Méthode numérique pour le filtrage des systèmes linéaires à sauts markoviens

Eduardo F. Costa   Benoîte de Saporta

Univ. São Paulo   Univ. Montpellier

Plan de l'exposé

Système linéaire à sauts markoviens

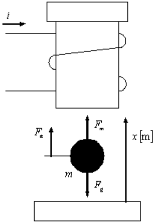
- Familles de matrices (A_i, C_i, D_i, E_i), $i \in \{1, \ldots, N\}$
- $\theta(t)$ chaîne de Markov à espace d'états fini $\{1, \ldots, N\}$ de matrice génératrice $\Lambda = (\lambda_{ij})$
- $v(t)$, $w(t)$ mouvements Browniens standards indépendants et indépendants de $\theta(t)$

$$
\begin{aligned}
dx(t) &= A_{\theta(t)}x(t)dt + E_{\theta(t)}dw(t) \\
dy(t) &= C_{\theta(t)}x(t)dt + D_{\theta(t)}dv(t)
\end{aligned}
$$

$\theta(t)$, $y(t)$ observés $\longrightarrow$ estimer la trajectoire $x(t)$ sur $[0, T]$

Filtrer le processus

Exemple : suspension magnétique



$N = 2$

- $\theta = 1$, fonctionnement normal avec stabilisation
- $\theta = 2$, panne de la stabilisation

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, x_3)$

- x_1 position de la bille
- x_2 vitesse de la bille
- x_3 la tension du courant électrique

Exemple : suspension magnétique

Approximation linéaire valable en temps court : horizon de calcul $T = 0.02$, pas de temps pour le calcul des trajectoires $\delta t = 10^{-4}$

$$\begin{aligned} dx(t) &= A_{\theta(t)}x(t)dt + E_{\theta(t)}dw(t) \\ dy(t) &= C_{\theta(t)}x(t)dt + D_{\theta(t)}dv(t) \end{aligned}$$

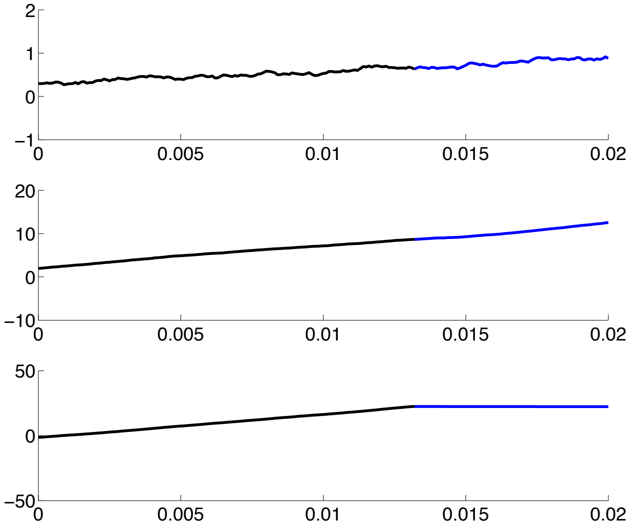
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1750 & 0 & -34.1 \\ 4360.2 & 104.2 & -84.3 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1750 & 0 & -34.1 \\ 0 & 0 & -0.0383 \end{pmatrix}$$

La vitesse n'est pas observée

$$C_1 = C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_1 = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0.2 & -1.9 \\ -0.1 & 1.4 & -0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple : suspension magnétique – trajectoire



Filtre de Kalman – Définition

Trajectoire estimée

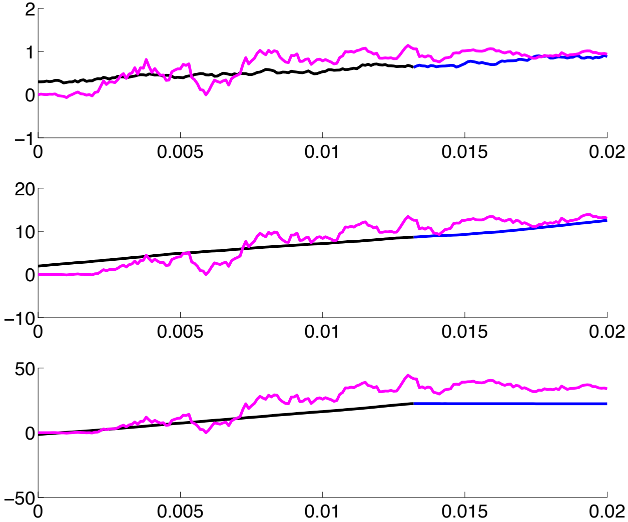
$$\begin{aligned} d\widehat{x}_K(t) &= A_{\theta(t)}\widehat{x}_K(t)dt + K(t)\big(dy(t) - C_{\theta(t)}\widehat{x}_K dt\big) \\ \widehat{x}_K(0) &= \mathbb{E}[x(0)] \end{aligned}$$

