Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Sur l'équation vectorielle stochastique $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ à coefficients iid

Benoîte de Saporta

Université Montesquieu Bordeaux IV – GRAPE et MAB

Yves Guivarc'h (Université de Rennes 1)
Emile Le Page (Université de Bretagne Sud)

Groupe de Tavail Probabilités
Cergy-Pontoise, 19 octobre 2006

Plan

1. Introduction
2. Travaux antérieurs
   - Résultat de Goldie en dimension 1
   - Résultat de Kesten pour les matrices positives
   - Résultat de Le Page pour les matrices récurrentes
3. La condition i-p
   - Définition
   - L'ensemble limite
4. Nouveau résultat
   - Eléments de preuve
   - Exemples en dimension 2

Plan

Introduction

Travaux antérieurs
- Dimension 1
- Matrices positives
- Matrices récurrentes

Condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

1. Introduction
2. Travaux antérieurs
   - Résultat de Goldie en dimension 1
   - Résultat de Kesten pour les matrices positives
   - Résultat de Le Page pour les matrices récurrentes
3. La condition i-p
   - Définition
   - L'ensemble limite
4. Nouveau résultat
   - Eléments de preuve
   - Exemples en dimension 2

Introduction

Travaux antérieurs
- Dimension 1
- Matrices positives
- Matrices récurrentes

Condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n \quad n \in \mathbb{N}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d$$

(A_n, B_n) va iid sur $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$
$d \geq 1$

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches aléatoires en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), ARMA, GARCH...

Solution Stationnaire

Brandt 1986, Bougerol et Picard 1992

Si

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|A_1 \cdots A_n\| < 0$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|B_0\| < \infty,$$

unique solution stationnaire de même loi que

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} A_1 \cdots A_{n-1} B_n$$

Moments de la loi stationnaire

- $0 < s \leq 1$

$$\mathbb{E}\|R\|^s \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}\|A_1 \cdots A_{n-1}\|^s \mathbb{E}\|B_n\|^s$$

- $s \geq 1$

$$(\mathbb{E}\|R\|^s)^{1/s} \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_{n-1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|B_n\|^s)^{1/s}$$

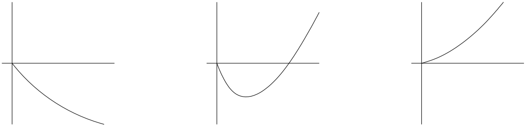
- Si B_0 a des moments à tout ordre, R a un moment d'ordre s si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n} < 1$$

Queue de la loi stationnaire

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$$

Fonction log-convexe de s :



Théorème

- $\mathbb{E}\|R^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

Introduction

Travaux antérieurs

Dimension 1

Matrices positives

Matrices récurrentes

Condition i-p

Définition

L'ensemble limite

Nouveau résultat

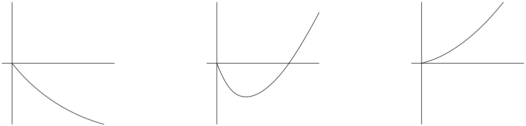
Eléments de preuve

Exemples en dimension 2

Queue de la loi stationnaire

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$$

Fonction log-convexe de s :



Théorème

- $\mathbb{E}\|R^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Plan

1. Introduction
2. Travaux antérieurs
   - Résultat de Goldie en dimension 1
   - Résultat de Kesten pour les matrices positives
   - Résultat de Le Page pour les matrices récurrentes
3. La condition i-p
   - Définition
   - L'ensemble limite
4. Nouveau résultat
   - Eléments de preuve
   - Exemples en dimension 2

Hypothèses en dimension 1

- (a_n, b_n) iid
- $\exists\ \kappa > 0$ vérifiant

$$\mathbb{E}|a_0|^\kappa = 1, \quad \mathbb{E}\left[|a_0|^\kappa \log^+|a_0|\right] < \infty, \quad \mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty,$$

- Stationnarité : $\mathbb{E}\log|a_1| < 0$
- loi conditionnelle de $\log|a_0|$ sachant $(a_0 \neq 0)$ non-arithmétique

Introduction
Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes
Condition i-p
Définition
L'ensemble limite
Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Goldie, 1991

- Si $a_0 \geq 0$,

$$t^\kappa \mathbb{P}(R_1 > t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} C_+, \quad t^\kappa \mathbb{P}(R_1 < -t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} C_-,$$

  $C_+ \geq 0$ et $C_- \geq 0$ constantes.

