

# Méthode numérique pour l'arrêt optimal des PDMP et optimisation de maintenance

Benoîte de Saporta

Journée de rentrée I3M

Montpellier, 23 octobre 2014

# Plan de l'exposé

## Introduction

Processus Markoviens déterministes par morceaux

## Arrêt optimal

Solution théorique

Discrétisation

Convergence

## Application à l'optimisation de maintenance

Exemple de Thales optronique

## Conclusion et perspectives

# Processus Markoviens déterministes par morceaux

## Davis (80's)

Classe générale de processus stochastiques

- ▶ **markoviens**
- ▶ **hybrides** : une composant discrète et une composante continue
- ▶ **non-diffusion** : mouvement **déterministe** entre des sauts aléatoires

## Applications

Gestion de stock, modèles d'atelier, files d'attente, assurance, biologie, **fiabilité dynamique**, . . .

# Dynamique

## Processus hybride $X_t = (m_t, y_t)$

- ▶ mode discret  $m_t \in \{1, 2, \dots, p\}$
- ▶ variables d'état euclidiennes  $y_t \in \mathbb{R}^n$

## Caractéristiques locales dans le mode $m$

- ▶  $E_m$  ouvert de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\partial E_m$  sa frontière,  $\bar{E}_m$  sa fermeture,  $E = \cup(\{m\} \times E_m)$  espace d'états
- ▶ Flot  $\phi_m: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  groupe d'homéomorphismes, mouvement déterministe
- ▶ Intensité  $\lambda_m: \bar{E}_m \rightarrow \mathbb{R}_+$  intensité des sauts
- ▶ Noyau markovien  $Q_m$  on  $(\bar{E}_m, \mathcal{B}(\bar{E}_m))$  sélectionne les nouvelles positions après saut

## Deux types de sauts

- ▶ temps d'atteinte de la frontière  $t^*(m, y)$  déterministe

$$t^*(m, y) = \inf\{t > 0 : \phi_m(y, t) \in \partial E_m\}$$

- ▶ loi du premier temps de saut  $T_1$

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds} & \text{si } t < t^*(m, y) \\ 0 & \text{si } t \geq t^*(m, y) \end{cases}$$

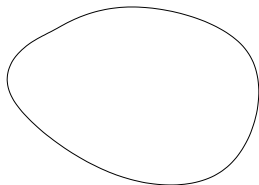
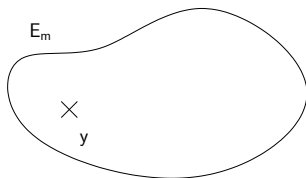
- ▶  $T_1$  a une densité sur  $[0, t^*(m, y)[$  et un **atome** en  $t^*(m, y)$ :

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 = t^*(m, y)) > 0$$

# Construction itérative

Point de départ

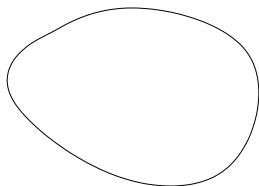
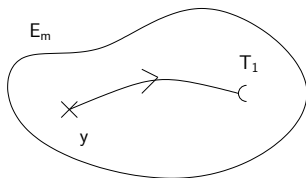
$$X_0 = Z_0 = (m, y)$$



## Construction itérative

$X_t$  suit le flot déterministe jusqu'au premier temps de saut  $T_1 = S_1$

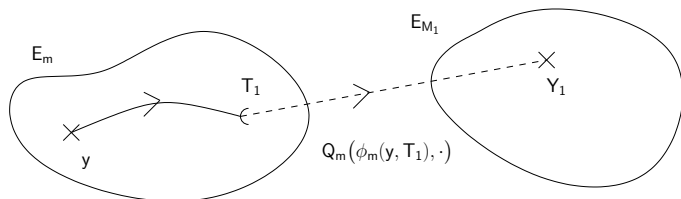
$$X_t = (m, \phi_m(y, t)), \quad t < T_1$$