Avec $K(t) = P(t)C'_{\theta(t)}(D_{\theta(t)}D'_{\theta(t)})^{-1}$

Equation de Riccati

$$\begin{aligned} dP(t) &= A_{\theta(t)}P(t) + P(t)A'_{\theta(t)} + E_{\theta(t)}E'_{\theta(t)} \\ &\quad -P(t)C'_{\theta(t)}(D_{\theta(t)}D'_{\theta(t)})^{-1}C'_{\theta(t)}P(t) \\ P(0) &= Var[x(0)] \end{aligned}$$

Filtre de Kalman – Exemple de la suspension magnétique



Filtre de Kalman – Propriétés

Avantages

- équation linéaire
- estimateur sans biais
- minimise la variance de l'erreur : interprétation de $P(t)$

$$\mathbb{E}[\|x(t) - \widehat{x}_K(t)\|^2] = tr(\mathbb{E}[P(t)])$$

$$P(t) = \mathbb{E}[\big(x(t) - \widehat{x}_K(t)\big)\big(x(t) - \widehat{x}_K(t)\big)' \mid \theta(s),\ 0 \leq s \leq t]$$

Inconvénient majeur

- non calculable en temps réel pour l'échelle de temps de nombreuses applications
- dépend de toute la trajectoire $\theta(s),\ 0 \leq s \leq t \Longrightarrow$ pré-calculs impossibles

Filtre de Fragoso-Costa – Définition

Trajectoire estimée

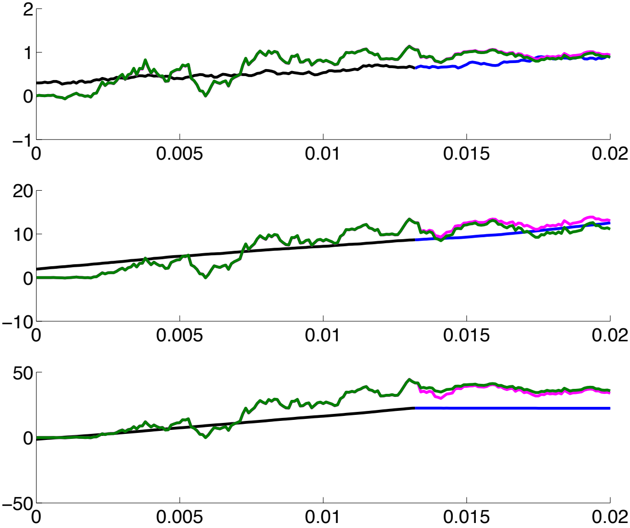
$$\begin{aligned} d\widehat{x}_F(t) &= A_{\theta(t)}\widehat{x}_F((t)dt + F_{\theta(t)}(t)\big(dy(t) - C_{\theta(t)}\widehat{x}_F dt\big) \\ \widehat{x}_F(0) &= \mathbb{E}[x(0)] \end{aligned}$$

Avec pour tout i $F_i(t) = M_i(t)C_i'(D_iD_i'\pi_i(t))^{-1}$

Système pré-calculable d'équations de Riccati couplées

$$\begin{aligned} dM_i(t) &= A_iM_i(t) + M_i(t)A_i' + \sum_{j=1}^{N} M_j(t)\lambda_{ji} + E_iE_i'\pi_i(t) \\ &\quad -M_i(t)C_i'(D_iD_i'\pi_i(t))^{-1}C_i'M_i(t) \\ M_i(0) &= Var[x(0)]\pi_i(0) \end{aligned}$$

Filtre de Fragoso et Costa – Suspension magnétique



Filtre de Fragoso et Costa – Propriétés

Avantages

- équation linéaire
- estimateur sans biais
- minimise la variance de l'erreur sur la sous-classe des filtres linéaires markoviens
- précalculable

