Contributions à l'estimation et au contrôle de processus stochastiques

Benoîte de Saporta

Inria CQFD
Université de Bordeaux

Séminaire de Statistique, Université d'Avignon – 2 décembre 2013

Plan de l'exposé

Domaines de recherche

Mots-clés

- probabilités
- processus markoviens
- processus auto-régressifs
- contrôle stochastique
- méthodes numériques

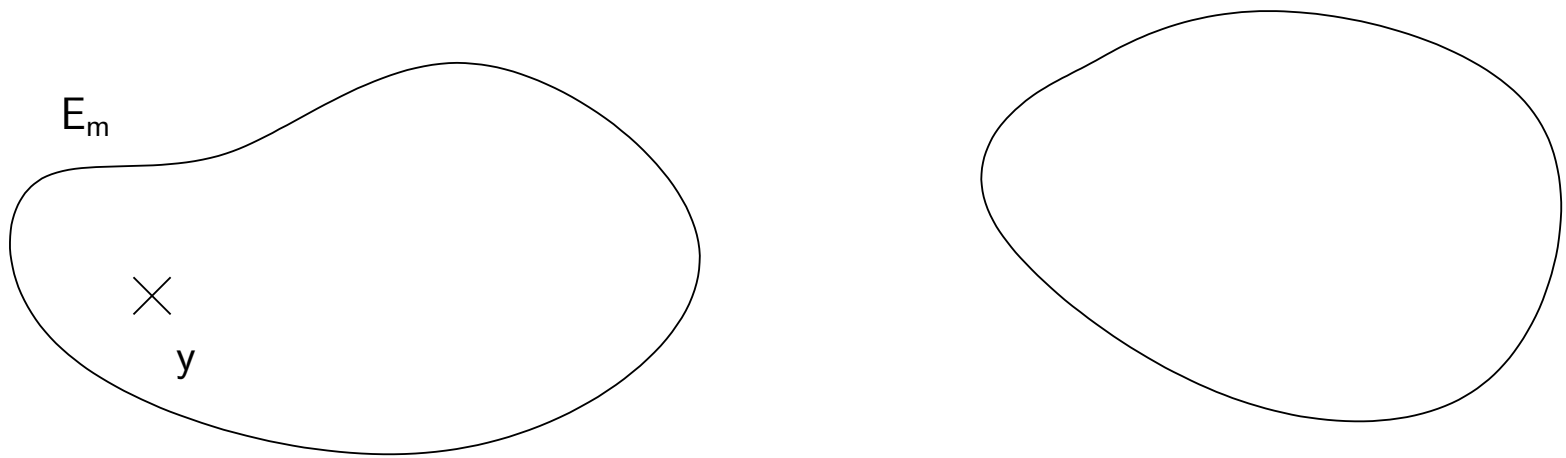
Objectifs

- modélisation
- estimation de paramètres et de performances
- optimisation

Deux familles de problèmes

- processus BAR et division cellulaire
- méthodes numériques pour les PDMP et fiabilité dynamique

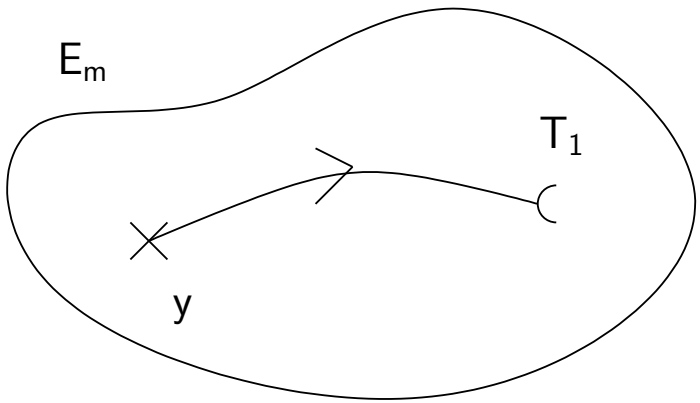
PDMP processus hybride non diffusif

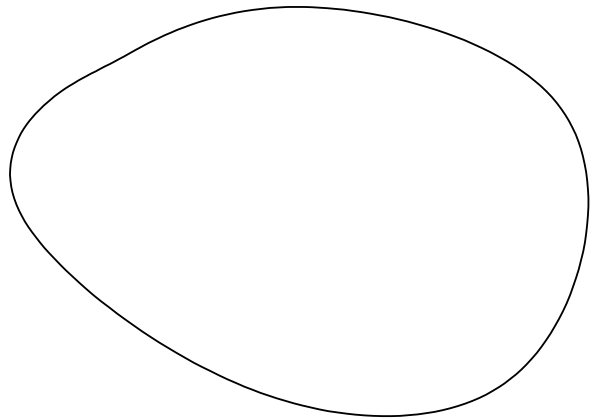


Deux familles de problèmes

- processus BAR et division cellulaire
- méthodes numériques pour les PDMP et fiabilité dynamique

PDMP processus hybride non diffusif

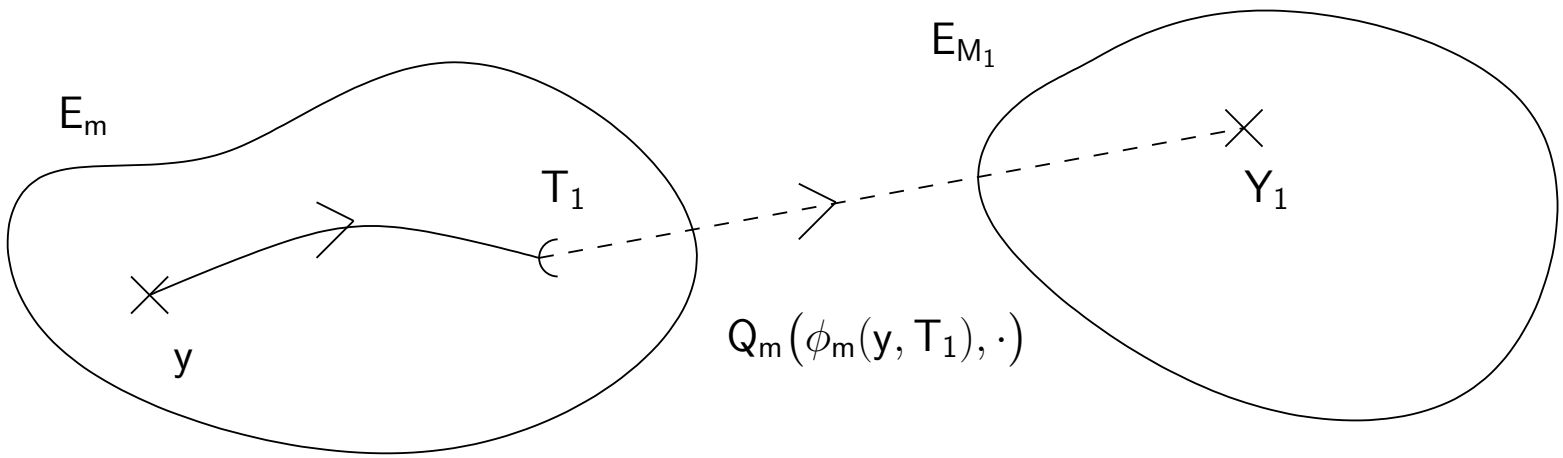




Deux familles de problèmes

- processus BAR et division cellulaire
- méthodes numériques pour les PDMP et fiabilité dynamique

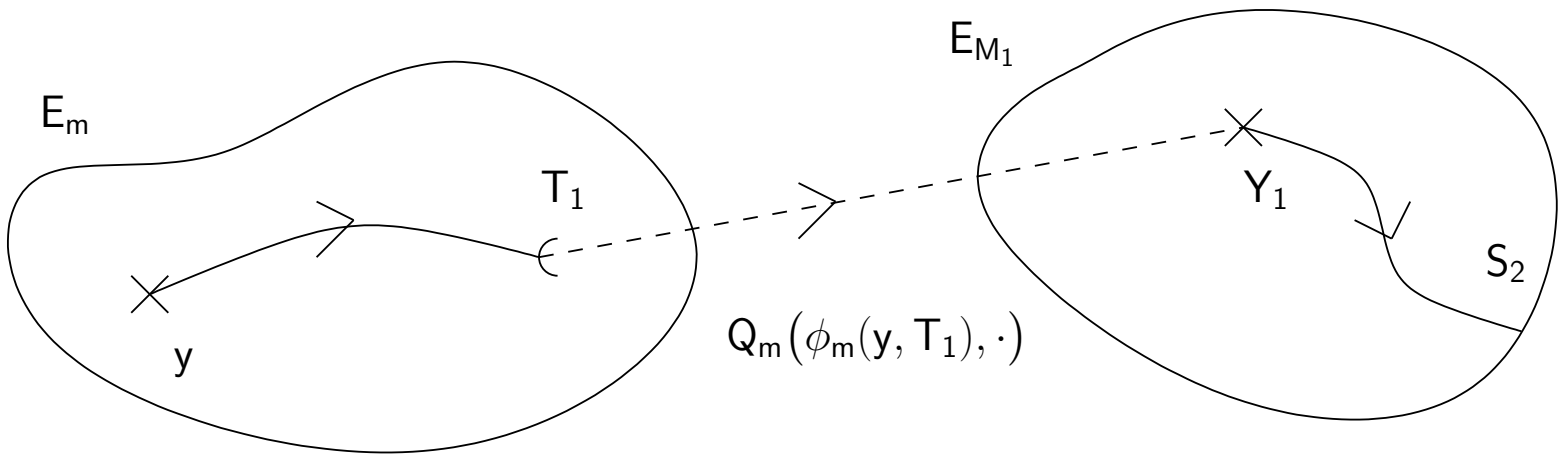
PDMP processus hybride non diffusif



Deux familles de problèmes

- processus BAR et division cellulaire
- méthodes numériques pour les PDMP et fiabilité dynamique