- Si $\mathbb{P}(a_0 < 0) > 0$, mêmes limites les limites avec $C_+ = C_- \geq 0$.

- Dans les deux cas, $C_+ + C_- > 0$ ssi $\mathbb{P}(b_0 = (1 - a_0)x) < 1$.

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Soit $g : x \longmapsto a_0 x + b_0$, et $b(g) = b_0$.

Le Page

$C_+ = 0$ ssi il existe une translation $\tau : x \longmapsto x + z$ t.q.

$$\mathbb{P}(b(\tau^{-1} g \tau) \geq 0) = \mathbb{P}(b_0 + (a_0 - 1)z \geq 0) = 0.$$

$C_- = 0$ ssi il existe une translation $\tau : x \longmapsto x + z$ t.q.

$$\mathbb{P}(b(\tau^{-1} g \tau) \leq 0) = \mathbb{P}(b_0 + (a_0 - 1)z \leq 0) = 0.$$

Introduction
Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes
Condition i-p
Définition
L'ensemble limite
Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

- μ loi de A_1
- S_μ support de μ

- $\mathbb{R}^d$ vecteurs ligne de dimension d
- $\mathbb{S}^{d-1}$ vecteurs ligne de norme 1
- $\mathbb{S}_+$ vecteurs ligne de norme 1 à coordonnées positives
- $\mathbb{P}^{d-1}$ espace projectif

- Action de $Gl(d, \mathbb{R})$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$

$$x \cdot a = \frac{xa}{\|xa\|}$$

Hypothèses de Kesten

Introduction

Travaux antérieurs

Dimension 1

Matrices positives

Matrices récurrentes

Condition i-p

Définition

L'ensemble limite

Nouveau résultat

Eléments de preuve

Exemples en dimension 2

- Condition d'existence de la loi stationnaire
- $\mathbb{P}(A_0 \geqslant 0) = 1$, $\quad \mathbb{P}(A_0$ a une ligne de $0) = 0$
- le sous-groupe engendré par $\{\log \rho(a) \mid a \in \Gamma_\mu,\ a \gg 0\}$ est dense dans $\mathbb{R}$
- Condition d'intégrabilité :
  il existe $\sigma > 0$ tel que
  $\mathbb{E}\left[\min_{1 \leq i \leq d} \left\{ \sum_{j=1}^{d} A_0(i,j) \right\}\right]^\sigma \geq d^{\sigma/2}$ et
  $\mathbb{E}[\|A_0\|^\sigma \log^+ \|A_0\|] < \infty$

Résultats de Kesten

Théorème 1

$\exists \kappa$ dans $]0, \ \sigma]$ tel que pour tout x dans $\mathbb{S}_+$

$$\lim_{t \to +\infty} t^\kappa \mathbb{P}(\max_n \|xA_1 \cdots A_n\| > t) > 0$$

Théorème 2

- Si $\mathbb{P}(B_0 = 0) < 1, \quad \mathbb{P}(B_0 \geqslant 0) = 1, \quad \mathbb{E}\|B_0\|^\kappa < \infty$

alors pour tout x dans $\mathbb{S}_+$

$$\lim_{t \to +\infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) > 0$$

15/39

Benoîte de Saporta

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Opérateurs sur les fonctions continues sur $\mathbb{S}_+$

$$\mathcal{P}^s f(x) = \mathbb{E}[\|xA_1\|^s f(x \cdot A_1)] = \int \|xa\|^s f(x \cdot a)\mu(da)$$

Propriétés

Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$

- il existe ν^s proba sur $\mathbb{S}_+$ et $k(s)$ réel

$$\nu^s \mathcal{P}^s = k(s)\nu^s$$

- il existe e_s continue, strictement positive sur $\mathbb{S}_+$

$$\mathcal{P}^s e_s = k(s)e_s$$

- il existe $\kappa > 0$ tel que $k(\kappa) = 1$

Preuve

Deuxième étape

Opérateur Markovien $\mathcal{Q}$ sur $\mathbb{S}_+$

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}f(x) &= \frac{1}{e_\kappa}\mathcal{P}^\kappa(e_\kappa f)(x)\\ &= \frac{1}{e_\kappa(x_n)}\int \|xa\|^\kappa e_\kappa(x\cdot a)f(x\cdot a)\mu(da)\end{aligned}$$

Chaîne de Markov (X_n, U_n) sur $\mathbb{S}_+$

$$X_n = X_0\cdot A_1\cdots A_n \qquad U_n = \log\frac{\|X_0A_1\cdots A_{n+1}\|}{\|X_0A_1\cdots A_n\|}$$

avec X_n de transition $\mathcal{Q}$

Introduction
Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes
Condition i-p
Définition
L'ensemble limite
Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Preuve