Inconvénients

- contrainte forte $\pi_i(t) = \mathbb{P}(\theta(t) = i) > 0$ pour tous t et i
- utilise la loi de $\theta(t)$ plutôt que sa *valeur* : peut donner ponctuellement de mauvais résultats

Comparaison des filtres – Suspension magnétique

Performance (10^5 Monte Carlo)

Filtre de Kalman

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^{0.02} \|x(t) - \widehat{x}_K(t)\|^2\Big] = 3.9244$$

Filtre de Fragoso Costa

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^{0.02} \|x(t) - \widehat{x}_F(t)\|^2\Big] = 3.9850$$

Objectif

Proposer une nouvelle méthode d'estimation de la trajectoire $x(t)$

- basée sur une dicrétisation de la chaîne de Markov $\theta(t)$
- utilisable en temps réel en pré-calculant les solutions d'équations de Riccati
- avec une performance proche de celle du filtre de Kalman
- avec preuve de convergence vers l'estimateur de Kalman quand le nombre de points de discrétisation augmente

Plan de l'exposé

Stratégie

- discrétiser la chaîne de Markov $\theta(t)$ pour sélectionner une famille finie de morceaux de trajectoires typiques
- pré-calculer les solutions de l'équation de Riccati pour ces morceaux de trajectoires
- construire un sélecteur de trajectoires pré-calculées pour construire la solution approchée en temps réel en recollant des morceaux pré-calculés

Décomposition de la chaîne de Markov

- T_n temps de sauts de $\theta(t)$
- $S_n = T_n - T_{n-1}$ durées inter-saut
- $Z_n \in \{1, \dots, N\}$ position après les sauts

$$\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \mathbb{1}_{\{T_k \leq t < T_{k+1}\}} = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k \mathbb{1}_{\{0 \leq t - T_k < S_{k+1}\}}.$$

Décomposition de la solution de l'équation de Riccati

Reformulation

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(t - T_k)\mathbb{1}_{\{0 \leq t - T_k < S_{k+1}\}}$$

Opérateur de Riccati ne dépend pas du temps

$$R(M, i) = A_i M + M A_i' + E_i E_i' - M C_i' (D_i D_i')^{-1} C_i M$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} dP_0(t) & = & R(P_0(t), Z_0) \\ P_0(0) & = & Var[x(0)] \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{rcl} dP_k(t) & = & R(P_k(t), Z_k) \\ P_k(0) & = & P_{k-1}(S_k) \end{array} \right.$$

Construction de trajectoires typiques

Principe

Remplacer S_k par une approximation discrète dans les équations

$$\left\{\begin{array}{rcl} dP_0(t) & = & R(P_0(t), Z_0) \\ P_0(0) & = & Var[x(0)] \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} dP_k(t) & = & R(P_k(t), Z_k) \\ P_k(0) & = & P_{k-1}(S_k) \end{array}\right.$$

Nombre fini de trajectoires pré-calculables représentatives de toutes les trajectoires possibles

Choix de la méthode de discrétisation

[Pagès 98], [Bally, Pagès 03], ...

Quantification d'une variable aléatoire $X \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Approcher X par $\widehat{X}$ à support fini pour miniser $\|X - \widehat{X}\|_p$

- grille finie pondérée Γ avec $|\Gamma| = K$
- $\widehat{X} = p_\Gamma(X)$ projection au plus proche voisin

Propriétés asymptotiques

Si $E[|X|^{p+\eta}] < +\infty$ alors

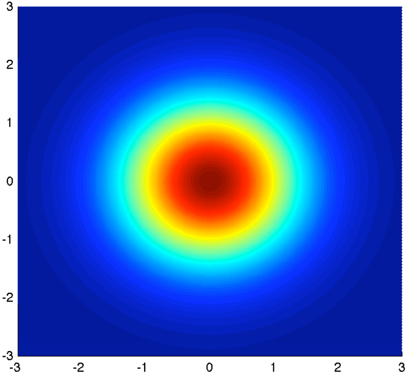
$$\min_{|\Gamma| \leq K} \|X - \widehat{X}^\Gamma\|_p \simeq K^{-1/d}$$