## Construction itérative

Position et mode après-saut  $Z_1 = (M_1, Y_1)$  tirés suivant la loi

$$Q_m(\phi_m(y, T_1), \cdot)$$

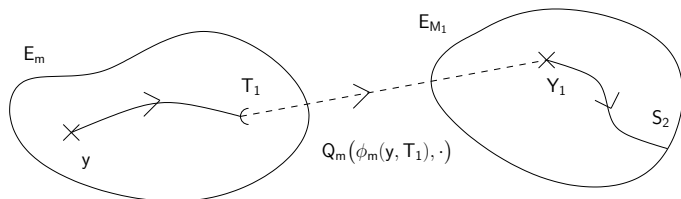




## Construction itérative

$X_t$  suit le flot déterministe jusqu'au prochain temps de saut  $T_2$

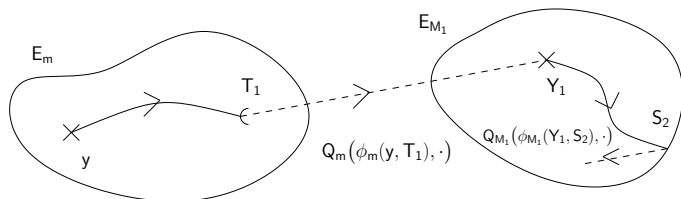
$$X_{T_1+t} = (M_1, \phi_{M_1}(Y_1, t)), \quad t < S_2 = T_2 - T_1$$



## Construction itérative

Position et mode après-saut  $Z_2 = (M_2, Y_2)$  tirés suivant la loi

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) \dots$$



# Chaîne induite

$\{X_t\}$  processus de Markov fort [Davis 93]

Chaîne de Markov en temps discret

- ▶  $Z_0$  point de départ,  $T_0 = 0$ ,  $S_0 = 0$
- ▶  $Z_n$  position et mode après le saut  $n$
- ▶  $T_n$  date du  $n$ -ème saut,  $S_n = T_n - T_{n-1}$

## Propriété fondamentale

$(Z_n, S_n)$  est une chaîne de Markov qui contient tout l'aléa du processus :

$X_t$  connu pour tout  $t \implies (Z_n, S_n)$  connus pour tout  $n$   
 $(Z_n, S_n)$  connus pour tout  $n \implies X_t$  connu pour tout  $t$

# Méthodes numériques pour les PDMP

## Constat

- ▶ fort potentiel d'applications
- ▶ nombreux résultats théoriques [Davis 93], [Jacobsen 06], [Costa Dufour 13]
- ▶ processus faciles à **simuler** si le flot est explicite
- ▶ très peu de méthodes numériques pour les PDMP dans la littérature [Costa Davis 88, 89]

# Objectif l'exposé

Proposer une **méthode numérique**

- ▶ adaptées aux **spécificités** des PDMP
- ▶ avec des **preuves** (et des vitesses) de convergence
- ▶ utilisables en **pratique**

Pour **résoudre** le problème d'arrêt optimal

# Problème d'arrêt optimal

- ▶ Fonction de performance  $g$
- ▶ Horizon aléatoire :  $N$ -ème temps de saut  $T_N$  du PDMP
- ▶  $\mathcal{M}_N$  ensemble des temps d'arrêt  $\tau \leq T_N$

## Problème d'arrêt optimal

- ▶ calculer la fonction valeur

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- ▶ trouver un temps d'arrêt  $\varepsilon$ -optimal  $\tau^*$  qui atteint  $V(x) - \varepsilon$

# Écriture récursive des fonctions

[Gugerli,1986]

## Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶  $v_N = g$
- ▶  $v_n = L(v_{n+1}, g)$  pour  $n \leq N - 1$

$$v_0(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V(x)$$

$$L(w, g)(x)$$

$$= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[ w(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n = x \right] \right\}$$

$$\vee \mathbb{E} [w(Z_{n+1}) \mid Z_n = x]$$

# Construction itérative de variables aléatoires

## Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶  $v_N(Z_N) = g(Z_N)$
- ▶  $v_n(Z_n) = L(v_{n+1}, g)(Z_n)$  pour  $n \leq N - 1$

$$v_0(Z_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

$$\begin{aligned} v_n(Z_n) &= L(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[ v_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n \right] \right\} \\ &\quad \vee \mathbb{E} [v_{n+1}(Z_{n+1}) \mid Z_n] \end{aligned}$$



