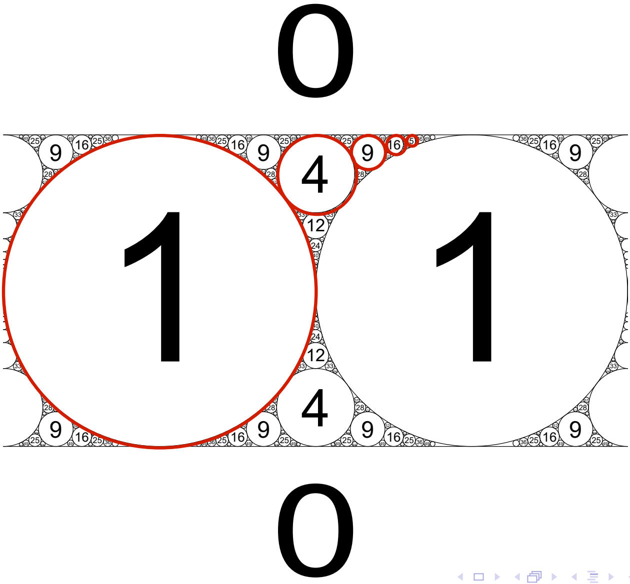
$SSA(B_P) := \langle Sym(B_P) \cup A(B_P) \cup A(B_P^*) \rangle$

Sea B_P un empaquetamiento d-bolas polytopal
El grupo *Simétrico* : $Sym(B_P) := \langle \mu \in \text{Möb}(\widehat{\mathbb{R}^d}) | \mu(B_P) = B_P \rangle$
El grupo *Apoloniano* : $A(B_P) := \langle S(B_P^*) \rangle$ dónde $S(B_P^*)$ es el conjunto de inversiones de las d-bolas de B_P^*
El grupo *Super Simétrico Apoloniano* :
$SSA(B_P) := \langle Sym(B_P) \cup A(B_P) \cup A(B_P^*) \rangle$

Teorema (Rasskin + R.A. 2022)
Existen empaquetamientos del tetraedrales, cúbicos y dodecaedrales de Apolonio donde el conjunto de curvaturas contienen todos los cuadrados perfectos.

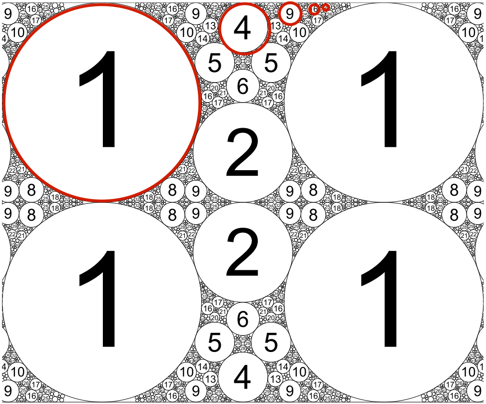
Ejemplo de empaquetamiento

Tetraedral



Cúbico

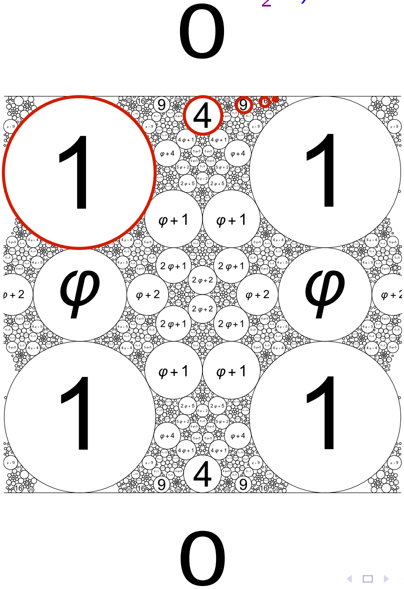
0



0

Ejemplo de empaquetamiento

Dodecaedral (φ es el número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$)



Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$, definamos

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x} \rangle$$

dónde $\boldsymbol{x}_N = (e_{d+1} + e_{d+2})$ con e_i vector canónico de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$, definamos

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x} \rangle$$

dónde $\boldsymbol{x}_N = (e_{d+1} + e_{d+2})$ con e_i vector canónico de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Notemos que si $\boldsymbol{x}_b$ es space-like normalizado entonces

(curvatura de b) $\qquad \kappa(b) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_b \rangle$

Para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{L}^{d+1,1}$, definamos

$$\kappa(\boldsymbol{x}) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x} \rangle$$

dónde $\boldsymbol{x}_N = (e_{d+1} + e_{d+2})$ con e_i vector canónico de $\mathbb{L}^{d+1,1}$.