Algorithmes de quantification

Il existe des algorithmes donnant

- la grille Γ
- la loi de $\widehat{X}$

Exemple: $\mathcal{N}(0, I_2)$

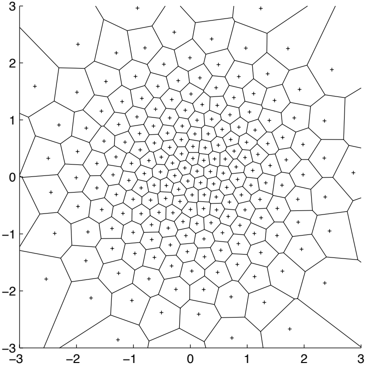


Algorithmes de quantification

Il existe des algorithmes donnant

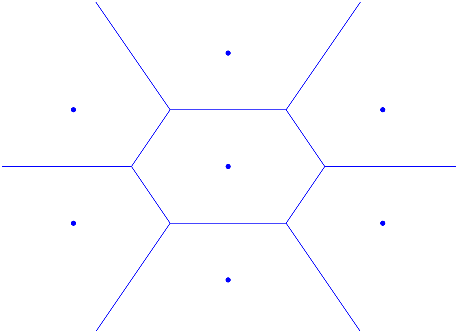
- la grille Γ
- la loi de $\widehat{X}$

Exemple: $\mathcal{N}(0, I_2)$



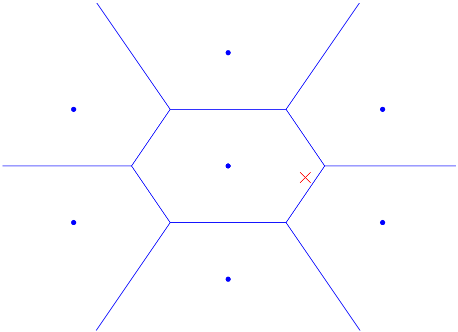
Mise en oeuvre

Simulateur de trajectoires $\longrightarrow$ grilles



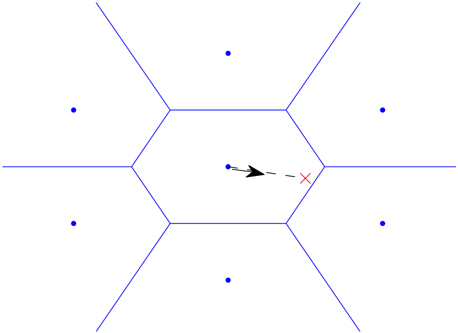
Mise en oeuvre

Simulateur de trajectoires $\longrightarrow$ grilles



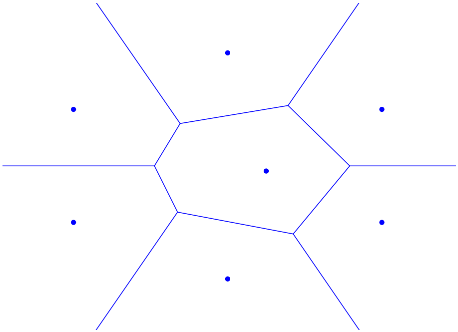
Mise en oeuvre

Simulateur de trajectoires $\longrightarrow$ grilles



Mise en oeuvre

Simulateur de trajectoires $\longrightarrow$ grilles



Avantages et inconvénients de la quantification

Avantages

- un simulateur de la loi cible suffit
- construction automatique des grilles
- vitesse de convergence pour $\mathbb{E}[|f(X) - f(\widehat{X})|]$ si f lipschitz

Inconvénients

- temps de calcul des grilles
- fléau de la dimension
- questions ouvertes sur la convergence des algorithmes

Suspension magnétique

Erreur de quantification

$$\theta(t) \in \{1, 2\}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -20 & 20 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

Calcul de l'erreur $\mathbb{E}_{\theta(0)}[|S_1 - \widehat{S}_1|^2]^{1/2}$ (10^6 Monte Carlo)

Nombre de points dans la grille	Erreur pour $\theta_0 = 1$	Erreur pour $\theta_0 = 2$
10	5.441×10^{-3}	1017×10^{-3}
50	1.585×10^{-3}	357.5×10^{-3}
100	0.753×10^{-3}	175.2×10^{-3}
500	0.173×10^{-3}	36.22×10^{-3}
1000	0.100×10^{-3}	23.35×10^{-3}