Troisième étape

- Théorème 1
  théorème de renouvellement de Kesten pour (X_n, U_n)
  $$\lim_{t \to +\infty} t^{\kappa} \mathbb{P}(\max_n \|xA_1 \cdots A_n\| > t) = Ke_{\kappa}(x).$$

- Théorème 2
  Positivité
  comparaison entre $\mathbb{P}(\max_n \|xA_1 \cdots A_n\| > t)$ et $\mathbb{P}(xR > t)$

Hypothèses de Le Page

- condition d'existence de la loi stationnaire
- pour tout ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{S}^{d-1}$ et tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int \mathbb{1}_{\mathcal{U}}(x \cdot a)\mu^n(da) > 0$$

- le sous-groupe engendré par l'ensemble des $\log|\rho(a)|$ tels que $a \in \Gamma_\mu$ et a a une valeur propre simple réelle dominante est dense dans $\mathbb{R}$
- pour tout x $\mathbb{P}(A_1 x + B_1 = x) < 1$
- $\exists \sigma > 0$ tel que $\mathbb{E}[p(A_1)^\sigma] \geq 1$, où $p(A_1)$ est la plus petite valeur propre de $(A_1 {}^t\!A_1)^{1/2}$
- $\exists \delta > 0$ tel que $\mathbb{E}[\sup\{\|A_1\|, \|B_1\|\}]^{\sigma+\delta} < +\infty$, et $\mathbb{E}(\|A_1\|^{-\delta}) < +\infty$

Résultats de Le Page

Théorème

Il existe $\kappa \in]0, \sigma]$ tel que $\lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^\kappa)^{1/n} = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$

$$\lim_{t\to\infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) = H_\kappa(\bar{x}),$$

où H_κ fonction continue sur $\mathbb{P}^{d-1}$, strictement positive et vérifiant pour tout v dans $\mathbb{P}^{d-1}$,

$$H_\kappa(v) = \int \|\tilde{v}A\|^\kappa H_\kappa(vA)\mu(dA).$$

Preuve

- Etape 1 : étude des opérateurs P^s sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$P^s f(v) = \mathbb{E}[\|\tilde{v}A_1\|^s f(vA_1)] = \int \|\tilde{v}a\|^s f(va)\mu(da)$$

- Etape 2 : définition d'un opérateur Markovien Q sur $\mathbb{P}^{d-1}$ puis sur $\mathbb{S}^{d-1}$
- Etape 3 : théorème de renouvellement de Kesten
- Etape supplémentaire : la limite trouvée est non nulle

Plan

1 Introduction

2 Travaux antérieurs
- Résultat de Goldie en dimension 1
- Résultat de Kesten pour les matrices positives
- Résultat de Le Page pour les matrices récurrentes

3 La condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

4 Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

Introduction

Travaux antérieurs
- Dimension 1
- Matrices positives
- Matrices récurrentes

Condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

Irréductibilité et Proximalité

Γ_μ semi-groupe engendré par le support S_μ de la loi μ de A_1

Irréductibilité

- Γ_μ irréductible : pas de sous-espace invariant non trivial
- Γ_μ fortement irréductible : pas de réunion finie de sous-espace invariants

proximalité

- Γ_μ proximal sur l'espace projectif $\mathbb{P}^{d-1}$:

$$\forall v, v' \in \mathbb{P}^{d-1}, \quad \exists (a_n) \in \Gamma_\mu \text{ t.q. } d(va_n, v'a_n) \to 0$$

- $a \in \Gamma_\mu$ est proximale si a a une unique valeur propre dominante.
  $v^a \in \mathbb{P}^{d-1}$ direction propre associée

La Condition i-p

Définition

Γ_μ vérifie la condition i-p s'il est

- irréductible
- proximal

Définition équivalente

Γ_μ vérifie la condition i-p si

- fortement irréductible
- contient un élément proximal

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Exemples en dimension 2

Semi-goupes engendrés par deux matrices

a, a' matrices de $Gl(2,\mathbb{R})$ telles que

- a et a' ont chacune deux valeurs propres réelles de modules distincts,
- les quatre espaces propres correspondants sont deux à deux distincts.