Notemos que si $\boldsymbol{x}_b$ es space-like normalizado entonces

(curvatura de b) $\quad \kappa(b) = -\langle \boldsymbol{x}_N, \boldsymbol{x}_b \rangle$

Sea $P \subset E^{d+1}$ esfera-exterior. El *baricentro Lorentziano* de P es

$$\boldsymbol{x}_P := \frac{1}{|\mathcal{F}_0(P)|} \sum_{v \in \mathcal{F}_0(P)} \boldsymbol{x}_{b(v)}$$

dónde $b(v)$ es la région iluminada a partir de v.

La *curvatura Lorentziana* de P es definida commo

$$\kappa_P := \kappa(\boldsymbol{x}_P)$$

La *curvatura Lorentziana* de P es definida commo

$$\kappa_P := \kappa(\boldsymbol{x}_P)$$

Por linearidad tenemos que

$$\kappa_P := \frac{1}{|\mathcal{F}_0(P)|} \sum_{v \in \mathcal{F}_0(P)} \kappa(b(v))$$

Resultado

Teorema (Rasskin + R.A. 2022) Sea $\mathcal{B}_P$ el empaquetamiento obtenido a partir del $(d+1)$-polytopo regular P. Entonces, para cualquier bandera $(f_0, \ldots, f_d, f_{d+1} = P)$ tenemos la relación

$$(\kappa_{f_0} - \kappa_{f_1})^2 + \ell_{f_2}^2(\kappa_{f_1} - \kappa_{f_2})^2 + \sum_{i=2}^{d} \frac{1}{\ell_{f_{i+1}}^{-2} - \ell_{f_i}^{-2}}(\kappa_{f_i} - \kappa_{f_{i+1}})^2 = \ell_P^2 \kappa_P^2$$

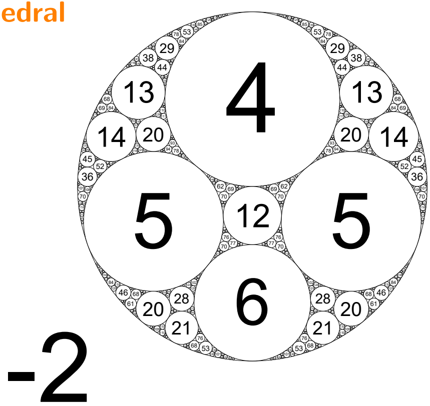
dónde ℓ_{f_i} es la mitad de la longitud de una arista f_i.

Integralidad empaquetamientos Octaedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal octaedral B_O. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_O es integral.

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal octaedral B_O. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_O es integral.

Octaedral

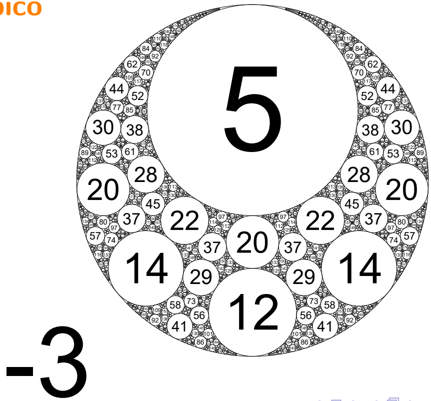


Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal cúbico B_C. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_C es integral.

Integralidad empaquetamientos Cúbico

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal cúbico B_C. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ son enteros entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_C es integral.