Construction de l'approximation de la variance

Arbre des trajectoires type

Trajectoires type

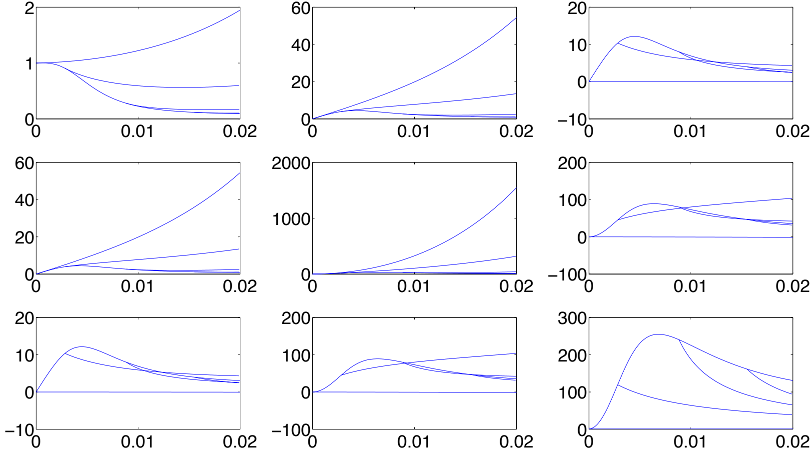
$$\begin{cases} d\widehat{P}_0(t) & = & R(\widehat{P}_0(t), Z_0) \\ \widehat{P}_0(0) & = & Var[x(0)] \end{cases} \quad \begin{cases} d\widehat{P}_k(t) & = & R(\widehat{P}_k(t), Z_k) \\ \widehat{P}_k(0) & = & \widehat{P}_{k-1}(\widehat{S}_k) \end{cases}$$

- en nombre fini
- croissance exponentielle avec le nombre de sauts

Suspension magnétique

Arbre des trajectoires type

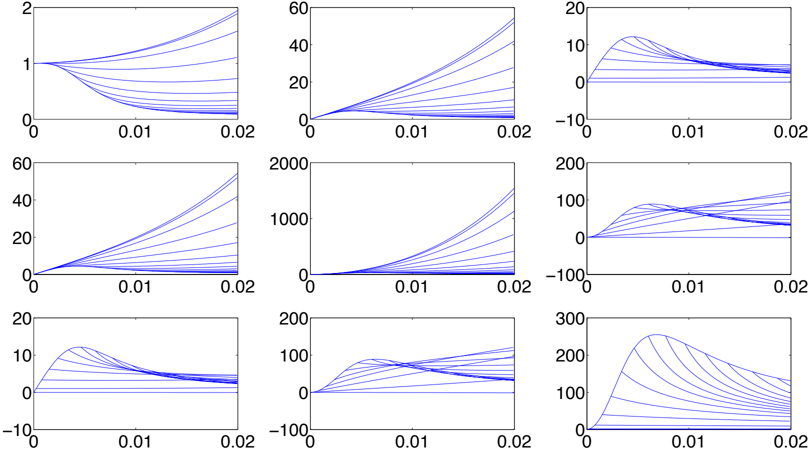
Arbre des trajectoires pré-calculées, 10 points



Suspension magnétique

Arbre des trajectoires type

Arbre des trajectoires pré-calculées, 50 points

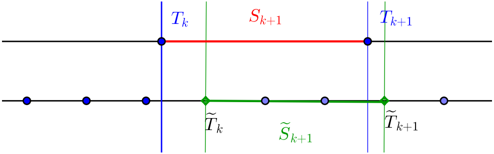


Construction de l'approximation de la variance

Reconstruction en ligne

- pas de temps en ligne δt
- prise en compte des sauts avec décalage

$$\widetilde{T}_0 = 0, \qquad \widetilde{T}_k = \inf\{q;\ T_k < q\delta t\}\delta t, \qquad \widetilde{S}_k = \widetilde{T}_k - \widetilde{T}_{k-1}$$



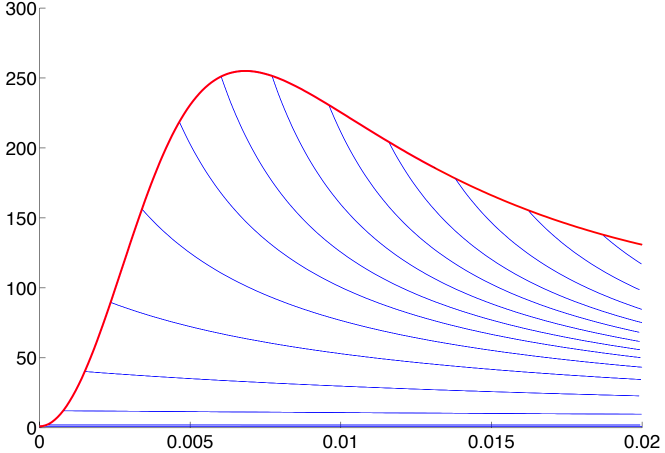
Collage des trajectoires

$$\widetilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{P}_k(t - \widetilde{T}_k)\mathbb{1}_{\{0 \le t - \widetilde{T}_k < \widetilde{S}_{k+1}\}}$$