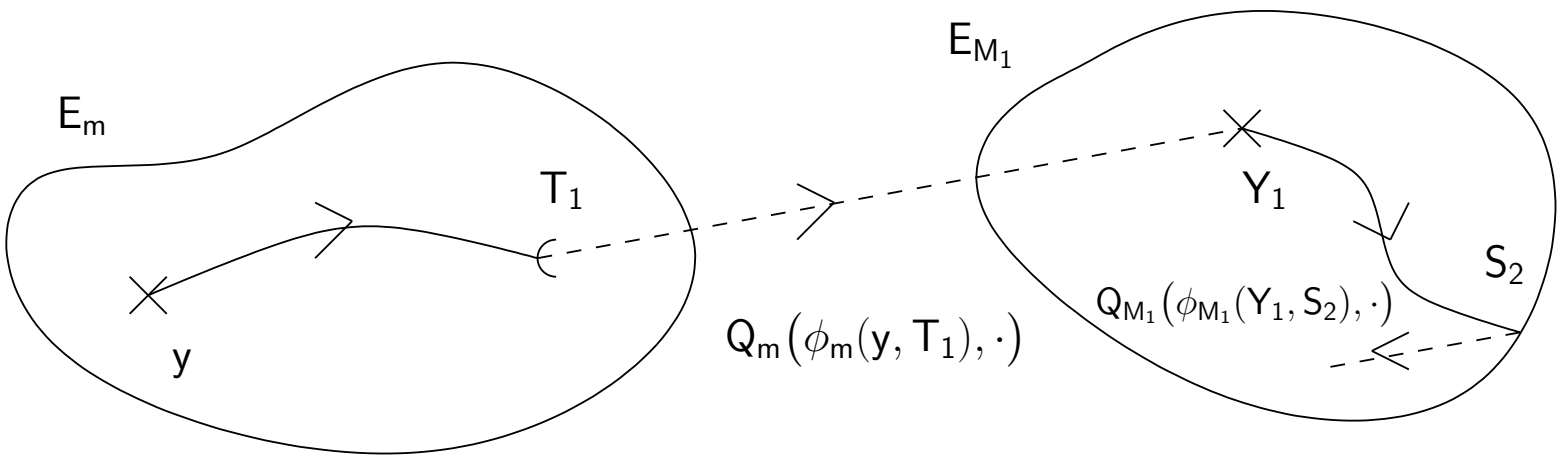
PDMP processus hybride non diffusif



Deux familles de problèmes

- processus BAR et division cellulaire
- méthodes numériques pour les PDMP et fiabilité dynamique

PDMP processus hybride non diffusif



Méthodes numériques pour les PDMP

Constat

- fort potentiel d'applications
- nombreux résultats théoriques [Davis 93], [Jacobsen 06]
- processus faciles à simuler si le flot est explicite
- très peu de méthodes numériques pour les PDMP dans la littérature [Costa Davis 88, 89]

Objectif

Proposer des méthodes numériques

- adaptées à ces processus
- avec des preuves (et des vitesses) de convergence
- implémentables en pratique

Pour calculer quoi ?

Problèmes de contrôle

Calculer une approximation de la performance optimale et d'une stratégie optimale pour

- le problème d'arrêt optimal sous observation complète [AnAP 2010, JRR 2012, RESS 2013]
- le problème d'arrêt optimal sous observation partielle [SPA 2013]
- un problème de contrôle impulsionnel [Aut 2012]

Evaluation de performance

- calcul d'espérance de fonctionnelles [CAMCoS 2012]
- calcul de temps de sortie [AdAP 2012]

Avec quels outils ?

Spécificités des PDMP

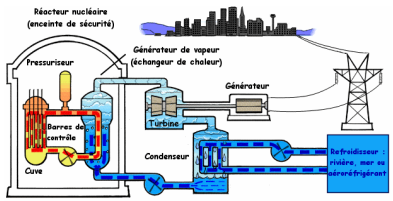
- processus à saut, sauts à la frontière
- discontinuités dans les équations d'optimalité
- chaîne induite en temps discret

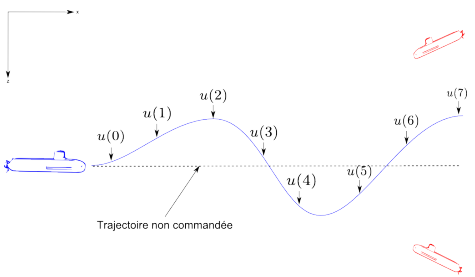
Plan de travail

- écriture récursive du problème avec la chaîne induite (programmation dynamique)
- discrétisation par quantification
- utiliser les propriétés spécifiques des PDMP

Pour quelles applications ?

- Durée de service et optimisation de la maintenance pour une structure métallique Astrium [JRR 2012]
- Optimisation de la maintenance pour un équipement optronique Thales
- Probabilités de panne du circuit secondaire d'une centrale nucléaire EDF
- Optimisation de trajectoires de sous-marins DCNS