Alors le semi-groupe Γ engendré par a et a' vérifie la condition i-p

Exemple vérifiant i-p :

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Action de Γ_μ sur l'espace projectif

Ensemble limite

$$L(\Gamma_\mu) = \overline{\{v^a,\ a \in \Gamma_\mu,\ a \text{ proximale}\}} \subset \mathbb{P}^{d-1}$$

Proposition

Sous la condition i-p

- $L(\Gamma_\mu)$ est non vide
- Unique fermé Γ_μ-invariant minimal sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$L(\Gamma_\mu) = \bigcap_{v \in \mathbb{P}^{d-1}} \overline{v\Gamma_\mu}$$

Action de Γ_μ sur la sphère

Deux cas possibles

1. unique ensemble fermé Γ_μ-invariant minimal, symétrique, d'image projective $L(\Gamma_\mu)$
2. deux ensembles fermés Γ_μ-invariants minimaux disjoints, symétriques l'un de l'autre, d'image projective $L(\Gamma_\mu)$

Caractérisation des deux cas

Cas 2 ssi
Γ_μ préserve un cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide

Exemples en dimension 2

Deux ensembles limite

Exemple 1

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Γ engendré par a et a' vérifie la condition i-p
- Cône convexe invariant : vecteurs positifs

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Exemple 2

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Γ engendré par a et a' vérifie la condition i-p
- a' envoie les vecteurs positifs sur les négatifs, donc un seul ensemble limite symétrique
- a et a' préservent l'ensemble des vecteurs positifs ou négatifs :
  l'ensemble limite n'est pas égal à toute la sphère

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Plan

1 Introduction

2 Travaux antérieurs
- Résultat de Goldie en dimension 1
- Résultat de Kesten pour les matrices positives
- Résultat de Le Page pour les matrices récurrentes

3 La condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

4 Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

Introduction

Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes

Condition i-p
Définition
L'ensemble limite

Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Hypothèses

- Condition d'existence de la loi stationnaire
- Γ_μ vérifie la condition i-p
- pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant
- pour tout x $\mathbb{P}(A_1 x + B_1 = x) < 1$
- Conditions d'intégrabilité :

$$k(s) = \lim_n \left(\int \|a\|^s \mu^n(da) \right)^{1/n}$$

  - $\sigma = \sup\{s \geq 0 \mid k(s) < +\infty\} > 0$
  - $\lim_{s \to \sigma} k(s) > 1$
  - pour κ tel que $k(\kappa) = 1$

$$\mathbb{E}[\|A_1\|^\kappa \log^+ \|A_1\| + \|B_1\|^\kappa] < +\infty$$

Introduction

Travaux antérieurs
- Dimension 1
- Matrices positives
- Matrices récurrentes

Condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

Nouveau résultat

CRAS 2004

Pour tout x dans $\mathbb{S}^{d-1}$

$$\lim_{t\to\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(xR > t) = \ell e_{\kappa}(\bar{x})$$

avec $\ell > 0$

Les opérateurs P^s

Pour $0 \leq s \leq \sigma$, opérateurs P^s sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$P^s f(v) = \mathbb{E}[\|\tilde{v}A_1\|^s f(vA_1)] = \int \|\tilde{v}a\|^s f(va)\mu(da)$$

Guivarc'h et Le Page 2004

Pour tout $0 \leq s \leq \sigma$

- il existe une unique proba ν^s sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$\nu^s P^s = k(s)\nu^s$$

- il existe une unique e_s continue, strictement positive sur $\mathbb{P}^{d-1}$

$$P^s e_s = k(s)e_s \qquad \nu^s(e_s) = 1$$

Preuve

- définition d'un opérateur Markovien Q sur $\mathbb{P}^{d-1}$ à partir de P^κ et e_κ
- extension de Q et de ses bonnes propriétés à $\mathbb{S}^{d-1}$
- théorème de renouvellement de Kesten
- la limite trouvée est non nulle

Conditions d'existence de κ

Si $\sigma = \sup\{s \geq 0 \mid k(s) < +\infty\} = +\infty$

Proposition

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{\log k(s)}{s} = \limsup_n \frac{1}{n} \sup\{\log \rho(a) \mid a \in S_\mu^n\}$$

Dans ce cas κ existe si et seulement si Γ_μ est dilatant i.e. contient une matrice de rayon spectral > 1

Introduction

Travaux antérieurs

- Dimension 1
- Matrices positives
- Matrices récurrentes

Condition i-p

- Définition
- L'ensemble limite

Nouveau résultat

- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\surd$ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- $\surd$ conditions d'intégrabilité
- $\surd$ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- $\surd$ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- $\surd$ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- √ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- √ conditions d'intégrabilité
- √ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- √ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- √ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- √ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- √ conditions d'intégrabilité
- √ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- √ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- √ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\surd$ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- $\surd$ conditions d'intégrabilité
- $\surd$ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- $\surd$ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- $\surd$ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Introduction