Suspension magnétique

Reconstruction en ligne

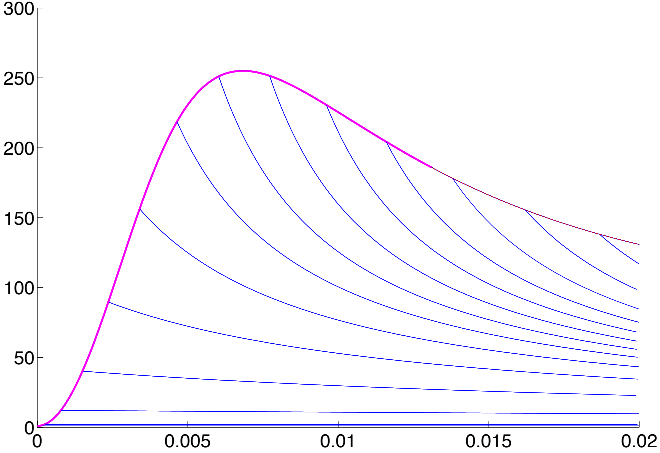
Coordonnée $P_{33}(t)$ noir: vraie valeur, magenta: valeur approchée



Suspension magnétique

Reconstruction en ligne

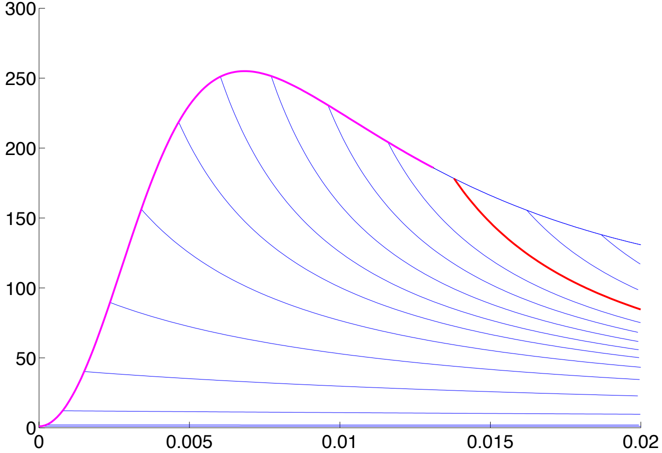
Coordonnée $P_{33}(t)$ noir: vraie valeur, magenta: valeur approchée



Suspension magnétique

Reconstruction en ligne

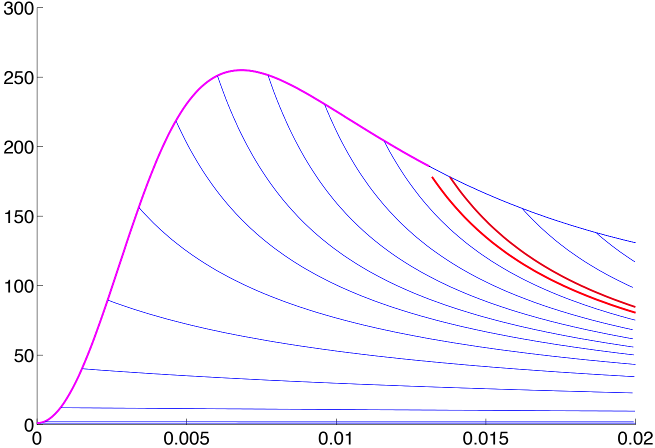
Coordonnée $P_{33}(t)$ noir: vraie valeur, magenta: valeur approchée



