Sur l'équation vectorielle stochastique $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ à coefficients iid

Benoîte de Saporta

INRIA Sophia Antipolis
Projet OMEGA

Yves Guivarc'h (Université de Rennes 1)
Emile Le Page (Université de Bretagne Sud)

Séminaire Probabilité et Théorie Ergodique
Amiens, 23 mars 2006

Plan

Plan

Modèle Auto-Régressif

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n \quad n \in \mathbb{N}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d$$

(A_n, B_n) va iid sur $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$
$d \geq 1$

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches aléatoires en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), GARCH...

Solution Stationnaire

Brandt 1986, Bougerol et Picard 1992

Si

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\| < 0$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|B_0\| < \infty,$$

unique solution stationnaire de même loi que

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 \cdots A_{n-1} B_n$$

Moments de la loi stationnaire

- $0 < s \leq 1$

$$\mathbb{E}\|R\|^s \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\|A_1 \cdots A_{n-1}\|^s \mathbb{E}\|B_n\|^s$$

- $s \geq 1$

$$(\mathbb{E}\|R\|^s)^{1/s} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_{n-1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|B_n\|^s)^{1/s}$$

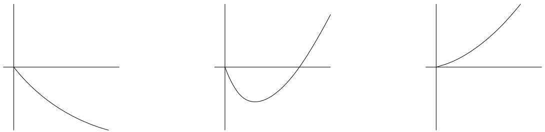
- Si B_0 a des moments à tout ordre, R a un moment d'ordre s si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n} < 1$$

Queue de la loi stationnaire

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$$

Fonction log-convexe de s :



KESTEN 1973, 1974, LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

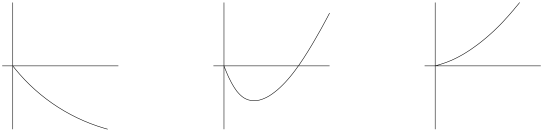
- $\mathbb{E}\|R^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

Queue de la loi stationnaire

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$$

Fonction log-convexe de s :



KESTEN 1973, 1974, LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

- $\mathbb{E}\|R^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

Plan

1. Introduction
2. Travaux antérieurs
   - Les résultats de Kesten
   - Les résultats de Le Page
3. La condition i-p
   - L'ensemble limite
4. Nouveau résultat
   - Eléments de preuve
   - Exemples en dimension 2

Notations

- μ loi de A_1
- S_μ support de μ

- $\mathbb{R}^d$ vecteurs ligne de dimension d
- $\mathbb{S}^{d-1}$ vecteurs ligne de norme 1
- $\mathbb{S}_+$ vecteurs ligne de norme 1 à coordonnées positives
- $\mathbb{P}^{d-1}$ espace projectif

- Action de $Gl(d, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$

$$x \cdot a = \frac{xa}{\|xa\|}$$

Hypothèses de Kesten

- Condition d'existence de la loi stationnaire
- $\mathbb{P}(A_0 \geqslant 0) = 1$, $\quad \mathbb{P}(A_0$ a une ligne de $0) = 0$
- le sous-groupe engendré par $\{\log \rho(a) \mid a \in \Gamma_\mu,\ a \gg 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
- Condition d'intégrabilité :
  il existe $\sigma > 0$ tel que
  $\mathbb{E}\left[\min_{1\leq i\leq d}\left\{\sum_{j=1}^{d} A_0(i,j)\right\}\right]^{\sigma} \geq d^{\sigma/2}$ et
  $\mathbb{E}[\|A_0\|^{\sigma} \log^{+} \|A_0\|] < \infty$

Résultats de Kesten

Théorème 1

$\exists\kappa$ dans $]0,\ \sigma]$ tel que pour tout x dans $\mathbb{S}_+$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(\max_n \|xA_1\cdots A_n\| > t) > 0$$

Théorème 2

- Si $\mathbb{P}(B_0 = 0) < 1, \quad \mathbb{P}(B_0 \geqslant 0) = 1, \quad \mathbb{E}\|B_0\|^{\kappa} < \infty$

alors pour tout x dans $\mathbb{S}_+$

$$\lim_{t\to+\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(xR > t) > 0$$

Opérateurs sur les fonctions continues sur $\mathbb{S}_+$

$$\mathcal{P}^s f(x) = \mathbb{E}[\|xA_1\|^s f(x \cdot A_1)] = \int \|xa\|^s f(x \cdot a)\mu(da)$$

Propriétés

Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$

- il existe ν^s proba sur $\mathbb{S}_+$ et $k(s)$ réel

$$\nu^s \mathcal{P}^s = k(s)\nu^s$$

- il existe e_s continue, strictement positive sur $\mathbb{S}_+$

$$\mathcal{P}^s e_s = k(s) e_s$$

- il existe $\kappa > 0$ tel que $k(\kappa) = 1$

Preuve
Deuxième étape

Opérateur Markovien $\mathcal{Q}$ sur $\mathbb{S}_+$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}f(x) &= \frac{1}{e_\kappa}\mathcal{P}^\kappa(e_\kappa f)(x) \\ &= \frac{1}{e_\kappa(x_n)}\int \|xa\|^\kappa e_\kappa(x\cdot a)f(x\cdot a)\mu(da)\end{aligned}$$

