

Un problème d'allocation optimale de portefeuille avec coûts de transaction

Benoîte de Saporta

INRIA Sophia Antipolis
Projet OMEGA

CHRISTOPHETTE BLANCHET (Université de Nice)
RAJNA GIBSON (Université de Zurich)
ETIENNE TANRÉ et DENIS TALAY (INRIA Sophia Antipolis)

Groupe de Travail Mathématiques Financières
Evry – 30 mars 2006

Allocation
optimale de
portefeuille
2/41

Benoîte de
Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction
Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique

Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats
numériques

Fonction Valeur

Une stratégie
efficace

Comparaison des
stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Principe de la Programmation Dynamique
 - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 5 Résultats numériques
 - Fonction Valeur
 - Une stratégie efficace
 - Comparaison des stratégies

Allocation
optimale de
portefeuille
3/41

Benoîte de
Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction
Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique

Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats
numériques

Fonction Valeur

Une stratégie
efficace

Comparaison des
stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Principe de la Programmation Dynamique
 - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 5 Résultats numériques
 - Fonction Valeur
 - Une stratégie efficace
 - Comparaison des stratégies

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : **adapté**
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : **adapté**
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

- Variable d'état du système W_t évoluant suivant une dynamique probabiliste
- Processus de contrôle π_t
 - valeur choisie à tout instant en fonction de l'information disponible : adapté
 - influence la dynamique de W_t
- Critère de performance $J(W, \pi)$ à maximiser

Fonction Valeur

$$V = \sup_{\pi} J(W, \pi)$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Exemple : le problème de Merton

Formulation I

Allocation optimale de portefeuille
5/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

Marché : Actif sans risque $dS_t^0 = S_t^0 r dt$
Actif risqué $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$

- **Etat** : richesse $W_t = N_t S_t + N_t^0 dS_t^0$
- **Contrôle** : proportion de la richesse investie dans l'actif risqué $\pi_t = \frac{N_t S_t}{W_t} \in [0; 1]$

Dynamique auto-financée : $dW_t^\pi = N_t dS_t + N_t^0 dS_t^0$

$$\begin{aligned} \frac{dW_t^\pi}{W_t^\pi} &= \frac{N_t S_t}{W_t^\pi} \frac{dS_t}{S_t} + \frac{N_t^0 S_t^0}{W_t^\pi} \frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= \pi_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - \pi_t) \frac{dS_t^0}{S_t^0} \\ &= (\pi_t \mu + (1 - \pi_t) r) dt + \pi_t \sigma dB_t \end{aligned}$$

- **Critère** : espérance de l'utilité de la richesse terminale

$$U(x) = x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1$$

Fonction valeur

$$V(t, x) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

Objectif

- Déterminer la fonction valeur
- Trouver un contrôle optimal (s'il en existe)

Equation d'Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x) + \sup_{p \in [0;1]} \mathcal{L}^p \Phi(t, x) = 0$$

$$\Phi(T, x) = U(x) = x^\alpha$$

$$\mathcal{L}^p \Phi(t, x) = x(p\mu + (1-p)r) \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 p^2 x^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}(t, x)$$

Comme $U(W_T^{t,x,\pi}) = U(x W_T^{t,1,\pi}) = x^\alpha U(W_T^{t,1,\pi})$, on cherche une solution de la forme $\Phi(t, x) = x^\alpha \varphi(t)$

$$0 = \varphi'(t) + \varphi(t) \sup_{p \in [0;1]} \left\{ \alpha(p\mu + (1-p)r) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p^2 \sigma^2 \right\}$$

$$1 = \varphi(T)$$

Solution

$$\Phi(t, x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$$

avec

$$\begin{aligned} \beta &= \sup_{p \in [0;1]} \left\{ \alpha(p\mu + (1-p)r) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} p^2 \sigma^2 \right\} \\ &= \alpha r + \frac{\alpha(\mu-r)^2}{2(1-\alpha)\sigma^2} \end{aligned}$$

atteint en $p^* = \frac{\mu-r}{(1-\alpha)\sigma^2}$

Formule d'Itô pour Φ entre t et T :

$$\Phi(T, W_T^{t,x,\pi}) = \Phi(t, x) + \int_t^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \mathcal{L}^{\pi_u} \Phi \right) (u, W_u^{t,x,\pi}) du$$