Suspension magnétique

Reconstruction en ligne

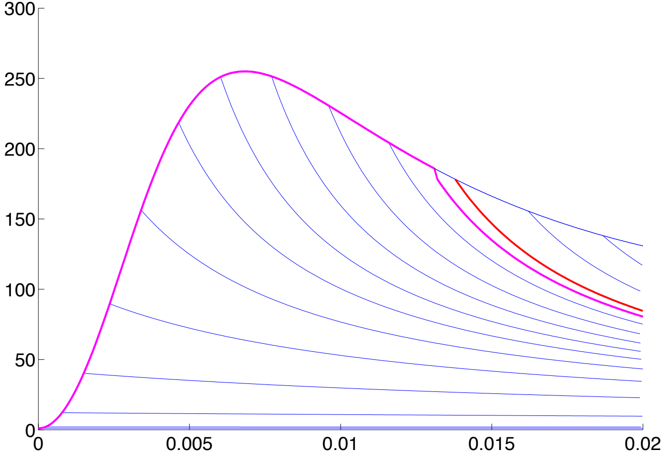
Coordonnée $P_{33}(t)$ noir: vraie valeur, magenta: valeur approchée



Suspension magnétique

Reconstruction en ligne

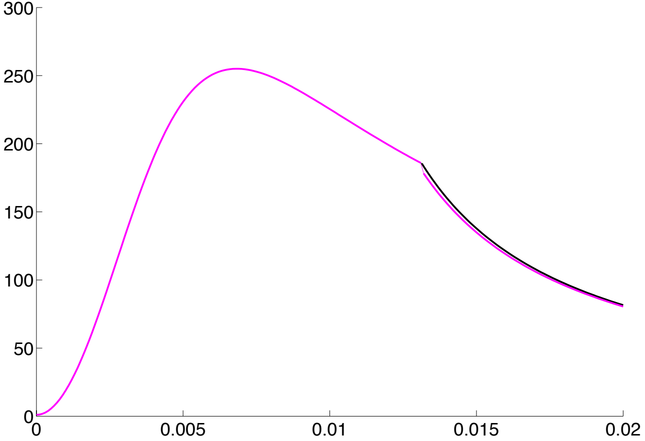
Coordonnée $P_{33}(t)$ noir: vraie valeur, magenta: valeur approchée



Suspension magnétique

Reconstruction en ligne

Coordonnée $P_{33}(t)$ noir: vraie valeur, magenta: valeur approchée



Construction de l'approximation du filtre

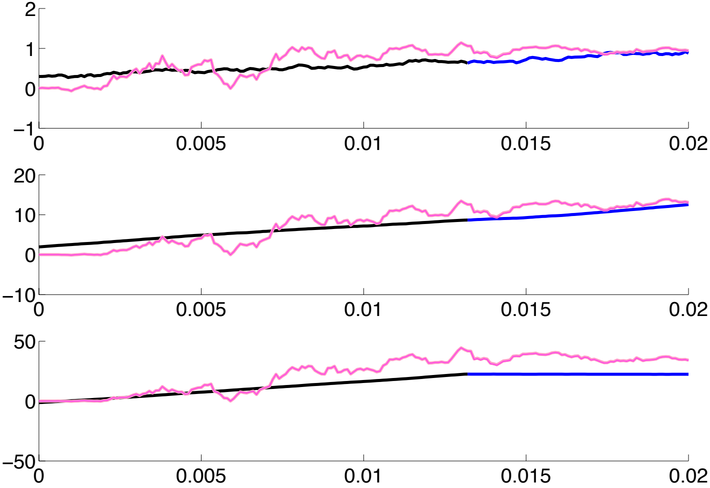
Matrice de gain approchée

$$\widetilde{K}(t) = \widetilde{P}(t) C'_{\theta(t)} (D_{\theta(t)} D'_{\theta(t)})^{-1}$$

Filtre de Kalman approché

$$\begin{aligned} d\widetilde{x}_K(t) &= A_{\theta(t)} \widetilde{x}_K(t) dt + \widetilde{K}(t) \big(dy(t) - C_{\theta(t)} \widetilde{x}_K dt \big) \\ \widetilde{x}_K(0) &= \mathbb{E}[x(0)] \end{aligned}$$

Filtre approché – Exemple de la suspension magnétique



Etude de la convergence

Stratégie

- montrer que
$$\left\{\begin{array}{rcl} dP_k(t) & = & R(P_k(t), Z_k) \\ P_k(0) & = & P_{k-1}(S_k) \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rcl} d\widehat{P}_k(t) & = & R(\widehat{P}_k(t), Z_k) \\ \widehat{P}_k(0) & = & \widehat{P}_{k-1}(\widehat{S}_k) \end{array}\right.$$
sont proches
$\Longrightarrow$ Etudier la régularité Lipschitz des solutions d'équations de Riccati
- étudier l'effet du décalage $T_k - \widetilde{T}_k$
- montrer la convergence de $\widetilde{P}$ vers P
- montrer la convergence de $\widetilde{x}_K(t)$ vers $\widehat{x}_K(t)$

