Un problème d'allocation optimale de portefeuille avec coûts de transaction

Benoîte de Saporta

Université Montesquieu Bordeaux IV

Christophette Blanchet (Université de Nice)
Rajna Gibson (Université de Zurich)
Etienne Tanré et Denis Talay (INRIA Sophia Antipolis)

Journées Bordeaux-Pau-Toulouse
22-23 septembre 2006

Plan

Plan

Contrôle Stochastique

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W,\pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W,\pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Contrôle Stochastique

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Contrôle Stochastique

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Contrôle Stochastique

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
  - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
  - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Exemple : le problème de Merton
Formulation I

Marché : Actif sans risque $dS_t^0 = S_t^0 r dt$
Actif risqué $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$

- Etat : richesse $W_t = N_t S_t + N_t^0 dS_t^0$
- Contrôle : proportion de la richesse investie dans l'actif risqué $\pi_t = \frac{N_t S_t}{W_t} \in [0; 1]$

Dynamique auto-financée : $dW_t^\pi = N_t dS_t + N_t^0 dS_t^0$

$$\begin{aligned}\frac{dW_t^\pi}{W_t^\pi} &= \frac{N_t S_t}{W_t^\pi}\frac{dS_t}{S_t} + \frac{N_t^0 S_t^0}{W_t^\pi}\frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1-\pi_t)\frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= \big(\pi_t \mu + (1-\pi_t) r\big) dt + \pi_t \sigma dB_t\end{aligned}$$

Exemple : le problème de Merton

Formulation II

- Critère : espérance de l'utilité de la richesse terminale

$$U(x) = x^{\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1$$

Fonction valeur

$$V(t,x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) + \sup_{p\in[0;1]} \mathcal{L}^p \Phi(t,x) &= 0 \\
\Phi(T,x) = U(x) &= x^\alpha
\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}^p \Phi(t,x) = x\big(p\mu + (1-p)r\big)\frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 p^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t,x)$$

Comme $U(W_T^{t,x,\pi}) = U(xW_T^{t,1,\pi}) = x^\alpha U(W_T^{t,1,\pi})$, on cherche une solution de la forme $\Phi(t,x) = x^\alpha \varphi(t)$

$$\begin{aligned}
0 &= \varphi'(t) + \varphi(t) \sup_{p\in[0;1]} \left\{\alpha\big(p\mu + (1-p)r\big) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p^2\sigma^2\right\} \\
1 &= \varphi(T)
\end{aligned}$$

Exemple : le problème de Merton
Résolution de HJB

Solution

$$\Phi(t,x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$$

avec

$$\begin{aligned}\beta &= \sup_{p\in[0;1]} \left\{\alpha\big(p\mu + (1-p)r\big) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}p^2\sigma^2\right\} \\ &= \alpha r + \frac{\alpha(\mu-r)^2}{2(1-\alpha)\sigma^2}\end{aligned}$$

atteint en $p^* = \frac{\mu-r}{(1-\alpha)\sigma^2}$

Formule d'Itô pour Φ entre t et T :

$$\begin{aligned}
\Phi(T, W_T^{t,x,\pi}) &= \Phi(t,x) + \int_t^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \mathcal{L}^{\pi_u}\Phi\right)(u, W_u^{t,x,\pi})du \\
&\quad + \text{martingale} \\
U(W_T^{t,x,\pi}) &\leq \Phi(t,x) + \int_t^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sup_{p\in[0;1]} \mathcal{L}^{p}\Phi\right)(u, W_u^{t,x,\pi})du \\
&\quad + \text{martingale} \\
&\leq \Phi(t,x) + \text{martingale}
\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi(t,x) \geq \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

avec égalité lorsque $\pi_u = p^*, \quad \forall\, t \leq u \leq T$

Exemple : le problème de Merton
Conclusion

Conclusion

- $V(t, x) = x^{\alpha} e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant $\pi_u = \frac{\mu - r}{(1-\alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

Exemple : le problème de Merton
Conclusion

Conclusion

- $V(t,x) = x^{\alpha} e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant $\pi_u = \frac{\mu - r}{(1-\alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

Plan

Motivation

Investissement

- Approche fondamentale
  - principes économiques
- Analyse technique
  - comportement passé des prix
- Approche mathématique
  - modèles mathématiques

Objectif

Comparer les performances de l'analyse technique et de l'approche mathématique

Modélisation

Marché :

Actif sans risque	$dS_t^0 = S_t^0 r dt$
Actif risqué	$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma S_t dB_t$