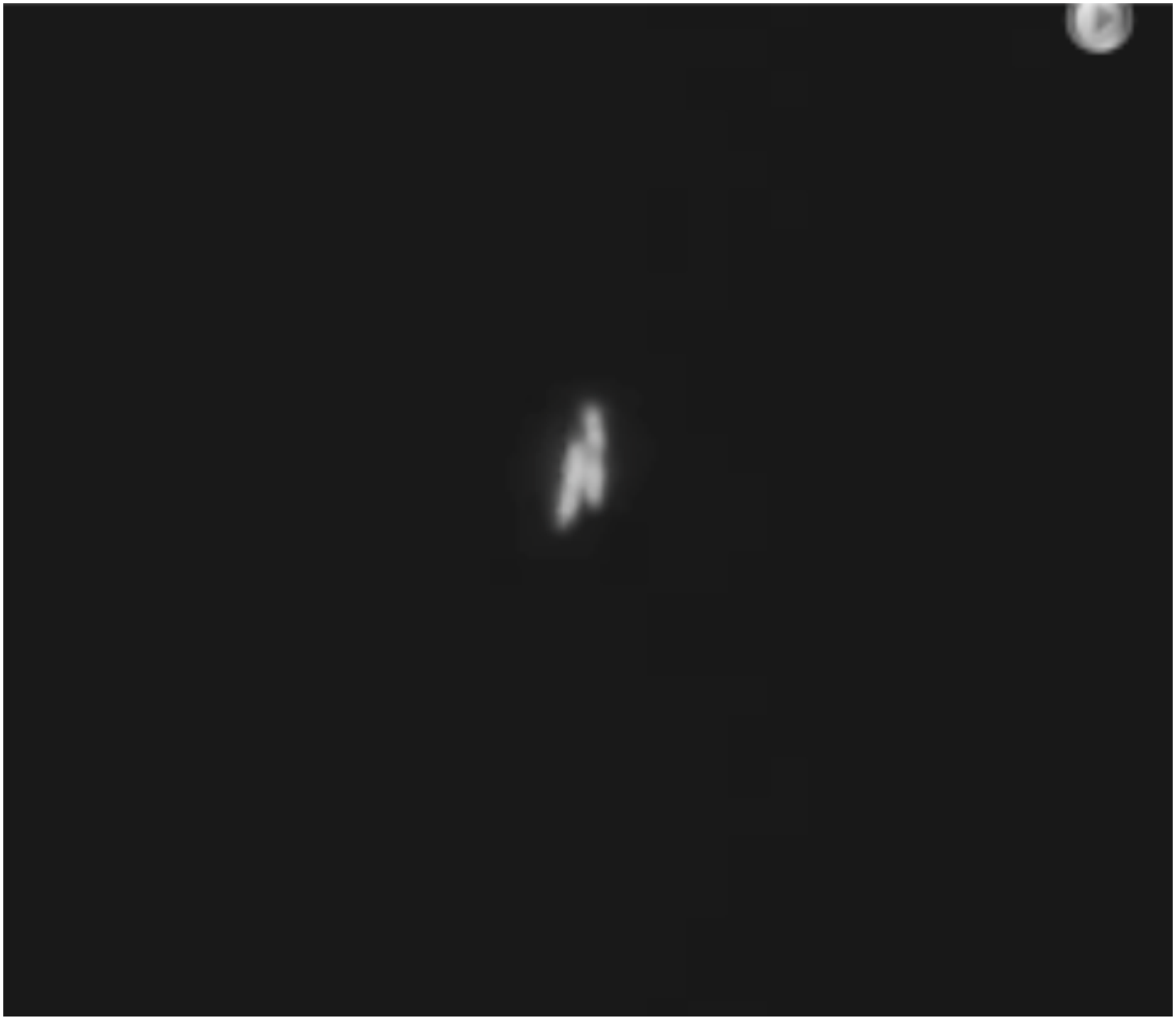


Plan de l'exposé

Division cellulaire

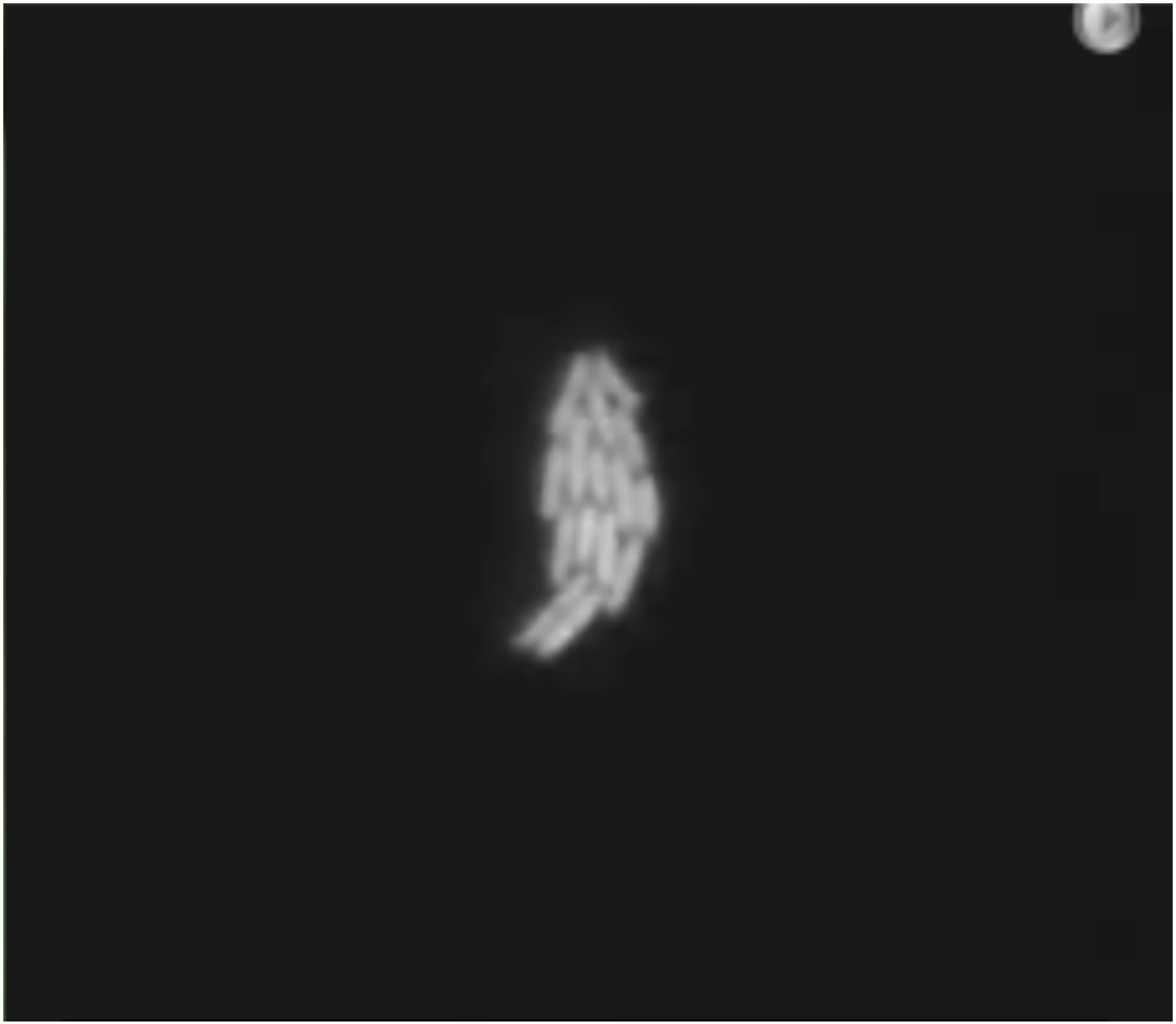
Division cellulaire

Division cellulaire



Division cellulaire

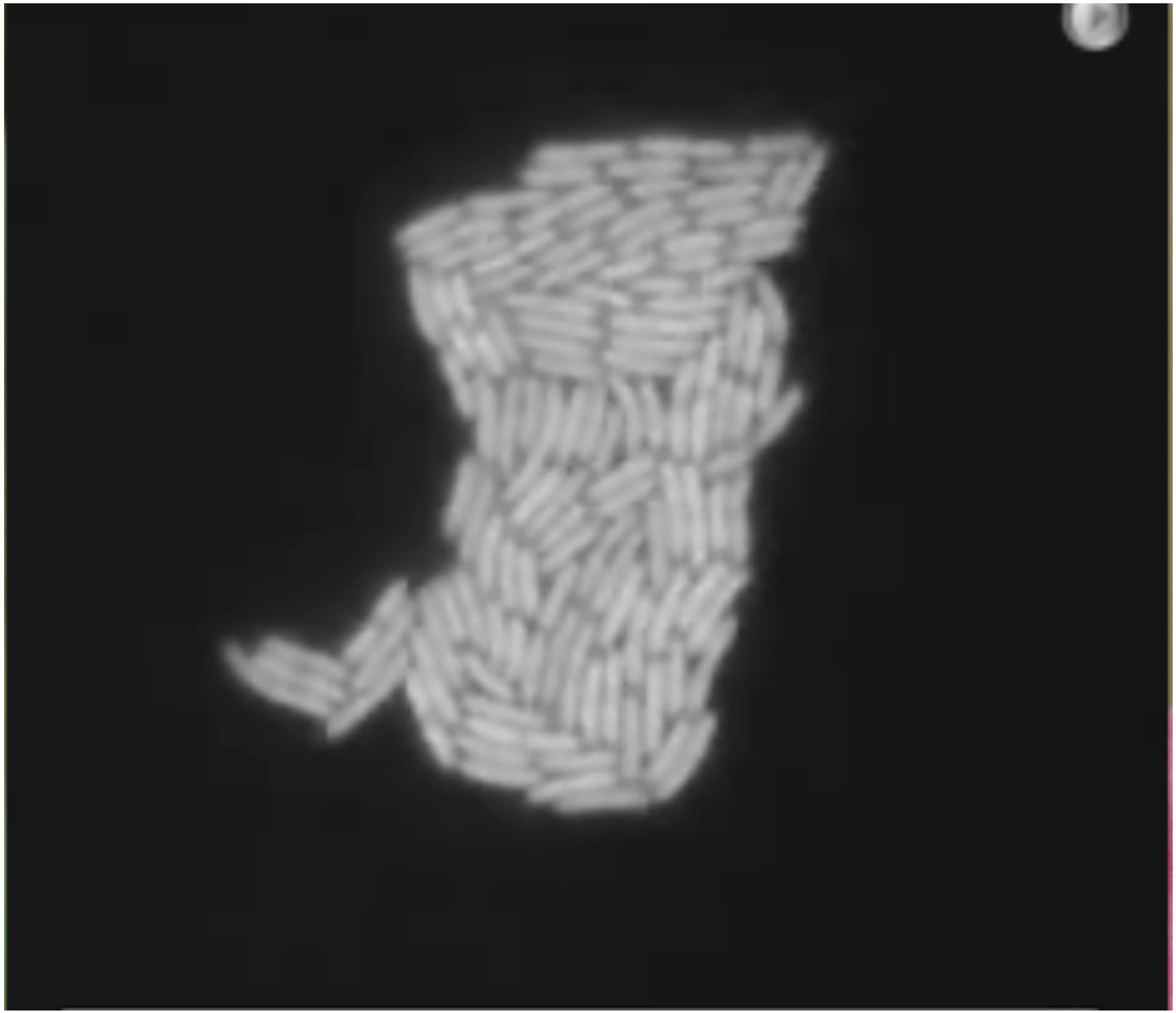
Division cellulaire



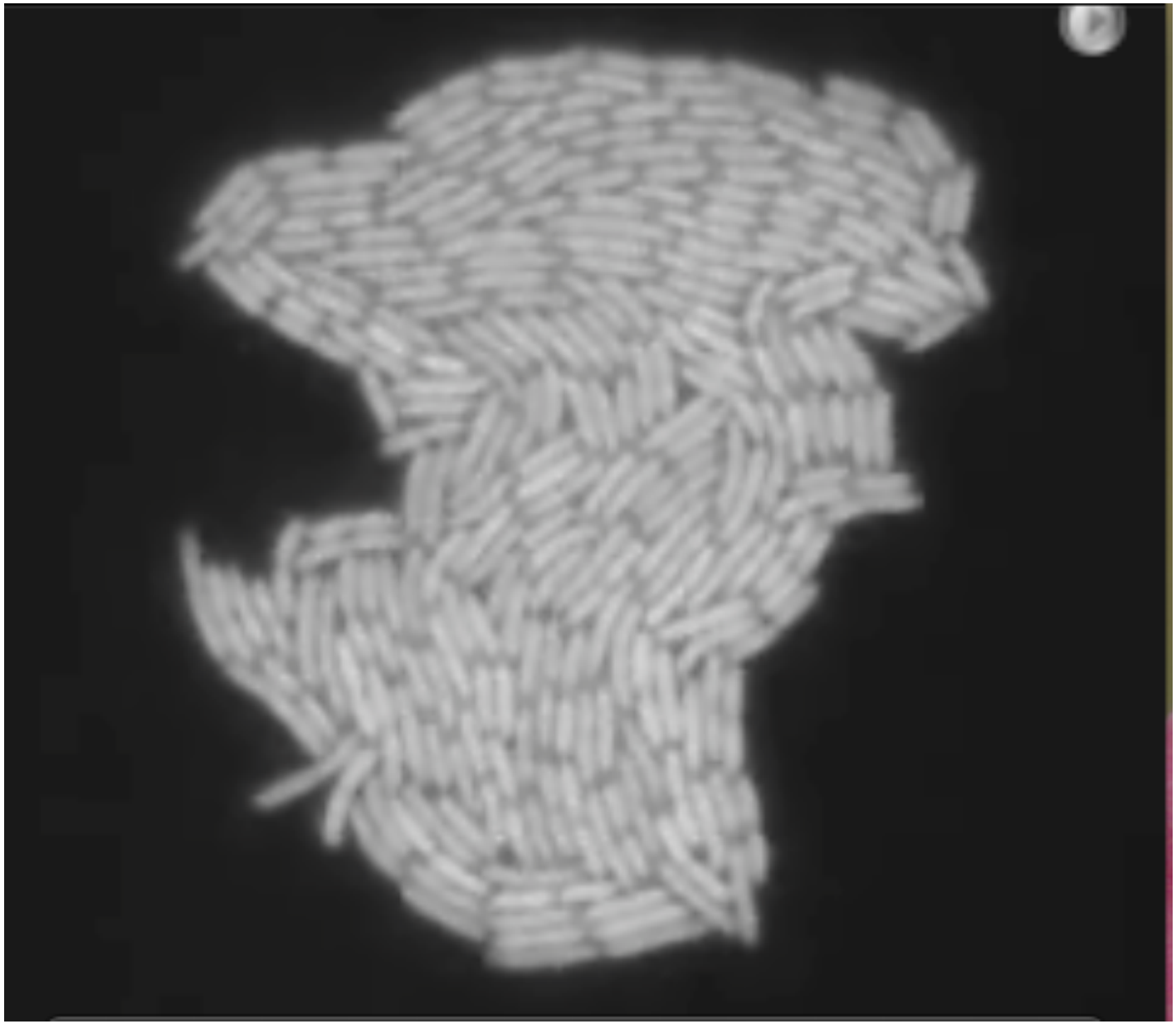
Division cellulaire

Division cellulaire

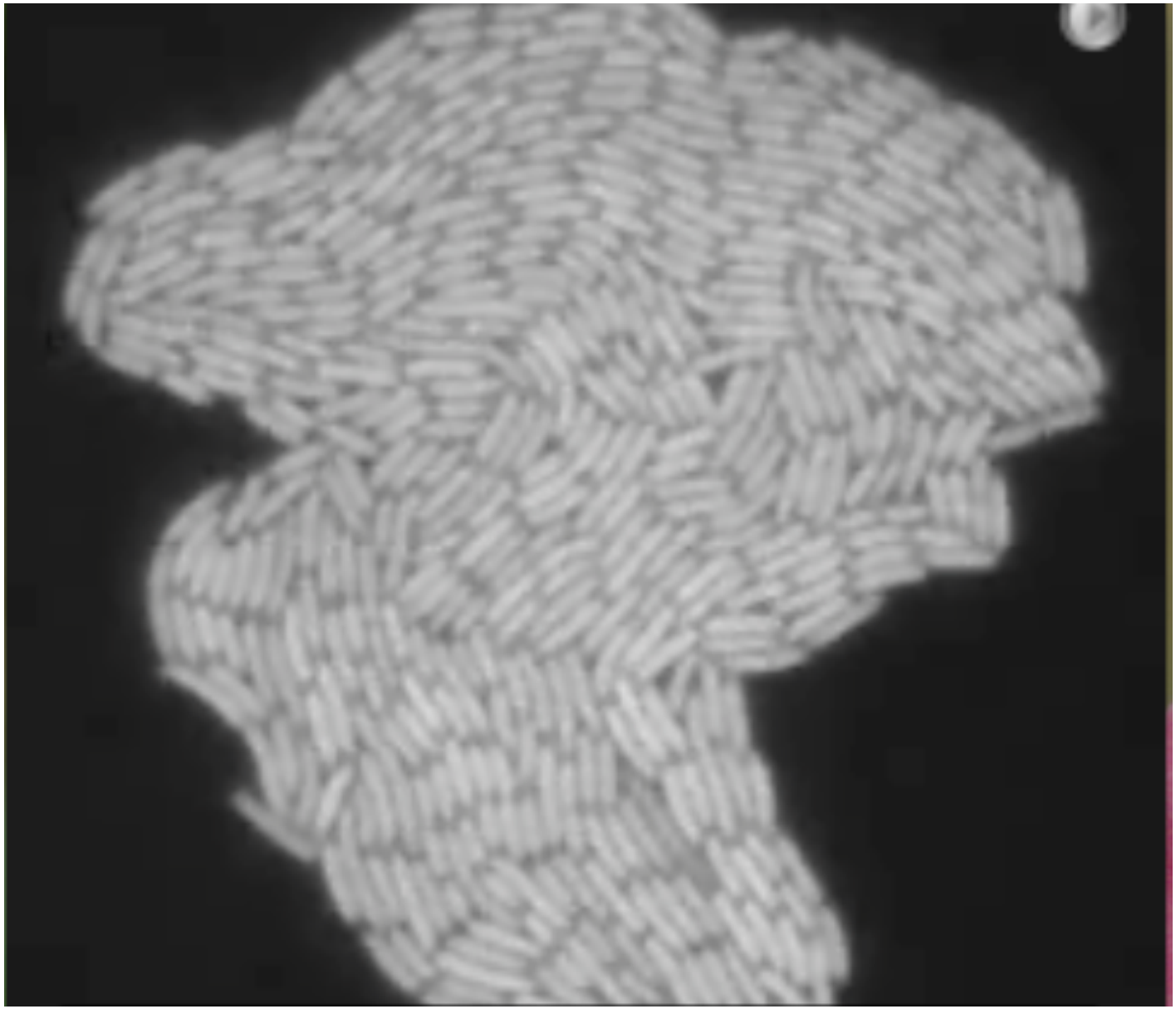
Division cellulaire



Division cellulaire



Division cellulaire



Premier modèle BAR

[Cowan & Staudte 1986] Modèle auto-régressif de bifurcation

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= a + bX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

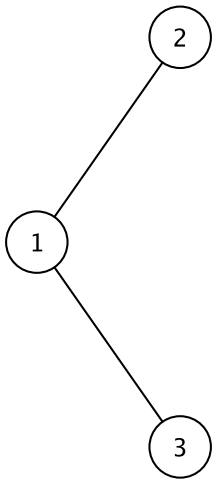
$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid
$\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$
Régime stationnaire si $X_1 \sim \mathcal{N}(\frac{a}{1-b}, \frac{\sigma^2}{1-b^2})$

1

Premier modèle BAR

[Cowan & Staudte 1986] Modèle auto-régressif de bifurcation

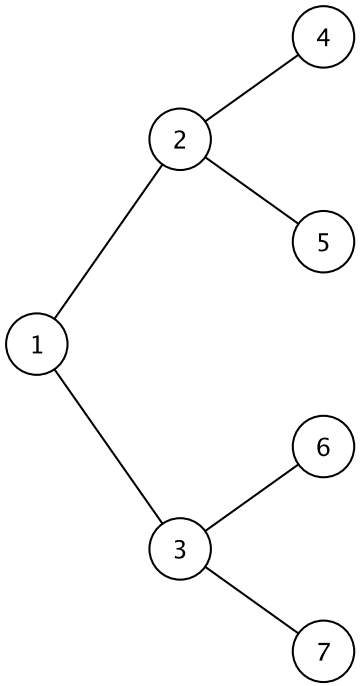
$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= a + bX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$



$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid
$\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$
Régime stationnaire si $X_1 \sim \mathcal{N}(\frac{a}{1-b}, \frac{\sigma^2}{1-b^2})$

Premier modèle BAR

[Cowan & Staudte 1986] Modèle auto-régressif de bifurcation