# Stratégie d'approximation

- ▶ Discrétiser la chaîne  $(Z_n, S_n)$  par **quantification**
- ▶ Remplacer  $(Z_n, S_n)$  par son approximation  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)$  dans les opérateurs  
→ approximation calculable
- ▶ Etudier la **convergence**, obtenir une **borne de l'erreur**

# Quantification

[Pagès 98], [Pagès, Pham, Printems 04]...

## Quantification d'une variable aléatoire $X \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Approcher  $X$  par  $\hat{X}$  à support fini pour minimiser  $\|X - \hat{X}\|_p$

- ▶ grille finie pondérée  $\Gamma$  avec  $|\Gamma| = K$
- ▶  $\hat{X} = p_\Gamma(X)$  projection au plus proche voisin

## Propriétés asymptotiques

Si  $E[|X|^{p+\eta}] < +\infty$  alors

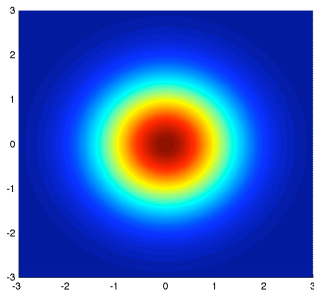
$$\min_{|\Gamma| \leq K} \|X - \hat{X}^\Gamma\|_p \simeq K^{-1/d}$$

# Algorithmes de quantification

Il existe des algorithmes donnant

- ▶ la grille  $\Gamma$
- ▶ la loi de  $\hat{X}$
- ▶ les probabilités de transition pour des chaînes de Markov

Exemple:  $\mathcal{N}(0, I_2)$

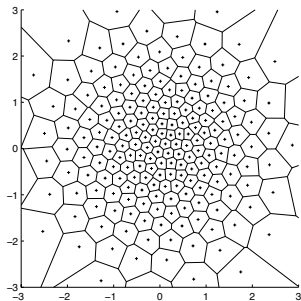


# Algorithmes de quantification

Il existe des algorithmes donnant

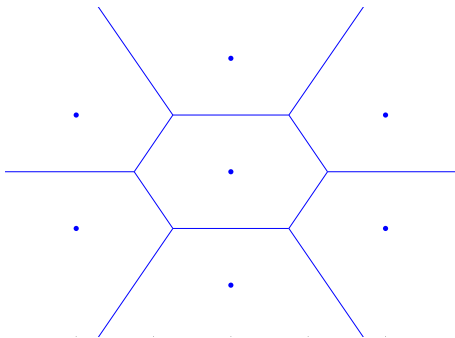
- ▶ la grille  $\Gamma$
- ▶ la loi de  $\hat{X}$
- ▶ les probabilités de transition pour des chaînes de Markov

Exemple:  $\mathcal{N}(0, I_2)$



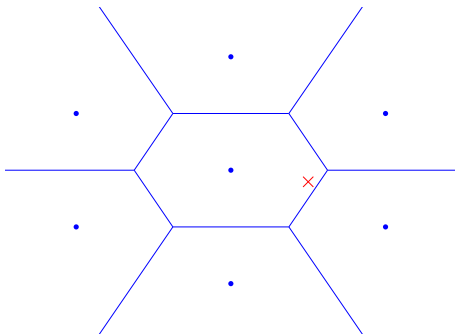
# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles



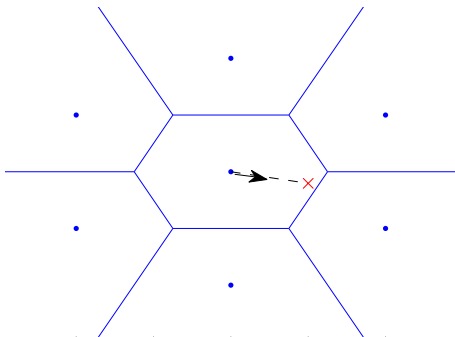
# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles



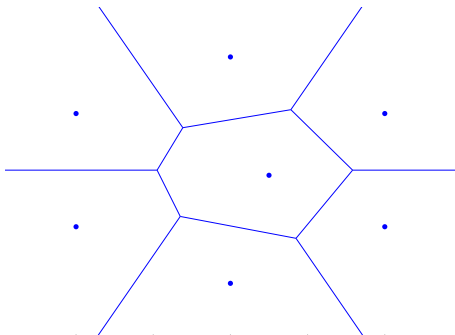
# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles



# Mise en oeuvre

Modèle  $\longrightarrow$  simulateur de trajectoires  $\longrightarrow$  grilles





# Avantages et inconvénients de la quantification

## Avantages

- ▶ un simulateur de la loi cible suffit
- ▶ construction automatique des grilles
- ▶ vitesse de convergence pour  $\mathbb{E}[|f(X) - f(\hat{X})|]$  si  $f$  lipschitz

## Inconvénients

- ▶ temps de calcul des grilles
- ▶ fléau de la dimension
- ▶ questions ouvertes sur la convergence des algorithmes

# Discrétisation

## Approximation de la fonction valeur

- ▶  $\hat{v}_N(\hat{Z}_N) = g(\hat{Z}_N)$
- ▶  $\hat{v}_n(\hat{Z}_n) = \hat{L}_d^n(\hat{v}_{n+1}, g)(\hat{Z}_n)$  pour  $n \leq N - 1$

$$\begin{aligned} & \hat{L}_d^n(v_{n+1}, g)(\hat{Z}_n) \\ &= \max_{u \in G(\hat{Z}_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[ v(\hat{Z}_{n+1}) \mathbb{1}_{\{\hat{S}_{n+1} < u\}} + g(\phi(\hat{Z}_n, u)) \mathbb{1}_{\{\hat{S}_{n+1} \geq u\}} \mid \hat{Z}_n \right] \right\} \\ & \quad \vee \mathbb{E} [v(\hat{Z}_{n+1}) \mid \hat{Z}_n] \end{aligned}$$

# Convergence

[Ann. Appl. Proba. 2010]

## Théorème

Hypothèses de régularité **Lipschitz** sur  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $Q$ ,  $t^*$  et  $g$

$$|v_0(x) - \widehat{v}_0(x)| \leq C\sqrt{EQ}$$

$C$  constante explicite,  
 $EQ$  erreur de quantification

$\sqrt{\cdot}$  due aux **indicatrices**

# Temps d'arrêt $\epsilon$ -optimal

## Règle d'arrêt calculable $\hat{\tau}$

- ▶ construction itérative **explicite**
- ▶ pas de calculs supplémentaires
- ▶ **vrai temps d'arrêt** pour la filtration du processus  $(X_t)$

## Théorème

Mêmes hypothèses

$$|v_0(x) - \mathbb{E}_x[g(X_{\hat{\tau}})]| \leq C_1 EV + C_2 \sqrt{EQ}$$

$C_1, C_2$  constantes explicites

$EV$  erreur de la fonction valeur

$EQ$  erreur de quantification

Autre approximation de la fonction valeur par **Monte Carlo**

# Optimisation de maintenance

- ▶  $X_t = (m_t, y_t)$  état d'un système au temps  $t$
- ▶  $T_n$  instants de panne de sous-composants

## Problème de maintenance

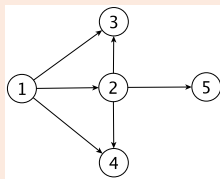
Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

# Problème industriel de Thales optronique

Calculer une **date de maintenance** pour un équipement soumis à différents types de **pannes**

## Groupe de climatisation

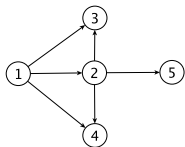


- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

# Modèle PDMP

## Taux de transition

- ▶ dégradation du roulement à bille et panne de l'électrovanne: loi de **Weibull**  $\Rightarrow$  intensité dépendant du temps
- ▶ pannes électronique et du roulement à bille: loi exponentielle