Chaîne de Markov (X_n, U_n) sur $\mathbb{S}_+$

$$X_n = X_0\cdot A_1\cdots A_n \qquad U_n = \log\frac{\|X_0A_1\cdots A_{n+1}\|}{\|X_0A_1\cdots A_n\|}$$

avec X_n de transition $\mathcal{Q}$

Preuve
Troisième étape

- Théorème 1
  théorème de renouvellement de Kesten pour (X_n, U_n)
  $$\lim_{t\to+\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(\max_n \|xA_1\cdots A_n\| > t) = Ke_{\kappa}(x).$$
- Théorème 2
  Positivité
  comparaison entre $\mathbb{P}(\max_n \|xA_1\cdots A_n\| > t)$ et $\mathbb{P}(xR > t)$

Hypothèses de Le Page

- condition d'existence de la loi stationnaire
- pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{S}^{d-1}$ et tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \mathbb{1}_{\mathcal{U}}(x \cdot a)\mu^n(da) > 0$$

- le sous-groupe engendré par l'ensemble des $\log |\rho(a)|$ tels que $a \in \Gamma_\mu$ et a a une valeur propre simple réelle dominante est dense dans $\mathbb{R}$
- pour tout x $\mathbb{P}(A_1 x + B_1 = x) < 1$
- $\exists \sigma > 0$ tel que $\mathbb{E}[p(A_1)^\sigma] \geq 1$, où $p(A_1)$ est la plus petite valeur propre de $(A_1{}^tA_1)^{1/2}$
- $\exists \delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\sup\{\|A_1\|, \|B_1\|\}]^{\sigma+\delta} < +\infty$, et $\mathbb{E}(\|A_1\|^{-\delta}) < +\infty$

Résultats de Le Page

Théorème

Il existe $\kappa \in]0, \sigma]$ tel que $\lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^\kappa)^{1/n} = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\lim_{t \to \infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) = H_\kappa(\bar{x}),$$

où H_κ fonction continue sur $\mathbb{P}^{d-1}$, strictement positive et vérifiant pour tout v dans $\mathbb{P}^{d-1}$,

$$H_\kappa(v) = \int \|\tilde{v}A\|^\kappa H_\kappa(vA)\mu(dA).$$

Preuve

- Etape 1 : étude des opérateurs P^s sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$P^s f(v) = \mathbb{E}[\|\tilde{v}A_1\|^s f(vA_1)] = \int \|\tilde{v}a\|^s f(va)\mu(da)$$

- Etape 2 : définition d'un opérateur Markovien Q sur $\mathbb{P}^{d-1}$ puis sur $\mathbb{S}^{d-1}$
- Etape 3 : théorème de renouvellement de Kesten
- Etape supplémentaire : la limite trouvée est non nulle

Plan

Irréductibilité et Proximalité

Γ_μ semi-groupe engendré par le support S_μ de la loi μ de A_1

Irréductibilité

- Γ_μ irréductible : pas de sous-espace invariant non trivial
- Γ_μ fortement irréductible : pas de réunion finie de sous-espace invariants

proximalité

- Γ_μ proximal sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-1}$:

$$\forall v, v' \in \mathbb{P}^{d-1}, \quad \exists (a_n) \in \Gamma_\mu \text{ t.q. } d(va_n, v'a_n) \to 0$$

- $a \in \Gamma_\mu$ est proximale si a a une unique valeur propre dominante.
  $v^a \in \mathbb{P}^{d-1}$ direction propre associée

La Condition i-p

Définition

Γ_μ vérifie la condition i-p s'il est

- irréductible
- proximal

Définition équivalente

Γ_μ vérifie la condition i-p si

- fortement irréductible
- contient un élément proximal

Exemples en dimension 2

Semi-goupes engendrés par deux matrices

a, a' matrices de $Gl(2, \mathbb{R})$ telles que

- a et a' ont chacune deux valeurs propres réelles de modules distincts,
- les quatre espaces propres correspondants sont deux à deux distincts.

Alors le semi-groupe Γ engendré par a et a' vérifie la condition i-p

Exemple vérifiant i-p :

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Action de Γ_μ sur l'espace projectif

Ensemble limite

$$L(\Gamma_\mu) = \overline{\{v^a,\ a \in \Gamma_\mu,\ a \text{ proximale}\}} \subset \mathbb{P}^{d-1}$$

Proposition

Sous la condition i-p

- $L(\Gamma_\mu)$ est non vide
- Unique fermé Γ_μ-invariant minimal sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$L(\Gamma_\mu) = \bigcap_{v \in \mathbb{P}^{d-1}} \overline{v\Gamma_\mu}$$

Action de Γ_μ sur la sphère

Deux cas possibles

1. unique ensemble fermé Γ_μ-invariant minimal, symétrique, d'image projective $L(\Gamma_\mu)$
2. deux ensembles fermés Γ_μ-invariants minimaux disjoints, symétriques l'un de l'autre, d'image projective $L(\Gamma_\mu)$