Cúbico



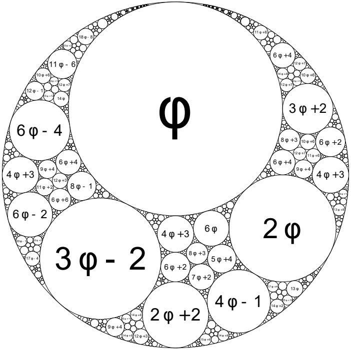
Integralidad empaquetamientos Icoedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal icoaedral B_I. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_I es φ-integral.

Integralidad empaquetamientos Icoedral

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ las curvaturas de tres discos dos a dos tangentes de un empaquetamiento de discos politopal icoaedral B_I. Si $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ y $\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_I es φ-integral.

Icoedral

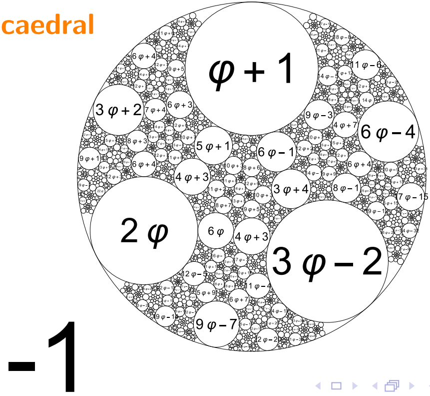


-1

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal dodecaedral B_D. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\varphi^2\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_D es φ-integral.

Proposición (Rasskin + R.A. 2022) Sean $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ las curvaturas de tres discos consecutivamente tangentes de un empaquetamiento de discos politopal dodecaedral B_D. Si $\kappa_{i-1}, \kappa_i, \kappa_{i+1}$ y $\sqrt{-\varphi^2\kappa_i^2 + \kappa_i\kappa_{i+1} + \kappa_i\kappa_{i-1} + \kappa_{i-1}\kappa_{i+1}}$ están en $\mathbb{Z}[\varphi]$ entonces el empaquetamiento Apolonio generado a partir de B_D es φ-integral.

Dodecaedral

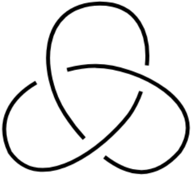


Teoria de nudos

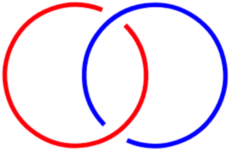
Un enlace de n componentes consiste de n curvas simples cerradas en $\mathbb{R}^3$. Un nudo es un enlace con una componente.

Un enlace de n componentes consiste de n curvas simples cerradas en $\mathbb{R}^3$. Un nudo es un enlace con una componente.
El número de cruces de L, denotado $cr(L)$, es el número mas pequeño de cruces entre todos los diagramas de enlaces isotopos a L.

Un enlace de n componentes consiste de n curvas simples cerradas en $\mathbb{R}^3$. Un nudo es un enlace con una componente.
El número de cruces de L, denotado $cr(L)$, es el número mas pequeño de cruces entre todos los diagramas de enlaces isotopos a L.

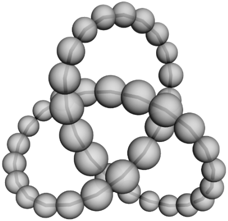


Trebol

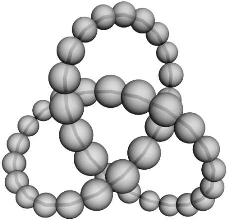


Enlace de Hopf

Número de bolas

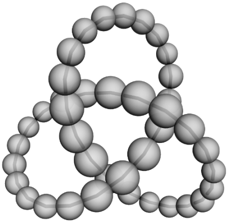


Número de bolas



El número de bolas de un enlace L, denotado por $ball(L)$ es el minimo número de bolas solidas (no necesariamente del mismo tamaño) necesarias para realizar un collar representando L.

Número de bolas



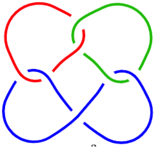
El número de bolas de un enlace L, denotado por $ball(L)$ es el minimo número de bolas solidas (no necesariamente del mismo tamaño) necesarias para realizar un collar representando L.