+ martingale

$$U(W_T^{t,x,\pi}) \leq \Phi(t, x) + \int_t^T \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} + \sup_{p \in [0;1]} \mathcal{L}^p \Phi \right) (u, W_u^{t,x,\pi}) du$$

+ martingale

$$\leq \Phi(t, x) + \text{martingale}$$

Donc

$$\Phi(t, x) \geq \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,\pi})]$$

avec **égalité** lorsque $\pi_t = p^*$

Conclusion

- $V(t, x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant $\pi_t = \frac{\mu-r}{(1-\alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

Conclusion

- $V(t, x) = x^\alpha e^{\beta(T-t)}$
- Contrôle optimal constant $\pi_t = \frac{\mu - r}{(1 - \alpha)\sigma^2}$
- V est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi Bellman

Marché : Actif sans risque
Actif risqué

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt$$

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

- la dérive prend alternativement deux valeurs

$$\mu_1 < r < \mu_2$$

- coûts de transaction

Allocation optimale de portefeuille
12/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation**
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Principe de la Programmation Dynamique
 - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 5 Résultats numériques
 - Fonction Valeur
 - Une stratégie efficace
 - Comparaison des stratégies

Allocation optimale de portefeuille
13/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

Investissement

- Approche fondamentale
 - principes économiques
- Analyse technique
 - comportement passé des prix
- Approche mathématique
 - modèles mathématiques

Objectif

Comparer les performances de l'analyse technique et de l'approche mathématique

Marché : Actif sans risque
Actif risqué

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt$$

$$dS_t = \mu(t) S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

- B mouvement Brownien standard,
- $\mu(t) \in \{\mu_1, \mu_2\}$ indépendant de B ,
- **contrôle** $\pi_t \in \{0, 1\}$ proportion de la richesse investie dans l'actif risqué
- **état** W_t^π richesse correspondant à la stratégie π
- **critère** espérance de l'utilité de la richesse finale

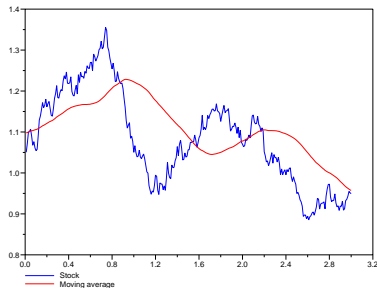
Objectif

Maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse finale

Moyenne mobile

$$M_t^\delta = \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^t S_u du$$

- Si $S_t > M_t^\delta$ achat
- Si $S_t < M_t^\delta$ vente



$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \delta = 0.8.$$

Optimiser

- la taille de la fenêtre δ
- les instants de décision

Allocation optimale de portefeuille
15/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

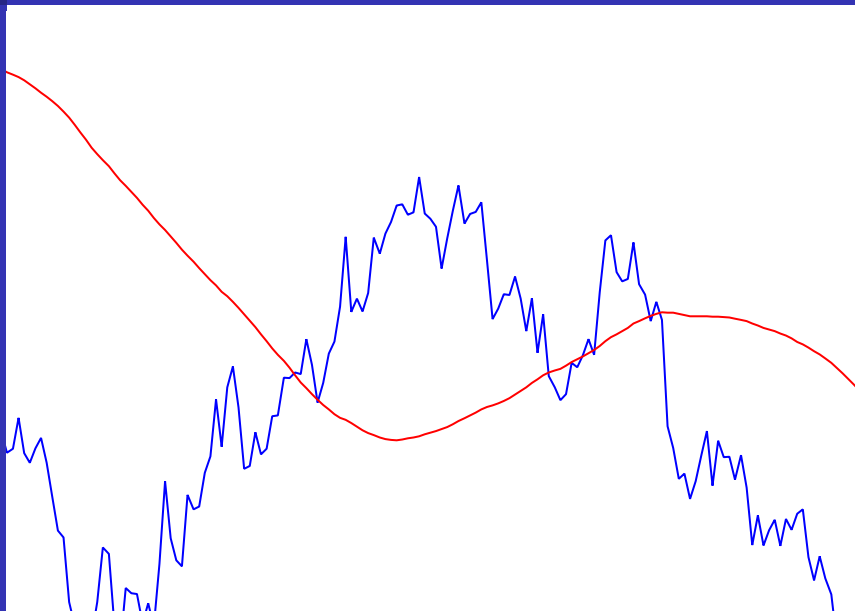
Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies



BLANCHET, DIOP, GIBSON, KAMINSKI, TALAY, TANRÉ (2005)

Un seul changement de dérive

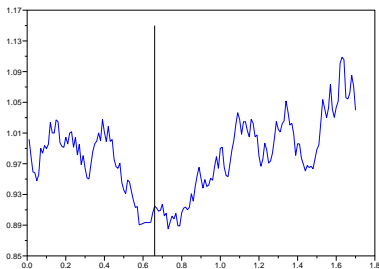
- $\mu(t) = \mu_1$ si $t < \tau$

- $\mu(t) = \mu_2$ si $t \geq \tau$

avec $\mathbb{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$

Stratégie

détecter τ



$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \lambda = 2.$$

Allocation optimale de portefeuille
17/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

- Etude théorique de la fonction valeur
- Etude théorique de la détection de rupture
- Comparaisons numériques des stratégies
 - détection bien calibrée
 - détection mal calibrée
 - moyenne mobile

Conclusion

- Moyenne mobile meilleure si paramètres mal calibrés
- Taux d'erreur à partir duquel c'est vrai

Allocation
optimale de
portefeuille
18/41

Benoîte de
Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction
Valeur

Principe de la
Programmation
Dynamique

Equations d'Hamilton
Jacobi Bellman

Résultats
numériques

Fonction Valeur

Une stratégie
efficace

Comparaison des
stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- 3 Cadre de travail**
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Principe de la Programmation Dynamique
 - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 5 Résultats numériques
 - Fonction Valeur
 - Une stratégie efficace
 - Comparaison des stratégies

- Plusieurs changements de dérive

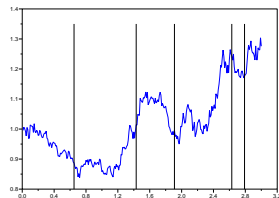
(ξ_{2n+1}) iid $\text{Exp}(\lambda_1)$

(ξ_{2n}) iid $\text{Exp}(\lambda_2)$

$\tau_0 = 0, \tau_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$

$$\mu(t) = \begin{cases} \mu_1 & \text{if } \tau_{2n} \leq t < \tau_{2n+1} \\ \mu_2 & \text{if } \tau_{2n+1} \leq t < \tau_{2n+2} \end{cases}$$

- Coûts de transaction
 - g_{01} coût d'achat
 - g_{10} coût de vente



$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \\ \sigma = 0.15, \lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

Contrôle : $\pi_t \in \{0, 1\}$ proportion de la richesse investie dans l'actif risqué

$$\mathcal{F}_t^S = \sigma(S_u, u \leq t)$$

π_t doit être \mathcal{F}_t^S -adapté

Problème

$$\mathcal{F}_t^S \neq \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_u, u \leq t)$$

\implies Reformuler le problème de contrôle

Projection optionnelle : $F_t = \mathbb{P}(\mu(t) = \mu_1 \mid \mathcal{F}_t^S)$

$$\bar{B}_t = \frac{1}{\sigma} \left(\log \frac{S_t}{S_0} - \int_0^t (\mu_1 F_s + \mu_2(1 - F_s) - \frac{\sigma^2}{2}) ds \right)$$

Proposition

- \bar{B} est un (\mathcal{F}^S) -mouvement Brownien
- $\mathcal{F}^S = \mathcal{F}^{\bar{B}}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) dt + \sigma d\bar{B}_t$$

KURTZ, OCONE 1988

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t$$

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t - g_{01} \delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10} \delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha, \alpha \in]0, 1[$