$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= a + bX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

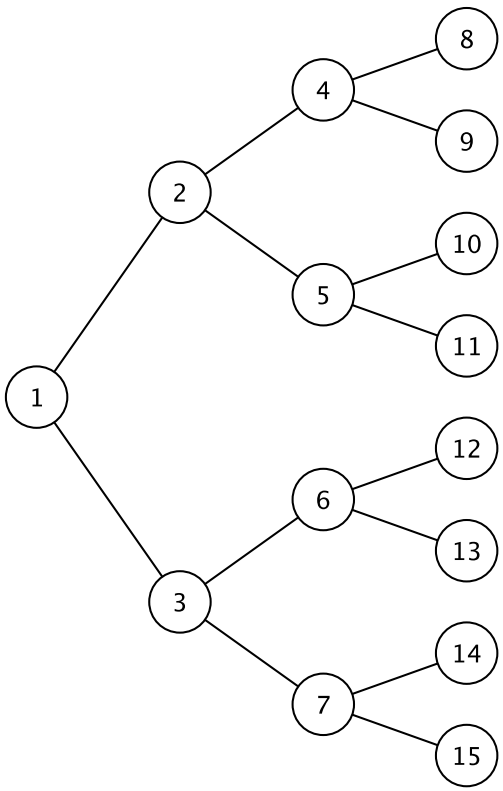
$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid

$\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$

Régime stationnaire si $X_1 \sim \mathcal{N}(\frac{a}{1-b}, \frac{\sigma^2}{1-b^2})$

Premier modèle BAR

[Cowan & Staudte 1986] Modèle auto-régressif de bifurcation



$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= a + bX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

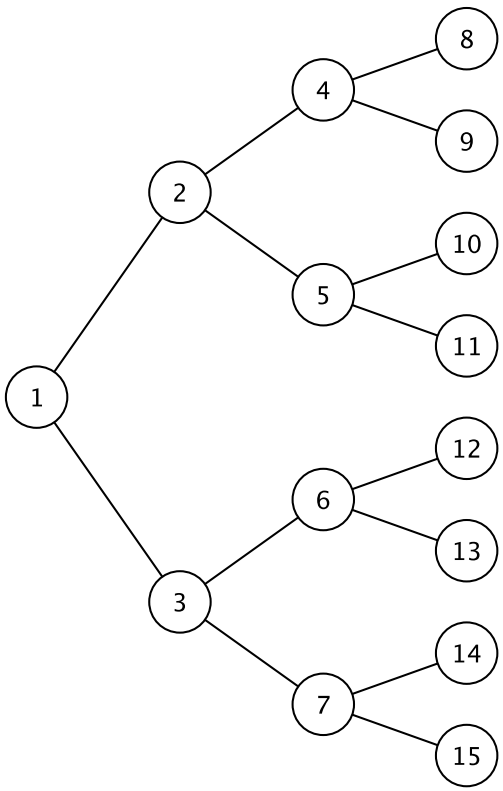
$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid

$\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$

Régime stationnaire si $X_1 \sim \mathcal{N}(\frac{a}{1-b}, \frac{\sigma^2}{1-b^2})$

Premier modèle BAR

[Cowan & Staudte 1986] Modèle auto-régressif de bifurcation



$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= a + bX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

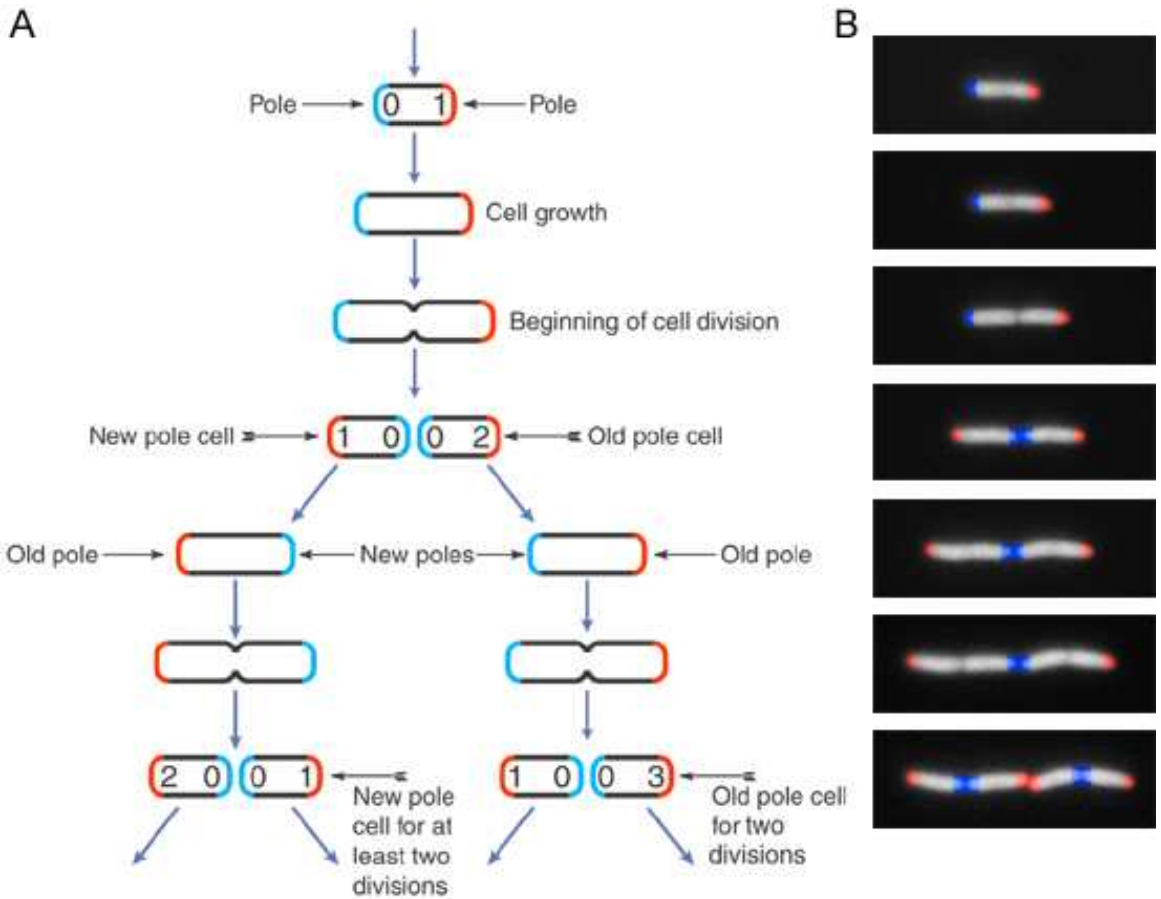
$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid
$\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$
Régime stationnaire si $X_1 \sim \mathcal{N}(\frac{a}{1-b}, \frac{\sigma^2}{1-b^2})$

Estimer les paramètres pour mesurer les corrélations

- b corrélation mère-fille
- $\phi = b^2 + (1 - b^2)\rho/\sigma^2$ corrélation entre soeurs