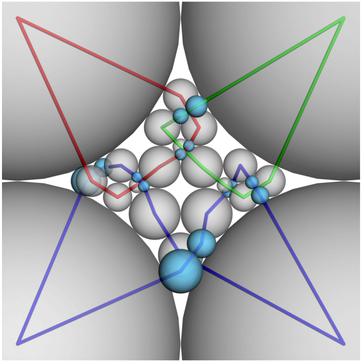
Es conocido que $9 \leq ball(Trebol) \leq 12$ y $ball(Hopf) = 8$.

Resultado general

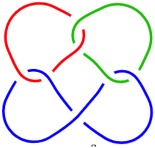
Teorema (Rasskin + R.A. 2021) $ball(L) \leq 5cr(L)$ para todo L

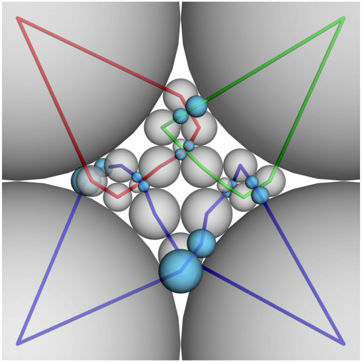
Teorema (Rasskin + R.A. 2021) $ball(L) \leq 5cr(L)$ para todo L





Teorema (Rasskin + R.A. 2021) $ball(L) \leq 5cr(L)$ para todo L

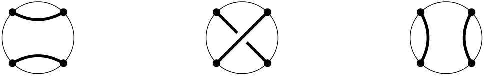




Conjetura (Rasskin + R.A. 2021) Sea L un enlace. Entonces $ball(L) \leq 4cr(L)$ dónde la igualdad se obtiene si L es alternante.

2-tangles

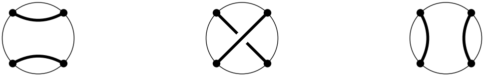
Un 2-tangle



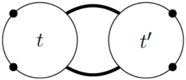
2-tangle elementarios

2-tangles

Un 2-tangle

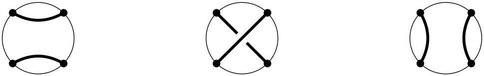


2-tangle elementarios

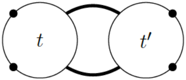


Suma de tangles t y t'

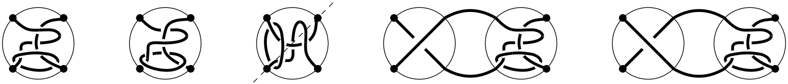
Un 2-tangle



2-tangle elementarios



Suma de tangles t y t'



t $-t$ $F(t)$ $H^+(t)$ $H^-(t)$

Operaciones con tangles

Tangles racionales

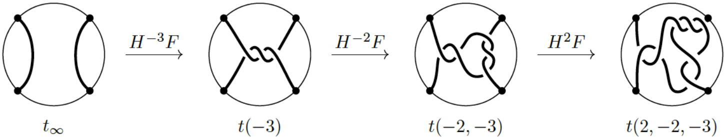
Sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros $a_i \neq 0$. Sea $t(a_1, \ldots, a_n)$ el tangle racional dado por el algoritmo de Conway :

$$t(a_1, \ldots, a_n) = H^{a_1} F \cdots H^{a_n} F(t_\infty)$$

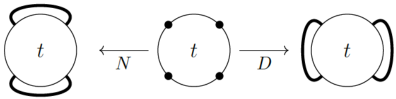
Tangles racionales

Sean $a_1, \ldots, a_n$ enteros $a_i \neq 0$. Sea $t(a_1, \ldots, a_n)$ el tangle racional dado por el algoritmo de Conway :

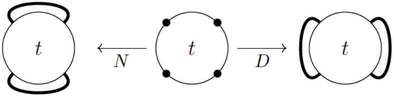
$$t(a_1, \ldots, a_n) = H^{a_1} F \cdots H^{a_n} F(t_\infty)$$



$t(2, -2, -3)$



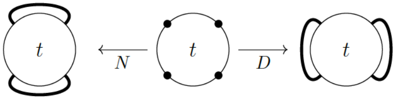
Cerraduras de un tangle : denominador y numerador