- B mouvement Brownien standard,
- $\mu(t) \in \{\mu_1, \mu_2\}$ indépendant de B,
- contrôle $\pi_t \in \{0, 1\}$ proportion de la richesse investie dans l'actif risqué
- état W_t^π richesse correspondant à la stratégie π
- critère espérance de l'utilité de la richesse finale

Objectif

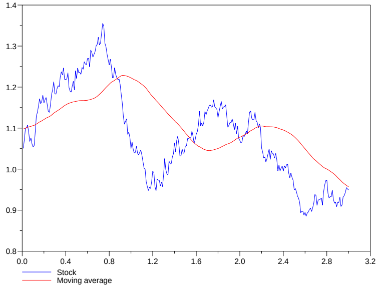
Maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse finale

Stratégie de l’analyste technique

Moyenne mobile

$$M_t^\delta = \frac{1}{\delta}\int_{t-\delta}^{t} S_u du$$

- Si $S_t > M_t^\delta$ achat
- Si $S_t < M_t^\delta$ vente



$\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\delta = 0.8$.

Optimiser

- la taille de la fenêtre δ
- les instants de décision

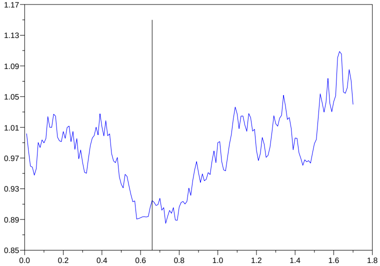
Travaux précédents
Modèle

BLANCHET, DIOP, GIBSON, KAMINSKI, TALAY, TANRÉ (2005)

Un seul changement de dérive

- $\mu(t) = \mu_1$ si $t < \tau$
- $\mu(t) = \mu_2$ si $t \geq \tau$

avec $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$



$\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\lambda = 2$.

Stratégie

détecter τ

Travaux précédents
Résultats

- Etude théorique de la fonction valeur
- Etude théorique de la détection de rupture
- Comparaisons numériques des stratégies
  - détection bien calibrée
  - détection mal calibrée
  - moyenne mobile

Conclusion

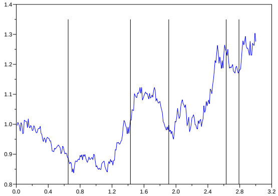
- Moyenne mobile meilleure si paramètres mal calibrés
- Taux d'erreur à partir duquel c'est vrai

Plan

Nouveau modèle

- Plusieurs changements de dérive
  (ξ_{2n+1}) iid Exp(λ_1)
  (ξ_{2n}) iid Exp(λ_2)
  $\tau_0 = 0$, $\tau_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1 & \text{if } \tau_{2n} \leq t < \tau_{2n+1} \\ \mu_2 & \text{if } \tau_{2n+1} \leq t < \tau_{2n+2} \end{cases}$$



$\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.2$,
$\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$.

- Coûts de transaction
  - g_{01} coût d'achat
  - g_{10} coût de vente

Stratégies admissibles

Contrôle : $\pi_t \in \{0, 1\}$ proportion de la richesse investie dans l'actif risqué

$$\mathcal{F}_t^S = \sigma(S_u, u \leq t)$$

π_t doit être $\mathcal{F}_t^S$-adapté

Problème

$$\mathcal{F}_t^S \neq \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u, u \leq t)$$

$\Longrightarrow$ Reformuler le problème de contrôle

Nouvelle formulation

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$
\begin{aligned}
\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} &= \Big(\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1-F_t)) + (1-\pi_t)r\Big)dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t \\
&\quad - g_{01}\delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10}\delta(\Delta\pi_t = -1)
\end{aligned}
$$

$$
dF_t = \Big(-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1-F_t)\Big)dt + \frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}F_t(1-F_t)d\bar{B}_t,
$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0,1[$

Nouvelle formulation

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)
Dynamique :

$$\begin{aligned}\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} &= \Big(\pi_t\big(\mu_1 F_t + \mu_2(1-F_t)\big) + (1-\pi_t)r\Big)dt + \pi_t\sigma d\bar{B}_t \\ &\quad - g_{01}\delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10}\delta(\Delta\pi_t = -1)\end{aligned}$$

$$dF_t = \Big(-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1-F_t)\Big)dt + \frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}F_t(1-F_t)d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale
Utilité : $U(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0,1[$

Nouvelle formulation

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)
Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t-}^\pi} = \Big(\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r\Big)dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t$$
$$- g_{01}\delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10}\delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = \Big(-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)\Big)dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t)d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale
Utilité : $U(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0, 1[$

Plan

Définition

Si $\pi_{t-} = 0$

$$J^0(t,x,f,\pi) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi) \mid W_{t-}^\pi = x, F_t = f]$$