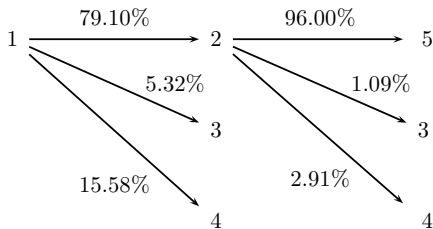


- ▶ Etat 1: état **stable**
- ▶ Etat 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ Etat 3: **panne** de l'électrovanne
- ▶ Etat 4: **panne** électronique
- ▶ Etat 5: **panne** du roulement à billes

## Modèle PDMP

- ▶ mode **discret**  $m_t \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ▶ variable **euclidienne**  $y_t = t$  temps de fonctionnement du groupe de climatisation

# Trajectoires sans maintenance



- ▶ 1: état **stable**
- ▶ 2: roulement à billes **degradé**
- ▶ 3: **panne** électrovanne
- ▶ 4: **panne** électronique
- ▶ 5: **panne** roulement à billes



## Fonction de performance

$$g(m, t) = \frac{t}{p(m)}$$

- ▶  $p(1) = 6$  coût de maintenance dans l'état stable
- ▶  $p(2) = 6$  coût de maintenance pour roulement à bille dégradé
- ▶  $p(3) = 5$  coût de réparation de l'électrovanne
- ▶  $p(4) = 3.5$  coût de réparation d'une panne électronique
- ▶  $p(5) = 12$  coût de réparation du roulement à billes

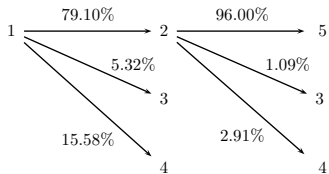
### Optimisation de maintenance

- ▶ Il vaut mieux déclencher une maintenance en mode dégradé 2 qu'attendre la panne totale 5
- ▶ Les coûts de réparation en mode 3 et 4 sont moins chers que le coût de maintenance

Performance moyenne sans maintenance : 342.72

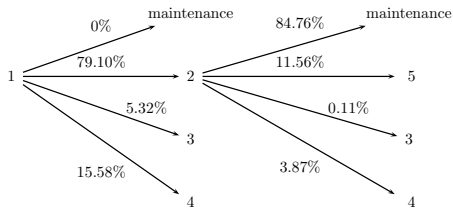
# Performance avec maintenance optimisée

## Sans maintenance



Performance moyenne 342.72

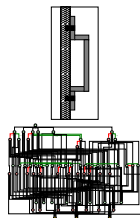
## Avec maintenance



Performance moyenne 592.47

## Autres résultats

- ▶ Optimisation de maintenance d'une structure métallique **Astrium** [J. Risk Reliability 2012]
- ▶ Optimisation de maintenance du réservoir chauffé [Rel. Eng. & Syst. Safety 2013]
- ▶ Approximation d'espérances [Com. Appl. Math. Comp. Sci. 2012]
- ▶ Approximation de lois de **temps de sortie** [Adv. Appl. Proba 2012]
- ▶ Arrêt optimal **partiellement observé** [Stoch. Proc. Appl. 2013]
- ▶ Contrôle **impulsionnel**
  - ▶ approximation de la fonction valeur [Automatica 2012]



# Conclusion et perspectives

## Avantages et inconvénients des méthodes numériques

- ▶ méthode utilisable en pratique
- ▶ temps de calcul on line/off line
- ▶ dimension

## Perspectives

- ▶ stratégie optimale pour le contrôle impulsif  
Thèse Alizée Geeraert 2014-2017
- ▶ méthodes numériques pour les MDP  
Thèse Christophe Nivot 2013-2016
- ▶ méthodes numériques pour les systèmes linéaires à sauts markoviens
- ▶ applications et nouvelles problématiques issues de la biologie