Asymétrie de la division

[Stewart & al. 2005]



BAR asymétrique

[Guyon 2007] Modèle asymétrique

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

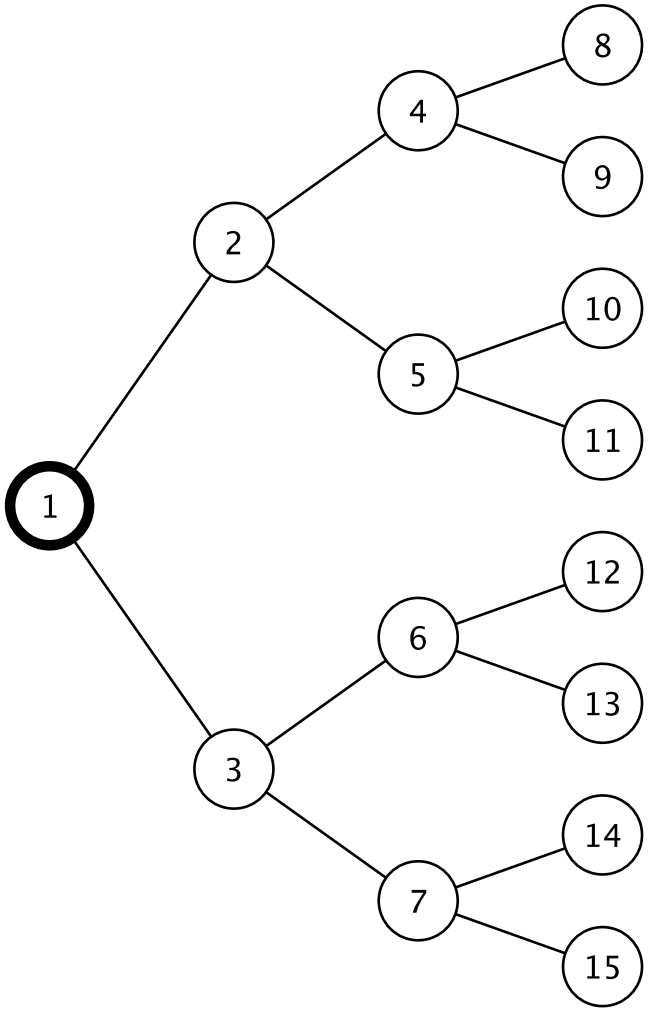
$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$
pas de régime stationnaire

Estimer les paramètres pour tester l'asymétrie

- $(a, b) = (c, d)$
- $a/(1-b) = c/(1-d)$

Méthode chaînes de Markov bifurquantes en utilisant la structure d'arbre par générations

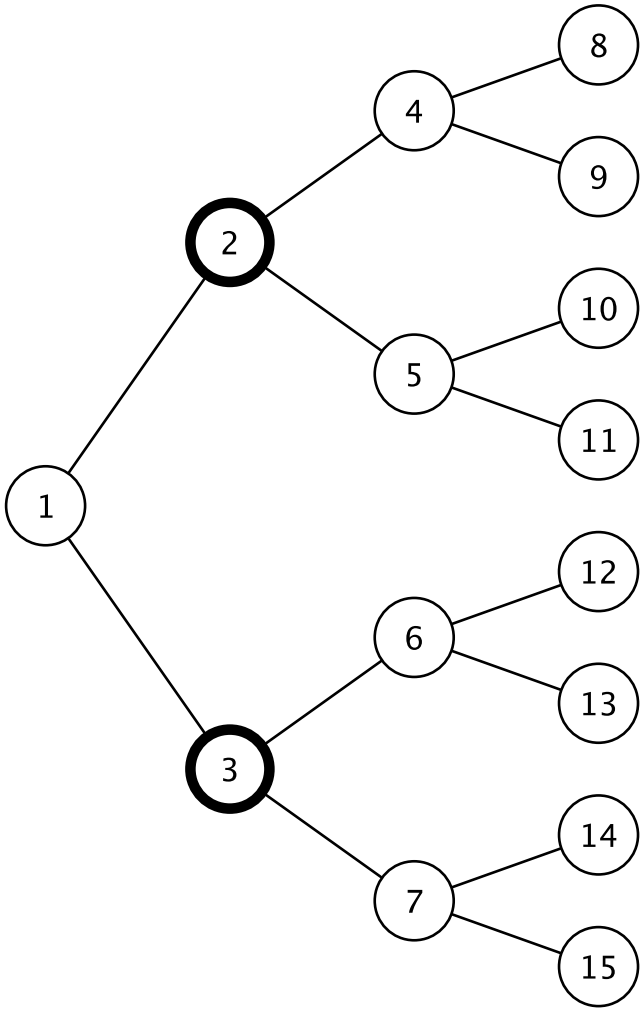
Générations



Génération 0:

$$\mathbb{G}_0 = \{1\}$$

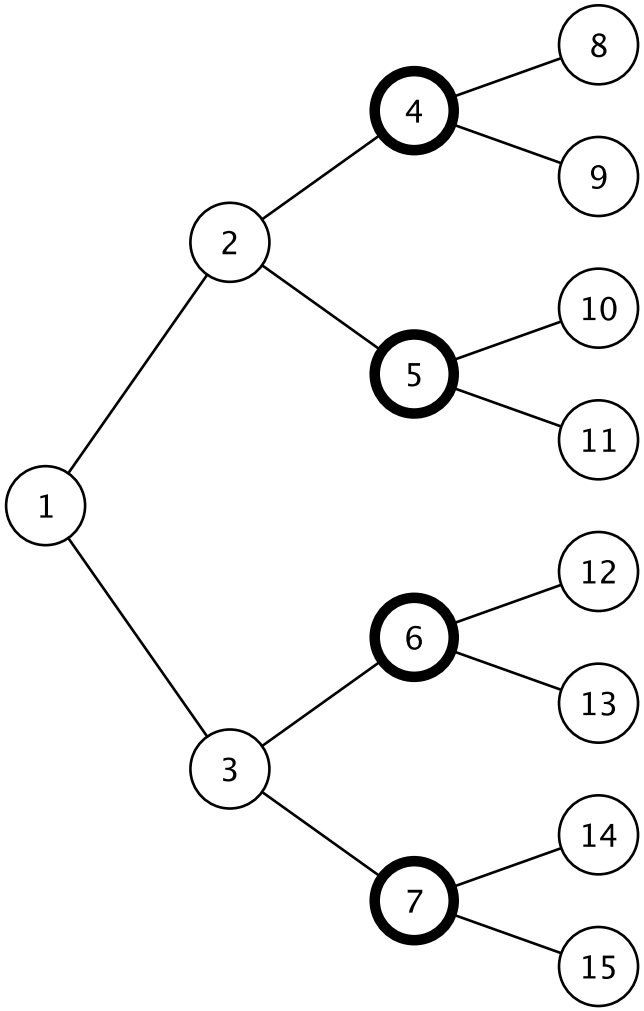
Générations



Génération 1:

$$\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$$

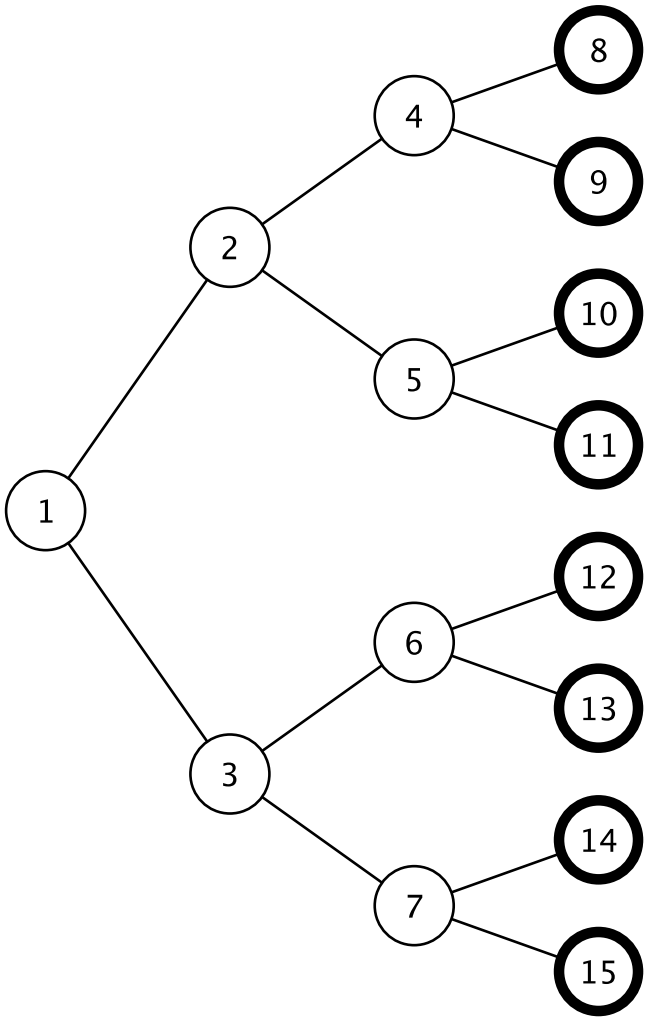
Générations



Génération 2:

$$\mathbb{G}_2 = \{4, 5, 6, 7\}$$

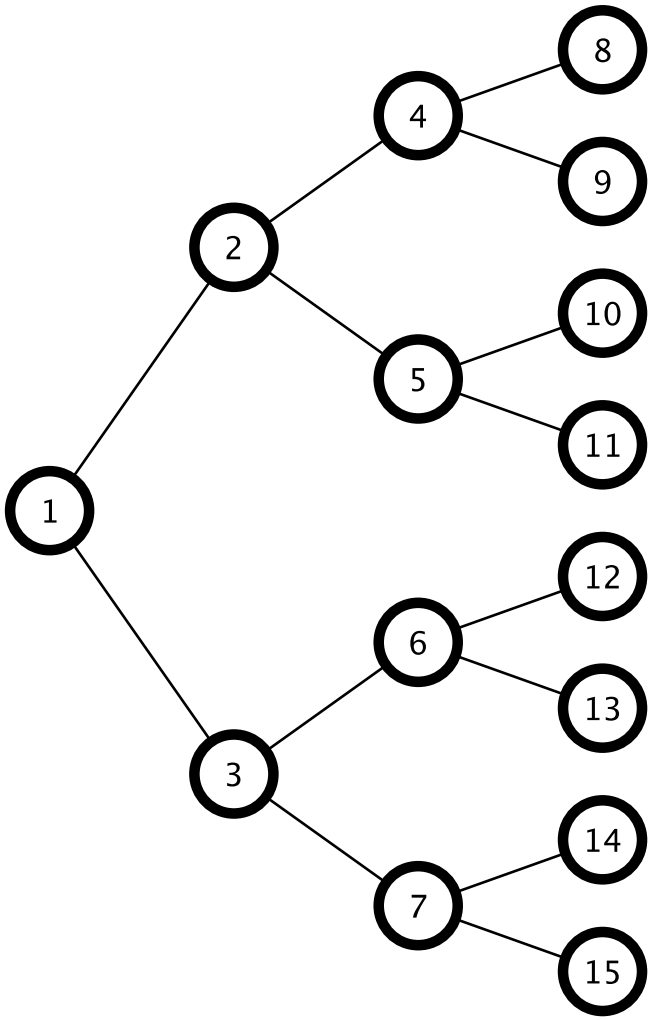
Générations



Génération n:

$$\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$$

Générations



Arbre jusqu'à la génération n:

$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{\ell=0}^{n} \mathbb{G}_\ell$$

Méthode par chaîne de Markov bifurquante

- définition d'un modèle de chaîne de Markov sur un arbre binaire

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k\in\mathbb{G}_n} f_k(X_{2k}, X_{2k+1}) \,\middle|\, \sigma(X_j, j \in \mathbb{T}_n)\right] = \prod_{k\in\mathbb{G}_n} P f_k(X_k)$$

- comportement asymptotique de (X_k) donnée par la chaîne induite

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y_0 & = & X_1, \\ Y_{n+1} & = & A_{n+1} + B_{n+1} Y_n \end{array}\right.$$

(A_n, B_n) iid de loi $(a+\epsilon_2, b)\mathbb{1}_{\{\zeta=1\}} + (c+\epsilon_3, d)\mathbb{1}_{\{\zeta=0\}}$,
$\zeta \sim$ Bernoulli(1/2) lignée aléatoire

Première contribution

[EJP 2009] Modèle asymétrique

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

Hypothèses

$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k, k \in \mathbb{T}_n\}$ filtration des générations

- moments d'ordre 8 pour le bruit
- différence de martingale $\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}|\mathcal{F}_n] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{G}_n$, ϵ_{2k+i} indépendant de ϵ_{2l+j} conditionnellement à $\mathcal{F}_n$ pour tout $k \neq l \in \mathbb{G}_n$
- $\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}^2|\mathcal{F}_n] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}|\mathcal{F}_n] = \rho$ pour tout $k \in \mathbb{G}_n$

- vitesse de convergence des estimateurs
- méthode martingale

Méthode martingale

Convergence des martingales L^2

(M_n) martingale scalaire bornée dans L^2

$< M >_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n]$

Si $\lim_{n\to\infty} < M >_n = +\infty$, alors $\frac{M_n}{<M>_n} \to 0$ p.s.

+ conditions de moment alors $\left(\frac{M_n}{<M>_n}\right)^2 = \mathcal{O}(\frac{log(<M>_n)}{<M>_n})$ p.s.

Mise en œuvre

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations
- calculer la limite du crochet
- appliquer le théorème de vitesse de convergence ?

Méthode martingale

Convergence des martingales L^2

(M_n) martingale scalaire bornée dans L^2

$< M >_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n]$

Si $\lim_{n\to\infty} < M >_n = +\infty$, alors $\frac{M_n}{<M>_n} \to 0$ p.s.

+ conditions de moment alors $\left(\frac{M_n}{<M>_n}\right)^2 = \mathcal{O}(\frac{log(<M>_n)}{<M>_n})$ p.s.

Mise en œuvre

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations
- calculer la limite du crochet
- redémontrer le théorème de vitesse de convergence pour une martingale sur un arbre binaire

Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- aucune généalogie complète : cellules hors champs ou superposées

Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- aucune généalogie complète : cellules hors champs ou superposées

On ne peut pas appliquer notre procédure d'estimation et de test à ces données

Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- aucune généalogie complète : cellules hors champs ou superposées

On ne peut pas appliquer notre procédure d'estimation et de test à ces données

$\Longrightarrow$ Nouvelle procédure d'estimation en tenant compte des données manquantes

Plan de l'exposé

Modèle Galton-Watson

[Delmas & Marsalle 2010]

- chaque cellule a un type 0 (pair–nouveau pôle) ou 1 (impair–ancien pôle)
- une cellule non observée n'a pas de descendante observée
- probabilité $p(j_0, j_1)$ d'avoir j_0 fille de type 0 et j_1 fille de type 1, tiré indépendamment pour chaque cellule
- Z_n nombre de cellules présentes à la génération n Galton-Watson
- inférence sur le BAR partiellement observé par méthode chaîne de Markov bifurquante

Modèle Galton-Watson

[Delmas & Marsalle 2010]

- chaque cellule a un type 0 (pair–nouveau pôle) ou 1 (impair–ancien pôle)
- une cellule non observée n'a pas de descendante observée
- probabilité $p(j_0, j_1)$ d'avoir j_0 fille de type 0 et j_1 fille de type 1, tiré indépendamment pour chaque cellule
- Z_n nombre de cellules présentes à la génération n Galton-Watson
- inférence sur le BAR partiellement observé par méthode chaîne de Markov bifurquante

Le nombre de cellules filles de chaque type devrait aussi dépendre du type de la mère

Modèle de Galton-Watson à deux types

- $\delta_k = 1$ si la cellule k est observée, 0 sinon
- probabilité $p^{(i)}(j_0, j_1)$ pour une cellule mère de type i d'avoir j_0 fille de type 0 et j_1 fille de type 1, tiré indépendamment pour chaque cellule
- Z_n^i nombre de cellules de type i présentes à la génération n, (Z_n^0, Z_n^1) processus de Galton-Watson à deux types
- une cellule non observée n'a pas de descendante observée

Extinction

Matrice de descendance

$$P = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix}$$

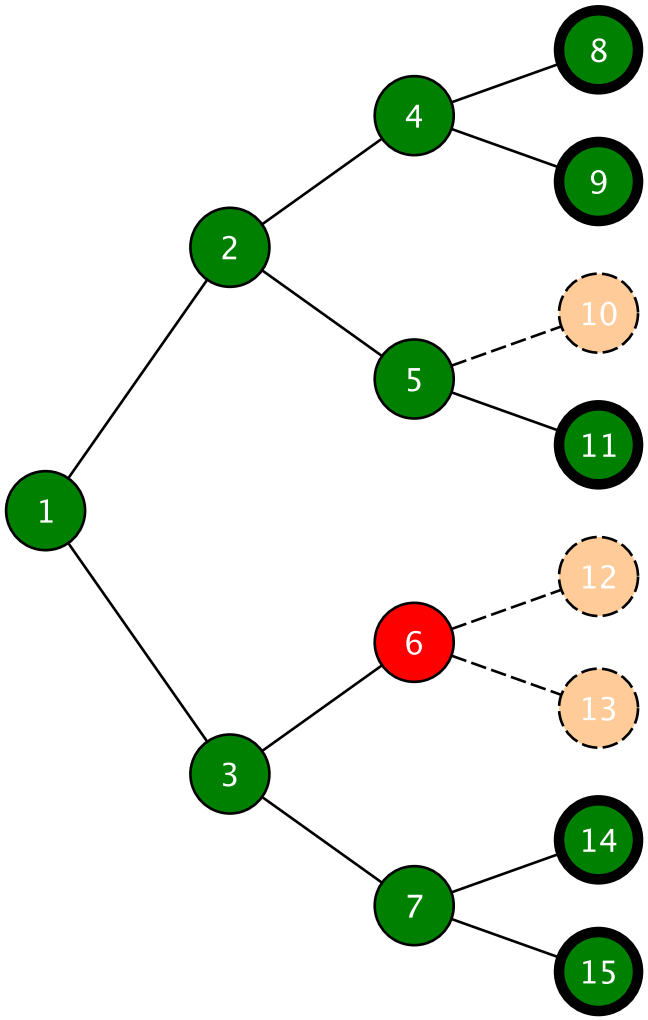
$p_{i0} = p^{(i)}(1,0) + p^{(i)}(1,1)$: nombre moyen de filles de type 0
$p_{i1} = p^{(i)}(0,1) + p^{(i)}(1,1)$: nombre moyen de filles de type 1
d'une mère de type i

Critère d'extinction

π rayon spectral de P

- si $\pi < 1$, extinction presque sure
- si $\pi > 1$, extinction avec probabilité < 1

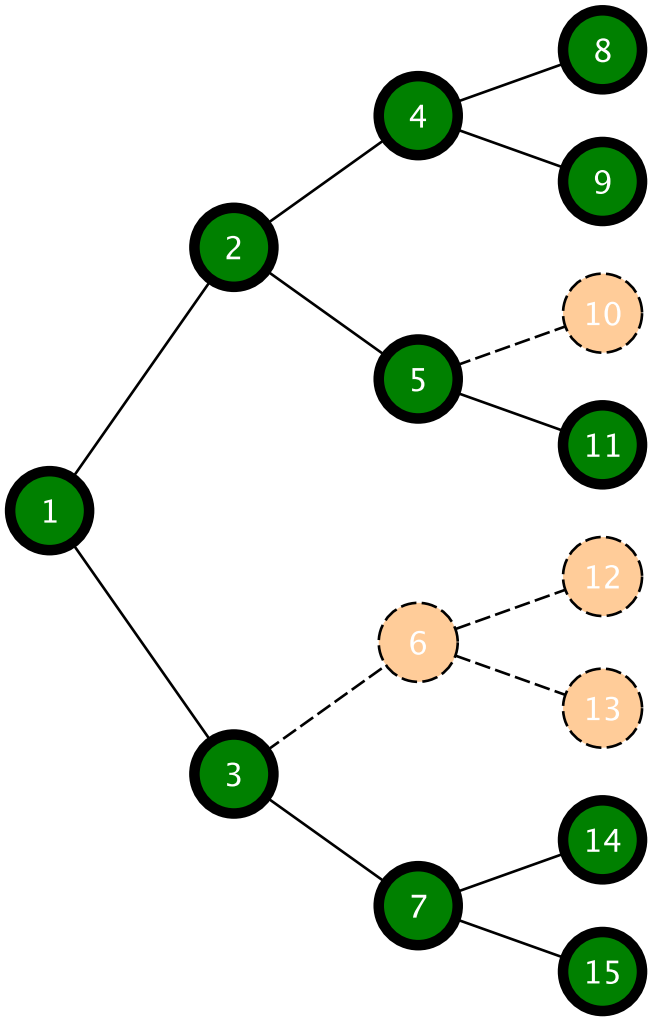
Générations observées



Génération n observée:

$$\mathbb{G}_n^* = \{k \in \mathbb{G}_n \ ; \ \delta_k = 1\}$$

Générations observées



Arbre jusqu'à la génération n:

$$\mathbb{T}_n^* = \{k \in \mathbb{T}_n \; ; \; \delta_k = 1\} = \cup_{\ell=0}^{n} \mathbb{G}_\ell^*$$