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t - g_{01} \delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10} \delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha, \alpha \in]0, 1[$

Contrôle : π_t

Etat : couple (W_t, F_t)

Dynamique :

$$\frac{dW_t^\pi}{W_{t^-}^\pi} = (\pi_t(\mu_1 F_t + \mu_2(1 - F_t)) + (1 - \pi_t)r) dt + \pi_t \sigma d\bar{B}_t - g_{01} \delta(\Delta\pi_t = 1) - g_{10} \delta(\Delta\pi_t = -1)$$

$$dF_t = (-\lambda_1 F_t + \lambda_2(1 - F_t)) dt + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} F_t(1 - F_t) d\bar{B}_t,$$

Critère : espérance de l'utilité de la richesse finale

Utilité : $U(x) = x^\alpha$, $\alpha \in]0, 1[$

Allocation optimale de portefeuille
23/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur**
 - Principe de la Programmation Dynamique
 - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 5 Résultats numériques
 - Fonction Valeur
 - Une stratégie efficace
 - Comparaison des stratégies

Si $\pi_{t-} = 0$

$$J^0(t, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi) \mid W_{t-}^\pi = x, F_t = f]$$

Si $\pi_{t-} = 1$

$$J^1(t, x, f, \pi) = \mathbb{E}[U(W_T^\pi) \mid W_{t-}^\pi = x, F_t = f]$$

Fonction valeur

$$V^0(t, x, f) = \sup_{\pi} J^0(t, x, f, \pi)$$

$$V^1(t, x, f) = \sup_{\pi} J^1(t, x, f, \pi)$$

π contrôle quelconque tel que $\pi_{t-} = \pi_t = 1$
 $\hat{\pi}$ tel que

- $\hat{\pi}_{t-} = 0$
- $\hat{\pi}_u = \pi_u$ pour tout $u > t$

Alors

$$W_T^{t,x,f,\hat{\pi}} = W_T^{t,(1-g_{01})x,f,\pi}$$

Donc

$$V^0(t, x, f) \geq J^0(t, x, f, \hat{\pi}) = J^1(t, (1 - g_{01})x, f, \pi)$$

Proposition

$$V^0(t, x, f) \geq V^1(t, (1 - g_{01})x, f)$$

$$V^1(t, x, f) \geq V^0(t, (1 - g_{10})x, f)$$

Proposition

Pour tous $i \in \{0; 1\}$

$$0 \leq t, \hat{t} \leq T$$

$$x, \hat{x} > 0$$

$$0 \leq f, \hat{f} \leq 1 :$$

$$\begin{aligned} & |V^i(\hat{t}, \hat{x}, \hat{f}) - V^i(t, x, f)| \\ & \leq C(1 + x^{\alpha-1} + \hat{x}^{\alpha-1})(|\hat{x} - x| + x(|\hat{f} - f| + |\hat{t} - t|^{1/2})) \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et x, f, i :

$$V^i(s, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

Preuve :

$$\begin{aligned} J^i(s, x, f, \pi) &= \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi)] \\ &\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et x, f, i :

$$V^i(s, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

Preuve :

$$\begin{aligned} J^i(s, x, f, \pi) &= \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi)] \\ &\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et x, f, i :

$$V^i(s, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

Preuve :

$$\begin{aligned} J^i(s, x, f, \pi) &= \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi)] \\ &\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et x, f, i :

$$V^i(s, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

Preuve :

$$\begin{aligned} J^i(s, x, f, \pi) &= \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= \mathbb{E}[J^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi)] \\ &\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \end{aligned}$$

Principe de la Programmation Dynamique

Pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$ et x, f, i :

$$V^i(s, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

Preuve :

$$\begin{aligned} J^i(s, x, f, \pi) &= \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\pi}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi)] \\ &\leq \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \end{aligned}$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi}_{t-}(t, W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi}_{t-}(t, W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times [0; 1]$ telle que

pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi}_{t-}(t, W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi}_{t-}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times]0; 1]$ telle que

pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times]0; 1]$ telle que pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times [0; 1]$ telle que

pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{S,X,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_t^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_t^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ **partition** de $]0; +\infty[\times [0; 1]$ telle que

pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_t^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \mathbf{1}_{(W_t^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_t^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times [0; 1]$ telle que pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times [0; 1]$ telle que

pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times]0; 1]$ telle que pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