Si $\pi_{t-} = 1$

$$J^1(t,x,f,\pi) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi) \mid W_{t-}^\pi = x, F_t = f]$$

Fonction valeur

$$V^0(t,x,f) = \sup_\pi J^0(t,x,f,\pi)$$
$$V^1(t,x,f) = \sup_\pi J^1(t,x,f,\pi)$$

Régularité

Comparaison

$$\begin{aligned} V^0(t,x,f) &\geq V^1(t,(1-g_{01})x,f) \\ V^1(t,x,f) &\geq V^0(t,(1-g_{10})x,f) \end{aligned}$$

Continuité

Pour tous $i \in \{0;1\}$
$0 \leq t, \hat{t} \leq T$
$x, \hat{x} > 0$
$0 \leq f, \hat{f} \leq 1$:

$$\begin{aligned} &\left|V^i(\hat{t},\hat{x},\hat{f}) - V^i(t,x,f)\right| \\ &\quad \leq \quad C(1+x^{\alpha-1}+\hat{x}^{\alpha-1})\big(|\hat{x}-x| + x(|\hat{f}-f| + |\hat{t}-t|^{1/2})\big) \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et x, f, i :

$$V^i(s,x,f) = \sup_\pi \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

$$\begin{cases} \min\Big\{-\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \mathcal{L}^0\varphi^0;\ \varphi^0(t,x,f) - \varphi^1(t,x(1-g_{01}),f)\Big\} = 0 \\ \min\Big\{-\frac{\partial \varphi^1}{\partial t} - \mathcal{L}^1\varphi^1;\ \varphi^1(t,x,f) - \varphi^0(t,x(1-g_{10}),f)\Big\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0\varphi(t,x,f) &= xr\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x,f) + \big(-\lambda_1 f + \lambda_2(1-f)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial f}(t,x,f) + \\ &\quad \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}\Big)^2 f^2(1-f)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial f^2}(t,x,f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1\varphi(t,x,f) &= x(\mu_1 f + \mu_2(1-f))\frac{\partial\varphi}{\partial x}(t,x,f) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(t,x,f) \\ &\quad + \big(-\lambda_1 f + \lambda_2(1-f)\big)\frac{\partial\varphi}{\partial f}(t,x,f) + x(\mu_1-\mu_2)f(1-f)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial f}(t,x,f) \\ &\quad + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mu_1-\mu_2}{\sigma}\Big)^2 f^2(1-f)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial f^2}(t,x,f) \end{aligned}$$

Caractérisation de la fonction valeur

$\mathcal{V}_\alpha$: ensemble des φ continues sur $[0;T]\times[0;+\infty[\times[0;1]$ telles que $\varphi(t,0,f)=0$ et

$$\sup_{[0;T]\times]0;+\infty[^2\times[0;1]^2} \frac{|\varphi(t,x,f)-\varphi(t,\hat{x},\hat{f})|}{(1+x^{\alpha-1}+\hat{x}^{\alpha-1})(|x-\hat{x}|+x|f-\hat{f}|)} < \infty.$$

Théorème

(V^0,V^1) est l'unique solution de viscosité de HJB sur $\mathcal{V}_\alpha\times\mathcal{V}_\alpha$ vérifiant

$$V^0(T,x,f)=V^1(T,x,f)=U(x)=x^\alpha$$

Discrétisation

Dépendance en x :

$$V^i(t,x,f) = \sup_\pi \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] \; = \; x^\alpha V^i(t,1,f)$$

Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T,f) = \hat{V}^1(T,f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer $\overline{V^0}(t,\cdot)$ et $\overline{V^1}(t,\cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t+dt,\cdot)$ et $\hat{V}^1(t+dt,\cdot)$
- Comparaison
  - si $\overline{V^0}(t,f) \geq (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$, prendre $\hat{V}^0(t,f) = \overline{V^0}(t,f)$ sinon $\hat{V}^0(t,f) = (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$
  - si $\overline{V^1}(t,f) \geq (1-g_{10})^\alpha \overline{V^0}(t,f)$, prendre $\hat{V}^1(t,f) = \overline{V^1}(t,f)$ sinon $\hat{V}^1(t,f) = (1-g_{10})^\alpha \overline{V^0}(t,f)$

Discrétisation

Dépendance en x :

$$V^i(t,x,f) = \sup_\pi \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] \;=\; x^\alpha V^i(t,1,f)$$

Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T,f) = \hat{V}^1(T,f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer $\overline{V^0}(t,\cdot)$ et $\overline{V^1}(t,\cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t+dt,\cdot)$ et $\hat{V}^1(t+dt,\cdot)$
- Comparaison
  - si $\overline{V^0}(t,f) \geq (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$, prendre $\hat{V}^0(t,f) = \overline{V^0}(t,f)$ sinon $\hat{V}^0(t,f) = (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$
  - si $\overline{V^1}(t,f) \geq (1-g_{10})^\alpha \overline{V^0}(t,f)$, prendre $\hat{V}^1(t,f) = \overline{V^1}(t,f)$ sinon $\hat{V}^1(t,f) = (1-g_{10})^\alpha \overline{V^0}(t,f)$

Discrétisation

Dépendance en x :

$$V^i(t,x,f) = \sup_\pi \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] \; = \; x^\alpha V^i(t,1,f)$$

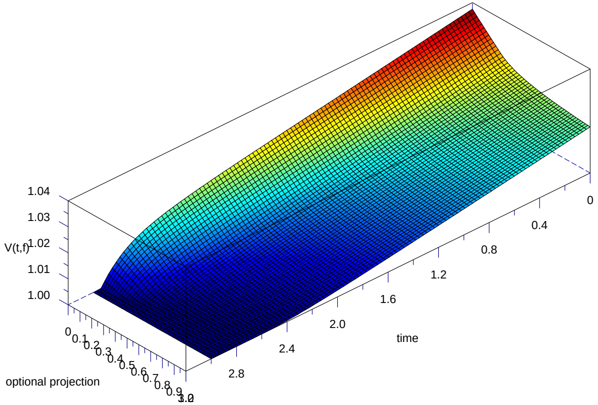
Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T,f) = \hat{V}^1(T,f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer $\overline{V^0}(t,\cdot)$ et $\overline{V^1}(t,\cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t+dt,\cdot)$ et $\hat{V}^1(t+dt,\cdot)$
- Comparaison
  - si $\overline{V^0}(t,f) \geq (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$, prendre $\hat{V}^0(t,f) = \overline{V^0}(t,f)$ sinon $\hat{V}^0(t,f) = (1-g_{01})^\alpha \overline{V^1}(t,f)$
  - si $\overline{V^1}(t,f) \geq (1-g_{10})^\alpha \overline{V^0}(t,f)$, prendre $\hat{V}^1(t,f) = \overline{V^1}(t,f)$ sinon $\hat{V}^1(t,f) = (1-g_{10})^\alpha \overline{V^0}(t,f)$

Fonction valeur V^0

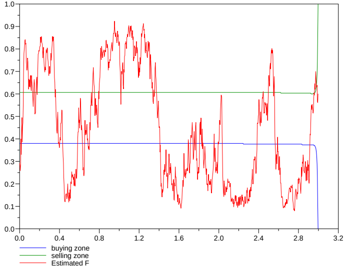
Tracé

Paramètres : $T = 3$, $\mu_2 = -\mu_1 = 0.2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\sigma = 0.15$, $g_{01} = g_{10} = 0.01$



Stratégie efficace

- Calculer $\hat{V}^0$, $\hat{V}^1$
- Estimer $\hat{F}_t$
- Comparer $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$ et $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$:
  - achat si $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{01})^{\alpha} \hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$
  - vente si $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{10})^{\alpha} \hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$



$\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$

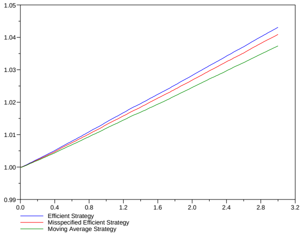
Comparaison stratégie efficace/ fonction valeur

- Calcul de la fonction valeur :
  - pas de discrétisation en temps 10^{-6}
  - pas de discrétisation en espace 10^{-3}
- 10^5 simulations de Monte Carlo de la stratégie efficace

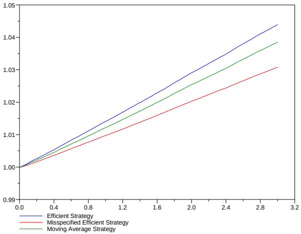
F_0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\hat{V}^0$	1.061	1.057	1.053	1.049	1.045	1.043
Stratégie	1.061	1.056	1.052	1.049	1.045	1.043

F_0	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$\hat{V}^0$	1.041	1.039	1.038	1.037	1.036
Stratégie	1.040	1.039	1.038	1.037	1.036

Comparaison stratégie mal calibrée / Moyenne mobile



Paramètres mal calibrés :
$\mu_1 = -1.8$, $\mu_2 = 1.8$, $\sigma = 0.15$,
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$



Paramètres mal calibrés :
$\mu_1 = -1.8$, $\mu_2 = 1.8$, $\sigma = 0.25$,
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 4$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2$, $\mu_2 = 0.2$, $\sigma = 0.15$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2$, $T = 3$, $\delta = 0.8$
100000 simulations Monte Carlo