BAR partiellement observé

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + b\,X_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} &= c + d\,X_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

Hypothèses

- independance entre (δ_k) et (X_k) et $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$
- bruit différence de martingale et moments d'ordre 8

Estimation de $\boldsymbol{\theta} = (a, b, c, d)^t$: minimiser

$$\Delta_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k}(X_{2k} - a - bX_k)^2 + \delta_{2k+1}(X_{2k+1} - c - dX_k)^2.$$

Estimateurs empiriques des moments du bruit

Estimateur de θ

Estimateur des moindres carrés pour θ

$$\widehat{\theta}_n = \begin{pmatrix} \widehat{a}_n \\ \widehat{b}_n \\ \widehat{c}_n \\ \widehat{d}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{2k} X_{2k} \\ \delta_{2k} X_k X_{2k} \\ \delta_{2k+1} X_{2k+1} \\ \delta_{2k+1} X_k X_{2k+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_n^0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S}_n^1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_n^0 = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{S}_n^1 = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

Convergence avec vitesse

Théorème

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \parallel \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \parallel^2 = \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \mathcal{O}\left(\frac{\log |\mathbb{T}_{n-1}^*|}{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}\right)$$

Preuve: méthode martingale

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations (augmentée de tout le processus d'observation)
- calculer la limite du crochet
- théorème de vitesse de convergence pour une martingale sur un arbre binaire de Galton-Watson

Martingale principale

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{M}_n$, avec $(\boldsymbol{M}_n)$ martingale pour la filtration des générations et observations

$$\boldsymbol{M}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{2k}\epsilon_{2k} \\ \delta_{2k}X_k\epsilon_{2k} \\ \delta_{2k+1}\epsilon_{2k+1} \\ \delta_{2k+1}X_k\epsilon_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{M}_n)_{n\geq 1}$ de carré intégrable et de crochet $< \boldsymbol{M} >_n = \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}$

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 \boldsymbol{S}_n^0 & \rho \boldsymbol{S}_n^{0,1} \\ \rho \boldsymbol{S}_n^{0,1} & \sigma^2 \boldsymbol{S}_n^1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{S}_n^{0,1} = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k}\delta_{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

Convergence du crochet

Lois des grands nombres pour les observations (δ_k), le bruit $(\delta_k \epsilon_k)$, le BAR $(\delta_{2k+i} X_k^q)$

- martingales scalaires pour différentes filtrations
- forme spécifique de l'auto-régression
- hypothèse $\max\{|b|, |d|\} < 1$

Théorème central limite

Théorème

Conditionnellement à la non extinction

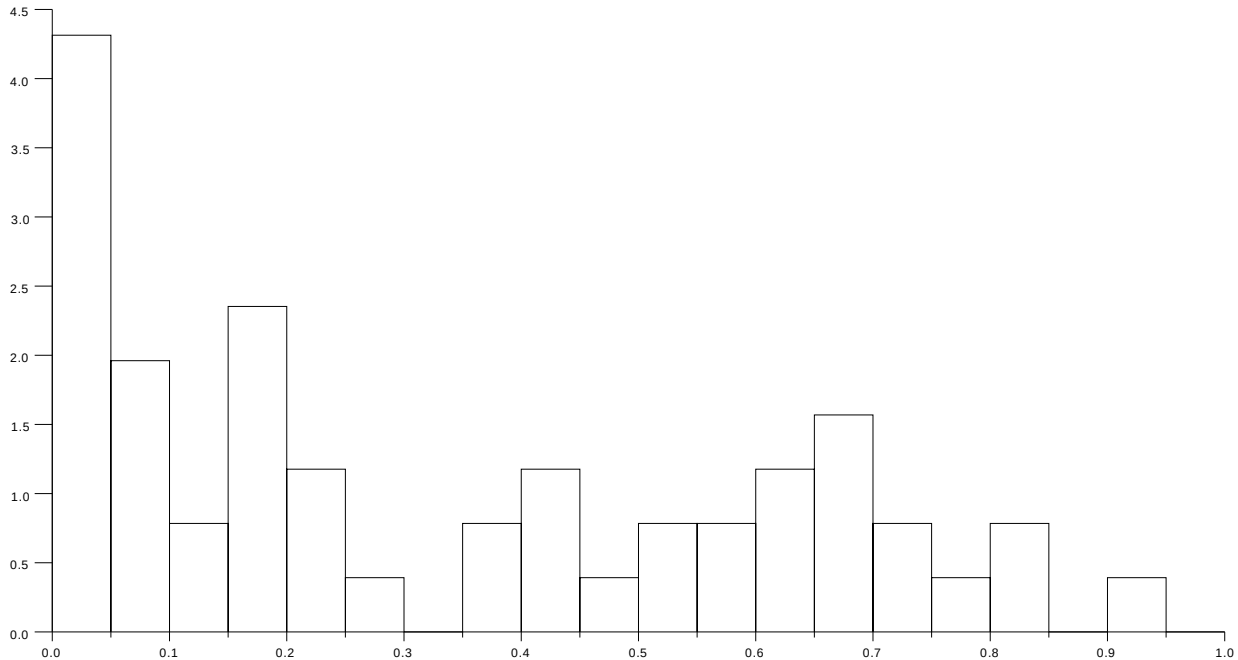
$$\sqrt{|\mathbb{T}^*_{n-1}|}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{S}^{-1})$$

Deux difficultés

- normalisation $|\mathbb{T}^*_{n-1}|$ aléatoire
- résultat conditionné à la non extinction : valable sur l'ensemble de non extinction $\overline{\mathcal{E}} = \cap\{|\mathbb{G}^*_n| > 0\}$ muni de la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{\mathcal{E}}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \overline{\mathcal{E}})/\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})$

Tests de symétrie : données Escherichia coli

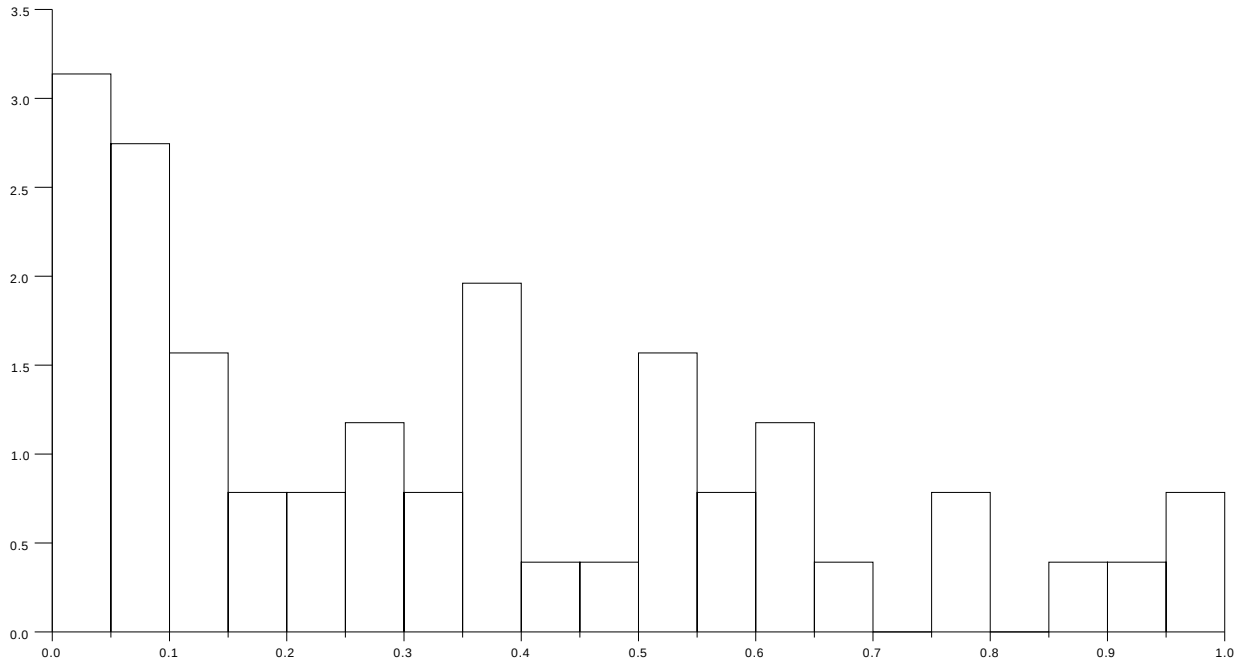
p-valeurs pour les 51 généalogies comportant 8 ou 9 générations



Test $(a, b) = (c, d)$

Tests de symétrie : données Escherichia coli

p-valeurs pour les 51 généalogies comportant 8 ou 9 générations



Test $a/(1-b) = c/(1-d)$

Nouveau modèle

Simulations $\Longrightarrow$ faible puissance des test pour 8 ou 9 générations

Modèle d'estimation multi-arbres

- utiliser plusieurs généalogies (en nombre fixé) pour l'inférence
- les généalogies sont des tirages iid du modèle BAR partiellement observé avec les mêmes paramètres
- union des ensembles de non-extinction
- nouvel estimateur
- nouvelles preuves de convergence avec les mêmes idées
- inférence et tests de symétrie sur le Galton Watson

Estimateur multi-arbres

Estimateur des moindres carrés pour θ

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{j,2k} X_{j,2k} \\ \delta_{j,2k} X_{j,k} X_{j,2k} \\ \delta_{j,2k+1} X_{j,2k+1} \\ \delta_{j,2k+1} X_{j,k} X_{j,2k+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_n^0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S}_n^1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_n^i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{j,2k+i} \begin{pmatrix} 1 & X_{j,k} \\ X_{j,k} & X_{j,k}^2 \end{pmatrix}$$

Analyse multi-arbres des données E. coli : BAR

Estimation de $\theta \Longrightarrow$ hypothèse $\max\{|b|, |d|\} < 1$ vraie

a	0.0203 [0.0197; 0.0210]	c	0.0195 [0.0188; 0.0201]
b	0.4615 [0.4437; 0.4792]	d	0.4782 [0.4605; 0.4959]

Estimation des moments du bruit

σ^2	$1.81 \cdot 10^{-5}$ $[1.12 \cdot 10^{-5}; 2.50 \cdot 10^{-5}]$
ρ	$0.48 \cdot 10^{-5}$ $[0.44 \cdot 10^{-5}; 0.52 \cdot 10^{-5}]$

Tests : hypothèse $(a, b) = (c, d)$ rejetée (p-valeur$= 10^{-5}$),
hypothèse $a/(1-b) = c/(1-d)$ rejetée (p-valeur$= 2 \cdot 10^{-3}$)