π fixé tel que

$$\mathcal{V} = \sup_{\pi} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})] \leq \varepsilon + \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f})]$$

$(\mathcal{B}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ partition de $]0; +\infty[\times [0; 1]$ telle que pour tout i , pour tous (x, f) et (\hat{x}, \hat{f}) dans \mathcal{B}_p et pour tout π :

$$|V^i(t, x, f) - V^i(t, \hat{x}, \hat{f})| \leq \varepsilon, \quad |J^i(t, x, f, \pi) - J^i(t, \hat{x}, \hat{f}, \pi)| \leq \varepsilon$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

(x_p, f_p) fixé dans \mathcal{B}_p

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

Pour p, i fixés, $\pi^{p,i}$ contrôle sur $[t, T]$ tel que

$$V^i(t, x_p, f_p) \leq \varepsilon + J^i(t, x_p, f_p, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

Pour p, i fixés, $\pi^{p,i}$ contrôle sur $[t, T]$ tel que

$$V^i(t, x_p, f_p) \leq \varepsilon + J^i(t, x_p, f_p, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

Pour p, i fixés, $\pi^{p,i}$ contrôle sur $[t, T]$ tel que

$$V^i(t, x_p, f_p) \leq \varepsilon + J^i(t, x_p, f_p, \pi^{p,i})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}] \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}] \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

Pour p, i fixés, $\pi^{p,i}$ contrôle sur $[t, T]$ tel que

$$V^i(t, x_p, f_p) \leq \varepsilon + J^i(t, x_p, f_p, \pi^{p,i})$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon$$

$$+ \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{S,x,f,\pi}, F_t^{S,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

$$\mathcal{V} \leq \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[V^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

Pour p, i fixés, $\pi^{p,i}$ contrôle sur $[t, T]$ tel que

$$V^i(t, x_p, f_p) \leq \varepsilon + J^i(t, x_p, f_p, \pi^{p,i})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, x_p, f_p, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}] \\ &\leq \varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon \\ &\quad + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi^{p,\pi_{t^-}}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}] \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} \leq 4\epsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi^p, \pi_{t^-}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

On recolle

$$\hat{\pi}_u = \begin{cases} \pi_u & \text{si } s \leq u < t \\ \pi_u^p, \hat{\pi}_{t^-} & \text{si } u \geq t, \text{ et } (W_{t^-}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\leq 4\epsilon + \mathbb{E}[J^{\hat{\pi}_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_t^{s,f}, \hat{\pi})] \\ &= 4\epsilon + \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\hat{\pi}}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= 4\epsilon + \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\hat{\pi}})] \\ &\leq 4\epsilon + \mathbb{E}[V^i(s, x, f)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} \leq 4\epsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi^p, \pi_{t^-}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

On recolle

$$\hat{\pi}_u = \begin{cases} \pi_u & \text{si } s \leq u < t \\ \pi_u^p, \hat{\pi}_{t^-} & \text{si } u \geq t, \text{ et } (W_{t^-}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\leq 4\epsilon + \mathbb{E}[J^{\hat{\pi}_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_t^{s,f}, \hat{\pi})] \\ &= 4\epsilon + \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\hat{\pi}}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= 4\epsilon + \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\hat{\pi}})] \\ &\leq 4\epsilon + \mathbb{E}[V^i(s, x, f)] \end{aligned}$$

$$\mathcal{V} \leq 4\epsilon + \sum_{p=0}^{\infty} \mathbb{E}[J^{\pi_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}, \pi^p, \pi_{t^-}) \mathbf{1}_{(W_{t^-}^{s,x,f,\pi}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p}]$$