Caractérisation des deux cas

Cas 2 ssi

Γ_μ préserve un cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide

Exemple 1

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Γ engendré par a et a' vérifie la condition i-p
- Cône convexe invariant : vecteurs positifs

Exemple 2

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Γ engendré par a et a' vérifie la condition i-p
- a' envoie les vecteurs positifs sur les négatifs, donc un seul ensemble limite symétrique
- a et a' préservent l'ensemble des vecteurs positifs ou négatifs :
  l'ensemble limite n'est pas égal à toute la sphère

Plan

Hypothèses

- Condition d'existence de la loi stationnaire
- Γ_μ vérifie la condition i-p
- pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant
- pour tout x $\mathbb{P}(A_1x + B_1 = x) < 1$
- Conditions d'intégrabilité :

$$k(s) = \lim_n \left(\int \|a\|^s \mu^n(da) \right)^{1/n}$$

  - $\sigma = \sup\{s \geq 0 \mid k(s) < +\infty\} > 0$
  - $\lim_{s \to \sigma} k(s) > 1$
  - pour κ tel que $k(\kappa) = 1$

$$\mathbb{E}[\|A_1\|^\kappa \log^+ \|A_1\| + \|B_1\|^\kappa] < +\infty$$

Nouveau résultat

Théorème CRAS 2004

Pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(xR > t) = \ell e_{\kappa}(\bar{x})$$

avec $\ell > 0$

Les opérateurs P^s

Pour $0 \leq s \leq \sigma$, opérateurs P^s sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$P^s f(v) = \mathbb{E}[\|\tilde{v}A_1\|^s f(vA_1)] = \int \|\tilde{v}a\|^s f(va)\mu(da)$$

Guivarc'h et Le Page 2004

Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$

- il existe une unique proba ν^s sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$\nu^s P^s = k(s)\nu^s$$

- il existe une unique e_s continue, strictement positive sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$P^s e_s = k(s)e_s \qquad \nu^s(e_s) = 1$$

Preuve

- définition d'un opérateur Markovien Q sur $\mathbb{P}^{d-1}$ à partir de P^{κ} et e_{κ}
- extension de Q et de ses bonnes propriétés à $\mathbb{S}^{d-1}$
- théorème de renouvellement de Kesten
- la limite trouvée est non nulle

Conditions d'existence de κ

Si $\sigma = \sup\{s \geq 0 \mid k(s) < +\infty\} = +\infty$

Proposition

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\log k(s)}{s} = \limsup_n \frac{1}{n} \sup\{\log \rho(a) \mid a \in S_\mu^n\}$$

Dans ce cas κ existe si et seulement si Γ_μ est dilatant i.e. contient une matrice de rayon spectral > 1

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- √ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- √ conditions d'intégrabilité
- √ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- √ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- √ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- √ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- √ conditions d'intégrabilité
- √ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- √ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- √ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\surd$ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- $\surd$ conditions d'intégrabilité
- $\surd$ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- $\surd$ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- $\surd$ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- conditions d'intégrabilité
- condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- √ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- √ conditions d'intégrabilité
- √ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- √ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- √ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- √ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- √ conditions d'intégrabilité
- √ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- √ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- √ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple II

Un modèle AR(2)

$$X_n = a_{1,n} X_{n-1} + a_{2,n} X_{n-2} + b_n \iff Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n$$

avec

$$\begin{aligned} Y_n &= {}^t(X_n, X_{n-1}) \\ B_n &= {}^t(b_n, 0) \end{aligned} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex : $\mu = \frac{1}{4}\delta_a + \frac{3}{4}\delta_{a'}$ avec

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ ou discrète prenant des valeurs autres que 2 et $9/8$

Exemple de Kesten

Enoncé

Problème posé dans KESTEN 1973

- dimension $d = 2$
- m_1 et m_2 matrices à coefficients strictement positifs telles que $\log \rho(m_1)$ et $\log \rho(m_2)$ engendrent un sous-goupe dense dans $\mathbb{R}$
- $m_3 = r_\theta$ une rotation d'angle θ
- $\mu = p_1\delta_{m_1} + p_2\delta_{m_2} + p_3\delta_{m_3}$ avec $p_i > 0$ et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Est-ce-que cette μ peut donner une loi invariante à queue polynômiale ?

Exemple de Kesten

Réponse

- Irréductibilité dès que $\theta \neq 0[\pi]$
- Proximalité dès que $\theta \neq 0[\frac{\pi}{2}]$
- Unique fermé invariant minimal dès que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ ou $\frac{\theta}{\pi} = \frac{2k+1}{n}$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$m_1 = \begin{pmatrix} \frac{e^1+1}{2} & \frac{e^1-1}{2} \\ \frac{e^1-1}{2} & \frac{e^1+1}{2} \end{pmatrix} \qquad m_2 = \begin{pmatrix} \frac{e^\pi+1}{2} & \frac{e^\pi-1}{2} \\ \frac{e^\pi-1}{2} & \frac{e^\pi+1}{2} \end{pmatrix}$$

Γ_μ ne vérifie pas la condition i-p