Analyse multi-arbres des données E. coli : Galton-Watson

Estimation des lois de reproduction

$p^{(0)}(0,0)$	0.35579 [0.35574; 0.35583]	$p^{(1)}(0,0)$	0.35611 [0.35606; 0.35616]
$p^{(0)}(1,0)$	0.03621 [0.03620; 0.03622]	$p^{(1)}(1,0)$	0.04707 [0.04706; 0.04708]
$p^{(0)}(0,1)$	0.04740 [0.04739; 0.04741]	$p^{(1)}(0,1)$	0.03755 [0.03754; 0.03756]
$p^{(0)}(1,1)$	0.56060 [0.56055; 0.56065]	$p^{(1)}(1,1)$	0.55928 [0.55923; 0.55933]

Estimation de π : $1.204\ [1.191; 1.217] \Longrightarrow$ hypothèse $\pi > 1$ vraie

Tests : hypothèse d'égalité des moyennes des deux lois non rejetée (p-valeur$= 0.9$), hypothèse d'égalité des deux vecteurs rejetée (p-valeur$= 2 \cdot 10^{-5}$)

Plan de l'exposé

Modèle à coefficients aléatoires

$$\left\{ \begin{array}{lcccl} X_{2k} & = & (a+\varepsilon_{2k}) & + & (b+\eta_{2k})\, X_k \\ X_{2k+1} & = & (c+\varepsilon_{2k+1}) & + & (d+\eta_{2k+1})\, X_k \end{array} \right.$$

Hypothèses

- $(\varepsilon_{2k}, \eta_{2k}, \varepsilon_{2k+1}, \eta_{2k+1})$ iid
- moments d'ordre 32
- donnés manquantes Galton Watson simple surcritique

Estimateurs

- Estimateur des moindres carrés pour $\boldsymbol{\theta}$: même formule
- Estimateurs des moindres carrés modifiés pour les moments du bruit minimisent

$$\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{G}_\ell}(\widehat{\epsilon}_{2k}^2-\mathbb{E}[\epsilon_{2k}^2|\mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])^2+(\widehat{\epsilon}_{2k+1}^2-\mathbb{E}[\epsilon_{2k+1}^2|\mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])^2$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k\in\mathbb{G}_\ell}(\widehat{\epsilon}_{2k}\widehat{\epsilon}_{2k+1}-\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}|\mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])^2$$

avec $(\mathcal{F}_n^{\mathcal{O}})$ filtration des générations et observations et

$$\begin{cases}\epsilon_{2k} &= \delta_{2k}(\varepsilon_{2k}+\eta_{2k}X_k),\\ \epsilon_{2k+1} &= \delta_{2k+1}(\varepsilon_{2k+1}+\eta_{2k+1}X_k),\end{cases}\quad\begin{cases}\widehat{\epsilon}_{2k} &= \delta_{2k}(X_{2k}-\widehat{a}_n-\widehat{b}_nX_k),\\ \widehat{\epsilon}_{2k+1} &= \delta_{2k}(X_{2k+1}-\widehat{c}_n-\widehat{d}_nX_k).\end{cases}$$

Convergence

Vitesse de convergence

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \| \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \|^2 = \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \mathcal{O}\left(\frac{\log |\mathbb{T}_{n-1}^*|}{|\mathbb{T}_{n-1}^*|} \right)$$

Théorème central limite

Conditionnellement à la non extinction

$$\sqrt{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{S}^{-1})$$

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations et observations
- calculer la limite du crochet
- théorème de vitesse de convergence pour une martingale sur un arbre binaire de Galton-Watson

Martingale principale

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1} \boldsymbol{M}_n$, avec $(\boldsymbol{M}_n)$ martingale pour la filtration des générations et observations

$$\boldsymbol{M}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{2k} \epsilon_{2k} \\ \delta_{2k} X_k \epsilon_{2k} \\ \delta_{2k+1} \epsilon_{2k+1} \\ \delta_{2k+1} X_k \epsilon_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{2k} &= \delta_{2k}(\varepsilon_{2k} + \eta_{2k} X_k), \\ \epsilon_{2k+1} &= \delta_{2k+1}(\varepsilon_{2k+1} + \eta_{2k+1} X_k), \end{cases}$$

$(\boldsymbol{M}_n)_{n \geq 1}$ de carré intégrable et de crochet $< \boldsymbol{M} >_n = \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}$ faisant intervenir des termes en $\sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k+i} X_k^q$, $0 \leq q \leq 4$

Convergence du crochet

On ne veut pas imposer

$$\max\{|b+\eta_2|, |d+\eta_3|\} < 1$$

$\Longrightarrow$ plus de majoration qui gomme l'asymétrie
impossibilité d'utiliser la méthode martingale directe

Convergence du crochet

On ne veut pas imposer

$$\max\{|b+\eta_2|, |d+\eta_3|\} < 1$$

$\Longrightarrow$ plus de majoration qui gomme l'asymétrie
impossibilité d'utiliser la méthode martingale directe

$\Longrightarrow$ lois des grands nombres par la méthode chaîne de Markov bifurquante

Chaîne de Markov bifurquante

Chaîne bifurquante sur $\mathbb{R} \cup \partial$

$$X_k^* = X_k \mathbb{1}_{\{\delta_k=1\}} + \partial \mathbb{1}_{\{\delta_k=0\}}$$

Noyau markovien sur $(\mathbb{R} \cup \partial)^3$: $Pf(\partial) = f(\partial, \partial, \partial)$ et

$$\begin{aligned} Pf(x) \quad = \quad & p(1,1)\mathbb{E}\left[f\left(x, (b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2, (d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right] \\ & + p(1,0)\mathbb{E}\left[f\left(x, (b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2, \partial\right)\right] \\ & + p(0,1)\mathbb{E}\left[f\left(x, \partial, (d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right] \\ & + p(0,0) f(x, \partial, \partial) \end{aligned}$$

Noyaux sous-markoviens sur $\mathbb{R}$

$$P_0(x, A) = (p(1,1) + p(1,0))\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\left((b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2\right)\right]$$

Chaîne de Markov bifurquante

Chaîne bifurquante sur $\mathbb{R} \cup \partial$

$$X_k^* = X_k \mathbb{1}_{\{\delta_k=1\}} + \partial \mathbb{1}_{\{\delta_k=0\}}$$

Noyau markovien sur $(\mathbb{R} \cup \partial)^3$: $Pf(\partial) = f(\partial, \partial, \partial)$ et

$$\begin{aligned} Pf(x) \quad = \quad & p(1,1)\mathbb{E}\left[f\left(x, (b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2, (d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right] \\ & + p(1,0)\mathbb{E}\left[f\left(x, (b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2, \partial\right)\right] \\ & + p(0,1)\mathbb{E}\left[f\left(x, \partial, (d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right] \\ & + p(0,0) f(x, \partial, \partial) \end{aligned}$$

Noyaux sous-markoviens sur $\mathbb{R}$

$$P_1(x, A) = (p(1,1) + p(0,1))\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A\left((d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right]$$

Chaîne induite

(A_n, B_n) iid de loi $(a+\epsilon_2, b+\eta_2)\mathbb{1}_{\{\zeta=1\}} + (c+\epsilon_3, d+\eta_3)\mathbb{1}_{\{\zeta=0\}}$,
$\zeta \sim$ Bernoulli$(\frac{p(1,0)+p(1,1)}{m})$

$$\begin{cases} Y_0 &= X_1, \\ Y_{n+1} &= A_{n+1} + B_{n+1} Y_n \end{cases}$$

- Noyau $Q = (P_0 + P_1)/m$ avec m moyenne de la loi de reproduction
- Tirage aléatoire dans une génération : U uniforme sur $\mathbb{G}_n$

$$\mathbb{E}[f(Y_n)] = \mathbb{E}[f(X_U)|U \in \mathbb{T}^*]$$

- Lois des grands nombres : ν loi de X_1

$$\left\| \frac{1}{m^n} \sum_{k \in \mathbb{G}_n} f(X_k) \right\|_{L^2}^2 = \frac{\nu Q^n f^2}{m^n} + \frac{2}{m^2} \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{m^\ell} \nu Q^\ell P(Q^{n-\ell-1} f \otimes Q^{n-\ell-1} f)$$

Ergodicité de la chaîne induite

- loi invariante $\mu \sim \sum B_1 \cdots B_{n-1} A_n$
- ergodicité géométrique pour x^q dès que

$$\mathbb{E}[|B_1|^q] = \frac{p(1,0)+p(1,1)}{m}\mathbb{E}[|b+\eta_2|^q] + \frac{p(0,1)+p(1,1)}{m}\mathbb{E}[|d+\eta_3|^q] < 1$$

  remplace l'hypothèse $\max\{|b|,|d|\} < 1$
- loi des grands nombres pour X_k^q requiert moments d'ordre $4q$
- convergence du crochet
- vitesse de convergence via méthode martingale

Plan de l'exposé

Comparatif méthode chaîne de Markov et méthode martingale

	Martingale	Chaîne de Markov
bruit	différence de martingale moments d'ordre q	iid moments d'ordre $4q$
b et d	max < 1	moyenne pondérée < 1
observations	Galton-Watson à deux types	Galton-Watson simple deux types?

Perspectives

- remise en cause de l'asymétrie par de nouvelles expériences biologiques ?
- modélisation du vieillissement par accumulation de déchets
- dynamique des mitochondries

Rérérences

[Cowan & Staudte 1986] Cowan and Staudte The bifurcating autoregressive model in cell lineage studies. *Biometrics* (1986).

[Guyon 2007 Guyon Limit theorems for bifurcating Markov chains. Application to the detection of cellular aging. *Ann. Appl. Probab.* (2007)

[Delmas & Marsalle 2010] Delmas and Marsalle Detection of cellular aging in a Galton-Watson process. *Stoch. Process. and Appl.* (2010)

[Stewart & al. 2005] Stewart, Madden, Paul, and Taddei Aging and death in an organism that reproduces by morphologically symmetric division. *PLoS Biol.* (2005)

[EJP 2009] Bercu, de Saporta and Gégout-Petit Asymptotic analysis for bifurcating autoregressive processes via a martingale approach. *Electron. J. Probab.* (2009)

[EJS 2011] de Saporta, Gégout-Petit and Marsalle Parameters estimation for asymmetric bifurcating autoregressive processes with missing data. *Electron. J. Statist.* (2011)

[SPL 2012] de Saporta, Gégout-Petit and Marsalle Symmetry tests for bifurcating autoregressive processes with missing data. *Statistics & Probability Letters* (2012)

[ESAIM 2013] de Saporta, Gégout-Petit and Marsalle Random coefficients bifurcating autoregressive processes. *ESAIM PS* (2013)

[CSDA 2014] de Saporta, Gégout-Petit and Marsalle Statistical study of asymmetry in cell lineage data. *Comp. Stat. Data Anal.* (2014)

MERCI