On recolle

$$\hat{\pi}_u = \begin{cases} \pi_u & \text{si } s \leq u < t \\ \pi_u^p, \hat{\pi}_{t^-} & \text{si } u \geq t, \text{ et } (W_{t^-}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_t^{s,f}) \in \mathcal{B}_p \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &\leq 4\epsilon + \mathbb{E}[J^{\hat{\pi}_{t^-}}(t, W_{t^-}^{s,x,f,\hat{\pi}}, F_t^{s,f}, \hat{\pi})] \\ &= 4\epsilon + \mathbb{E}[\mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\hat{\pi}}) \mid \mathcal{F}_{s,t}]] \\ &= 4\epsilon + \mathbb{E}[U(W_T^{s,x,f,\hat{\pi}})] \\ &\leq 4\epsilon + \mathbb{E}[V^i(s, x, f)] \end{aligned}$$

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

$$\begin{cases} \min \left\{ -\frac{\partial \varphi^0}{\partial t} - \mathcal{L}^0 \varphi^0; \varphi^0(t, \mathbf{x}, f) - \varphi^1(t, \mathbf{x}(1 - g_{01}), f) \right\} = 0 \\ \min \left\{ -\frac{\partial \varphi^1}{\partial t} - \mathcal{L}^1 \varphi^1; \varphi^1(t, \mathbf{x}, f) - \varphi^0(t, \mathbf{x}(1 - g_{10}), f) \right\} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^0 \varphi(t, \mathbf{x}, f) &= x r \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, \mathbf{x}, f) + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, \mathbf{x}, f) + \\ &\quad \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2 (1 - f)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, \mathbf{x}, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1 \varphi(t, \mathbf{x}, f) &= x(\mu_1 f + \mu_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(t, \mathbf{x}, f) + \frac{1}{2} x^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(t, \mathbf{x}, f) \\ &\quad + (-\lambda_1 f + \lambda_2(1 - f)) \frac{\partial \varphi}{\partial f}(t, \mathbf{x}, f) + x(\mu_1 - \mu_2) f(1 - f) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial f}(t, \mathbf{x}, f) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sigma} \right)^2 f^2 (1 - f)^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial f^2}(t, \mathbf{x}, f) \end{aligned}$$

$$(P) \quad F(t, x, v(t, x), D_t v(t, x), Dv(t, x), D^2 v(t, x)) = 0$$

Définition

- v est **sous-solution de viscosité** de (P) si

$$F(\bar{t}, \bar{x}, v(\bar{t}, \bar{x}), D_t \varphi(\bar{t}, \bar{x}), D\varphi(\bar{t}, \bar{x}), D^2 \varphi(\bar{t}, \bar{x})) \leq 0$$

pour tous \bar{t}, \bar{x} et toute fonction $\varphi \in C^{1,2}$ tels que \bar{t}, \bar{x} est un maximum local de $v - \varphi$

- v est **sur-solution de viscosité** de (P) si

$$F(\bar{t}, \bar{x}, v(\bar{t}, \bar{x}), D_t \varphi(\bar{t}, \bar{x}), D\varphi(\bar{t}, \bar{x}), D^2 \varphi(\bar{t}, \bar{x})) \geq 0$$

pour tous \bar{t}, \bar{x} et toute fonction $\varphi \in C^{1,2}$ tels que \bar{t}, \bar{x} est un minimum local de $v - \varphi$

\mathcal{V}_α : ensemble des φ continues sur $[0; T] \times [0; +\infty[\times [0; 1]$ telles que $\varphi(t, 0, f) = 0$ et

$$\sup_{[0; T] \times [0; +\infty[\times [0; 1]^2} \frac{|\varphi(t, x, f) - \varphi(t, \hat{x}, \hat{f})|}{(1 + x^{\alpha-1} + \hat{x}^{\alpha-1})(|x - \hat{x}| + x|f - \hat{f}|)} < \infty.$$

Théorème

(V^0, V^1) est l'unique solution de viscosité de HJB sur $\mathcal{V}_\alpha \times \mathcal{V}_\alpha$ vérifiant

$$V^0(T, x, f) = V^1(T, x, f) = U(x) = x^\alpha$$

Allocation optimale de portefeuille
34/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies

- 1 Introduction au contrôle stochastique
- 2 Motivation
- 3 Cadre de travail
- 4 Etude de la fonction Valeur
 - Principe de la Programmation Dynamique
 - Equations d'Hamilton Jacobi Bellman
- 5 Résultats numériques**
 - Fonction Valeur**
 - Une stratégie efficace**
 - Comparaison des stratégies**

Dépendance en x :

$$V^i(t, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] = x^\alpha V^i(t, 1, f)$$

Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer $\overline{V}^0(t, \cdot)$ et $\overline{V}^1(t, \cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t + dt, \cdot)$ et $\hat{V}^1(t + dt, \cdot)$
- Comparaison
 - si $\overline{V}^0(t, f) \geq (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$, prendre $\hat{V}^0(t, f) = \overline{V}^0(t, f)$ sinon $\hat{V}^0(t, f) = (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$
 - si $\overline{V}^1(t, f) \geq (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$, prendre $\hat{V}^1(t, f) = \overline{V}^1(t, f)$ sinon $\hat{V}^1(t, f) = (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$

Dépendance en x :

$$V^i(t, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] = x^\alpha V^i(t, 1, f)$$

Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer $\overline{V}^0(t, \cdot)$ et $\overline{V}^1(t, \cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t + dt, \cdot)$ et $\hat{V}^1(t + dt, \cdot)$
- Comparaison
 - si $\overline{V}^0(t, f) \geq (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$, prendre $\hat{V}^0(t, f) = \overline{V}^0(t, f)$ sinon $\hat{V}^0(t, f) = (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$
 - si $\overline{V}^1(t, f) \geq (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$, prendre $\hat{V}^1(t, f) = \overline{V}^1(t, f)$ sinon $\hat{V}^1(t, f) = (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$

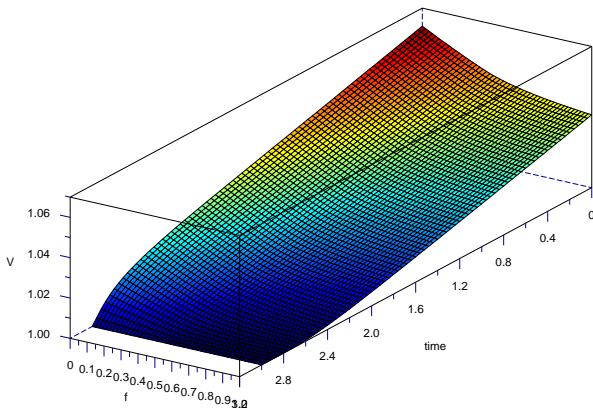
Dépendance en x :

$$V^i(t, x, f) = \sup_{\pi} \mathbb{E}[U(W_T^{t,x,f,\pi})] = x^\alpha V^i(t, 1, f)$$

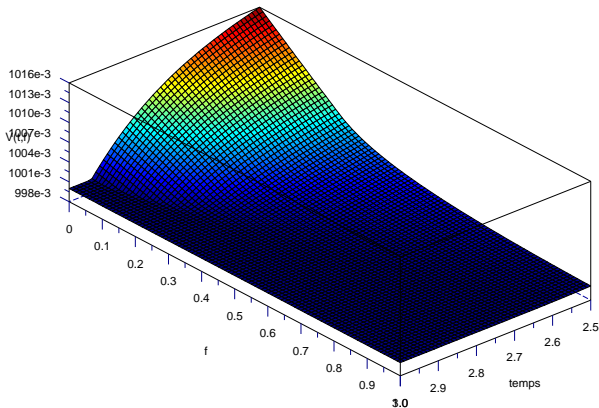
Schéma numérique

- $\hat{V}^0(T, f) = \hat{V}^1(T, f) = 1$
- Avec la partie EDP de HJB, calculer $\overline{V}^0(t, \cdot)$ et $\overline{V}^1(t, \cdot)$ à partir de $\hat{V}^0(t + dt, \cdot)$ et $\hat{V}^1(t + dt, \cdot)$
- Comparaison
 - si $\overline{V}^0(t, f) \geq (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$, prendre $\hat{V}^0(t, f) = \overline{V}^0(t, f)$ sinon $\hat{V}^0(t, f) = (1 - g_{01})^\alpha \overline{V}^1(t, f)$
 - si $\overline{V}^1(t, f) \geq (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$, prendre $\hat{V}^1(t, f) = \overline{V}^1(t, f)$ sinon $\hat{V}^1(t, f) = (1 - g_{10})^\alpha \overline{V}^0(t, f)$