Travaux antérieurs
- Dimension 1
- Matrices positives
- Matrices récurrentes

Condition i-p
- Définition
- L'ensemble limite

Nouveau résultat
- Eléments de preuve
- Exemples en dimension 2

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\surd$ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- $\surd$ conditions d'intégrabilité
- $\surd$ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- $\surd$ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- $\surd$ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Exemple I

Un exemple qui ne vérifie pas les hypothèses de Le Page

$B_n \sim \mathcal{N}(0,1)$, $A_n \sim \mu$ avec $\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_{a'})$

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$$

- $\surd$ $\mathbb{E} \log \|A_1\| < 0$ donc existence d'une loi stationnaire
- $\surd$ conditions d'intégrabilité
- $\surd$ condition i-p par étude des valeurs propres et espaces propres, et dilatant
- $\surd$ un seul ensemble limite différent de $\mathbb{S}^{d-1}$
- $\surd$ loi de A_n discrète, loi de B_n continue, donc pas de point fixe

Benoîte de Saporta

Introduction
Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes
Condition i-p
Définition
L'ensemble limite
Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

$$X_n = a_{1,n}X_{n-1} + a_{2,n}X_{n-2} + b_n \iff Y_n = A_n Y_{n-1} + B_n$$

avec

$$\begin{aligned} Y_n &= {}^t(X_n, X_{n-1}) \\ B_n &= {}^t(b_n, 0) \end{aligned} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex : $\mu = \frac{1}{4}\delta_a + \frac{3}{4}\delta_{a'}$ avec

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad a' = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$b_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ ou discrète prenant des valeurs autres que 2 et $9/8$

Introduction
Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes
Condition i-p
Définition
L'ensemble limite
Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

Problème posé dans KESTEN 1973

- dimension $d = 2$
- m_1 et m_2 matrices à coefficients strictement positifs telles que $\log \rho(m_1)$ et $\log \rho(m_2)$ engendrent un sous-goupe dense dans $\mathbb{R}$
- $m_3 = r_\theta$ une rotation d'angle θ
- $\mu = p_1\delta_{m_1} + p_2\delta_{m_2} + p_3\delta_{m_3}$ avec $p_i > 0$ et $p_1 + p_2 + p_3 = 1$

Est-ce-que cette μ peut donner une loi invariante à queue polynômiale ?

Introduction
Travaux antérieurs
Dimension 1
Matrices positives
Matrices récurrentes
Condition i-p
Définition
L'ensemble limite
Nouveau résultat
Eléments de preuve
Exemples en dimension 2

- Irréductibilité dès que $\theta \neq 0[\pi]$
- Proximalité dès que $\theta \neq 0[\frac{\pi}{2}]$
- Unique fermé invariant minimal dès que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ ou $\frac{\theta}{\pi} = \frac{2k+1}{n}$

Si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$m_1 = \begin{pmatrix} \frac{e^1+1}{2} & \frac{e^1-1}{2} \\ \frac{e^1-1}{2} & \frac{e^1+1}{2} \end{pmatrix} \qquad m_2 = \begin{pmatrix} \frac{e^\pi+1}{2} & \frac{e^\pi-1}{2} \\ \frac{e^\pi-1}{2} & \frac{e^\pi+1}{2} \end{pmatrix}$$

Γ_μ ne vérifie pas la condition i-p

Et s'il existe un cône invariant ?

- 2 fermés Γ-invariants minimaux symétriques L_+ et L_-
- 2 proba invariantes symétriques pour Q, ν_+ et ν_-

Γ_η semi-groupe du groupe affine engendré par le support de la loi η de (A_n, B_n)

$$L_\eta = \overline{\{\text{point fixe attractif de } h \ ; \ \rho(h) < 1, h \in \Gamma_\eta\}}$$

Loi de la solution stationnaire

- Si $L_+ \cup L_- \subset L_\eta \cap \mathbb{S}_\infty^{d-1}$, alors
  loi de $R = C_+\nu_+ + C_-\nu_-$, $C_+ > 0$, $C_- > 0$.
- Si $L_- \cap L_\eta \cap \mathbb{S}_\infty^{d-1} = \emptyset$, alors
  loi de $R = C_+\nu_+$, $C_- > 0$.