Cerraduras de un tangle : denominador y numerador

La pendiente del tangle racional $t(a_1, \ldots, a_n)$ es el número racional p/q obtenido por la expansion de fracciones continuas

$$[a_1, \ldots, a_n] := a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}} = \frac{p}{q}.$$

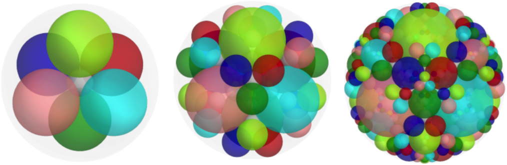


Cerraduras de un tangle : denominador y numerador

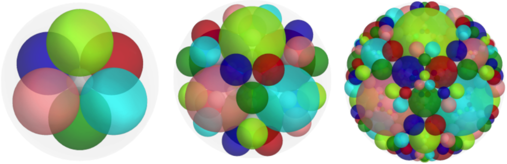
La pendiente del tangle racional $t(a_1, \ldots, a_n)$ es el número racional p/q obtenido por la expansion de fracciones continuas

$$[a_1, \ldots, a_n] := a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}} = \frac{p}{q}.$$

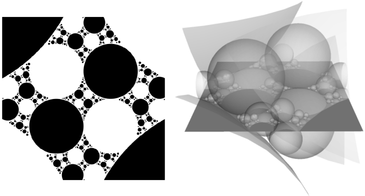
Teorema (Conway 1970) Dos tangles racionales son equivalentes si y solamente si tienen la misma pendiente.



Empaquetamiento de esferas orthoplicial $B(O^4)$

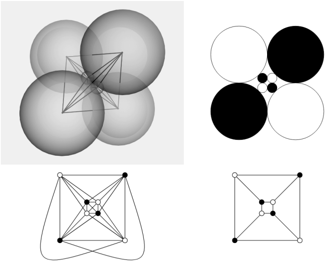


Empaquetamiento de esferas orthoplicial $B(O^4)$



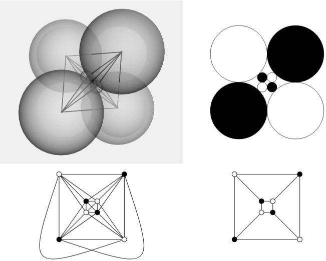
Sección $B(O^4)$ obteniendo el empaquetamento ortocubico $B(C^3)$

Tangles : diagramas cúbico

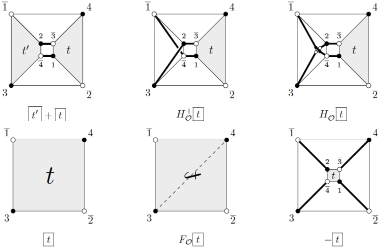


Grafos asociado a $B(C^3)$

Tangles : diagramas cúbico



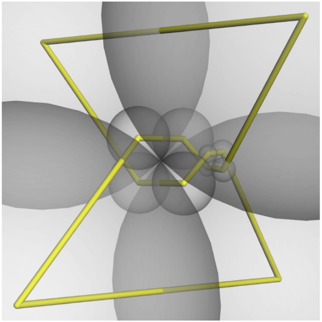
Grafos asociado a $B(C^3)$

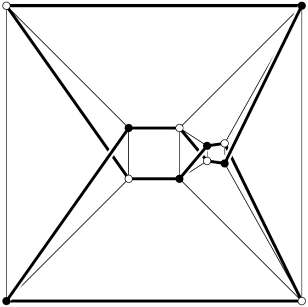


Traduciendo operaciones de tangles en el grafo de $B(C^3)$

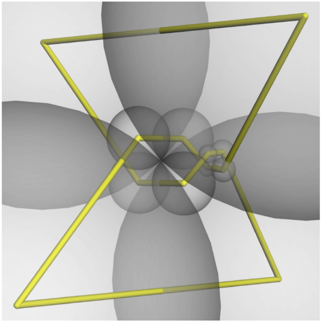
Teorema (Rasskin + R.A. 2022) Todo enlace racional admite una representación ortocubica (diagrama cúbico), implicando una representación de collar contenido en una sección de $B(O^4)$.