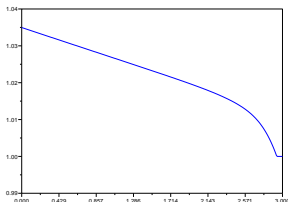
Paramètres : $T = 3$, $\mu_2 = -\mu_1 = 0.2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$,
 $\sigma = 0.15$, $g_{01} = g_{10} = 0.001$



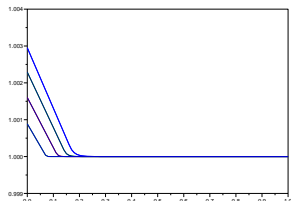
Coûts de transaction $g_{01} = g_{10} = 0.01$
Zoom entre $t = 2.5$ et $t = 3 = T$



Coupe en $f = 0.05$



Coupes en $t = 2.90, t = 2.91,$
 $t = 2.92, t = 2.93,$



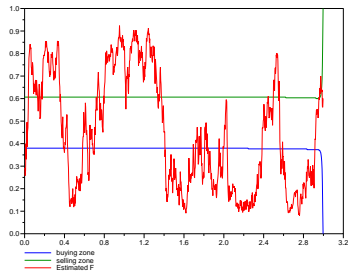
- Calculer \hat{V}^0, \hat{V}^1
- Estimer \hat{F}_t
- Comparer $\hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$ et $\hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$:

- achat si

$$\hat{V}^0(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{01})^\alpha \hat{V}^1(t, \hat{F}_t)$$

- vente si

$$\hat{V}^1(t, \hat{F}_t) = (1 - g_{10})^\alpha \hat{V}^0(t, \hat{F}_t)$$



$$\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \\ \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, T = 3$$

- Calcul de la fonction valeur :
 - pas de discrétisation en temps 10^{-6}
 - pas de discrétisation en espace 10^{-3}
- 10^5 simulations de Monte Carlo de la stratégie efficace

F_0	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
\hat{V}^0	1.061	1.057	1.053	1.049	1.045	1.043
Stratégie	1.061	1.056	1.052	1.049	1.045	1.043

F_0	0.6	0.7	0.8	0.9	1
\hat{V}^0	1.041	1.039	1.038	1.037	1.036
Stratégie	1.040	1.039	1.038	1.037	1.036

Comparaison stratégie mal calibrée / Moyenne mobile

Allocation optimale de portefeuille
41/41

Benoîte de Saporta

Introduction

Motivation

Cadre

Fonction Valeur

Principe de la Programmation Dynamique

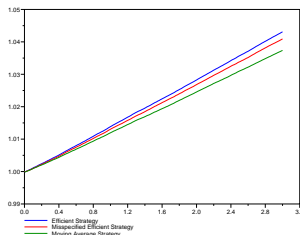
Equations d'Hamilton Jacobi Bellman

Résultats numériques

Fonction Valeur

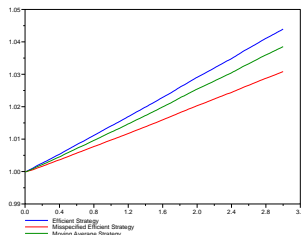
Une stratégie efficace

Comparaison des stratégies



Paramètres mal calibrés :

$$\mu_1 = -1.8, \mu_2 = 1.8, \sigma = 0.15, \\ \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4$$



Paramètres mal calibrés :

$$\mu_1 = -1.8, \mu_2 = 1.8, \sigma = 0.25, \\ \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4$$

Vrais paramètres : $\mu_1 = -0.2, \mu_2 = 0.2, \sigma = 0.15, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2, T = 3, \delta = 0.8$

100000 simulations Monte Carlo