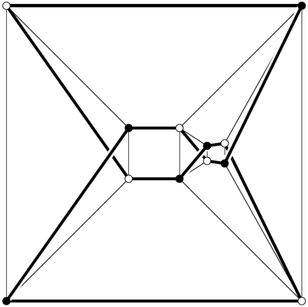
Teorema (Rasskin + R.A. 2022) Todo enlace racional admite una representación ortocubica (diagrama cúbico), implicando una representación de collar contenido en una sección de $B(O^4)$.





Teorema (Rasskin + R.A. 2022) Todo enlace racional admite una representación ortocubica (diagrama cúbico), implicando una representación de collar contenido en una sección de $B(O^4)$.





Teorema (Rasskin + R.A. 2022) $ball(L) \leq 4cr(L)$ para todo enlace racional L.

Punto ortocubico

El punto ortocubico $n_{p/q}$ de un tangle $t_{p/q}$ es el punto de tangencia de los dos circulos que corresponden a la última arista de su representación ortocubica.

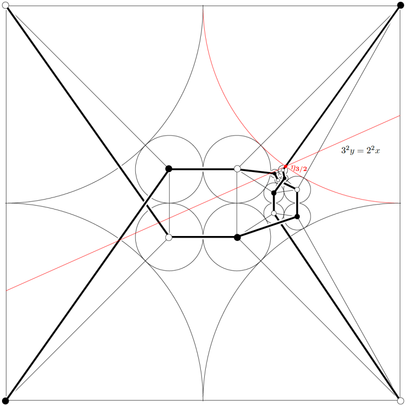
Punto ortocubico

El punto ortocubico $n_{p/q}$ de un tangle $t_{p/q}$ es el punto de tangencia de los dos circulos que corresponden a la última arista de su representación ortocubica.

Teorema (Rasskin + R.A. 2022) $n_{p/q}$ es la intersección de la recta que pasa por el origen y pendiente $\pm(p/q)^{-2}$.

Punto ortocubico

El punto ortocubico $n_{p/q}$ de un tangle $t_{p/q}$ es el punto de tangencia de los dos circulos que corresponden a la última arista de su representación ortocubica.
Teorema (Rasskin + R.A. 2022) $n_{p/q}$ es la intersección de la recta que pasa por el origen y pendiente $\pm(p/q)^{-2}$.



Ecuación diofántica

Corolario (Rasskin + R.A. 2022) La ecuación diofántica $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ admite un infinidad de soluciones.

Corolario (Rasskin + R.A. 2022) La ecuación diofántica $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ admite un infinidad de soluciones.

Prueba (idea) : Todos los puntos de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ corresponden a vectores de $\mathbb{L}^{3,1}$. Utilizando el teorema obtenemos las coordenadas cartesianas de $n_{p/q}$

$$\mathrm{i}(\eta_{p/q}) = \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ (p-q)^2 \\ \sqrt{2}(p^2 - pq + q^2) \end{pmatrix}$$

Ecuación diofántica

Corolario (Rasskin + R.A. 2022) La ecuación diofántica $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ admite un infinidad de soluciones.

Prueba (idea) : Todos los puntos de $\widehat{\mathbb{R}^2}$ corresponden a vectores de $\mathbb{L}^{3,1}$. Utilizando el teorema obtenemos las coordenadas cartesianas de $n_{p/q}$

$$\mathrm{i}(\eta_{p/q}) = \begin{pmatrix} p^2 \\ q^2 \\ (p-q)^2 \\ \sqrt{2}(p^2 - pq + q^2) \end{pmatrix}$$

Produciendo soluciones a la ecuación $x^4 + y^4 + z^4 = 2t^2$ tomando $x = p,\ y = q,\ z = p - q$ y $t = p^2 - pq + q^2$.


GRACIAS
POR
ATENCION
SU
GRACIAS
SU
ATENCION
POR