Régularité des solutions

$\phi_i(q,t)$ solution de $dM(t) = R(M(t), i)$ avec $M(0) = q$

Solutions bornées

Si q symétrique définie positive alors il existe $p_{i,q}$ symétrique définie positive

$$\phi_i(q,t) \leq p_{i,q}, \qquad 0 \leq t \leq T$$

Solutions Lipschitz

Si $q, q' \leq p$ symétriques définies positives alors il existe $\ell_{i,p}$, $\eta_{i,p}$

$$\|\phi_i(q,t) - \phi_i(q',t')\| \leq \ell_{i,p}\|q - q'\| + \eta_{i,p}|t - t'|, \qquad 0 \leq t \leq T$$

Convergence de $\widetilde{P}$

Si nombre fini de sauts avant t, il existe $\bar{p}$ symétrique définie positive

$$P_k(t) \leq \bar{p}, \quad \widehat{P}_k(t) \leq \bar{p} \qquad 0 \leq t \leq T$$

et régularité Lipschitz uniforme avec $\bar{\ell} = \max_i \ell_{i,\bar{p}}$, $\bar{\eta} = \max_i \eta_{i,\bar{p}}$

Vitesse de convergence

$$\mathbb{E}[\|P(t) - \widetilde{P}(t)\|^2 \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq T \wedge T_{n+1}\}}]^{1/2}$$
$$\leq \sum_{j=0}^{n-1} \bar{\ell}^{n-j} \bar{\eta} \mathbb{E}[|S_{j+1} - \widehat{S}_{j+1}|^2]^{1/2} + \bar{\eta}\delta t + n\|\bar{p}\|(\overline{\lambda}\delta t)^{1/2},$$

$\Longrightarrow$ convergence des matrices de gain $\widetilde{K}(t)$ vers $K(t)$

Convergence de $\widetilde{x}_K(t)$

Comparer les processus $X(t) = (x(t), \widehat{x}_K(t))$ et $\widetilde{X}(t) = (x(t), \widetilde{x}_K(t))$ en comparant les EDS qu'ils satisfont

Vitesse de convergence

$$\mathbb{E}[|X(t) - \widetilde{X}(t)|^2 \mathbb{1}_{\{0\leq t\leq T\wedge T_{n+1}\}}] \leq \overline{c}_1 \exp(T\overline{c}_2),$$

$$\begin{aligned}
\overline{c}_1 &= \max_{1\leq i\leq N}(2\|D_i\| + 8T\|C_i\|^2\overline{X})\|C_i'(D_iD_i')^{-1}\| \\
&\quad \times\Big(\sum_{j=0}^{n-1}\overline{\ell}^{n-j}\overline{\eta}\mathbb{E}[|S_{j+1} - \widehat{S}_{j+1}|^2]^{1/2} + \overline{\eta}\delta t + n\|\overline{p}\|(\overline{\lambda}\delta t)^{1/2}\Big)^2, \\
\overline{c}_2 &= 2T\max_{1\leq i\leq N}(\|A_i\| + \|\overline{p}\|\|C_i\|\|(D_iD_i')^{-1}\|)^2.
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ convergence des matrices de gain $\widetilde{K}(t)$ vers $K(t)$

Plan de l'exposé

Construction des grilles de quantification

- simulateur de loi exponentielle
- construction d'une grille de quantification du premier temps de saut pour chaque état initial Γ_i, $1 \leq i \leq N$
- enlever les points au-delà de l'horizon de calcul T et ajouter T

Nombre effectif de points utilisés

Nombre de points dans les grilles	Points $\leq T$ pour $\theta(0) = 1$	Points $\leq T$ pour $\theta(0) = 2$	Nombre de branches
10	4	1	7
50	14	1	17
100	33	1	36
500	161	2	7763
1000	319	3	603784

Construction de l'arbre des trajectoires pré-calculées

Calculer récursivement $\{Z_n, \widehat{T}_n, \widehat{S}_n, n, compteur, \widehat{P}_{n-1}(\widehat{S}_n)\}$ et $\phi_{Z_n}(\widehat{P}_{n-1}(\widehat{S}_n), k\delta t)$ pour $0 \leq k \leq \left[T/\delta t\right]$

Initialisation

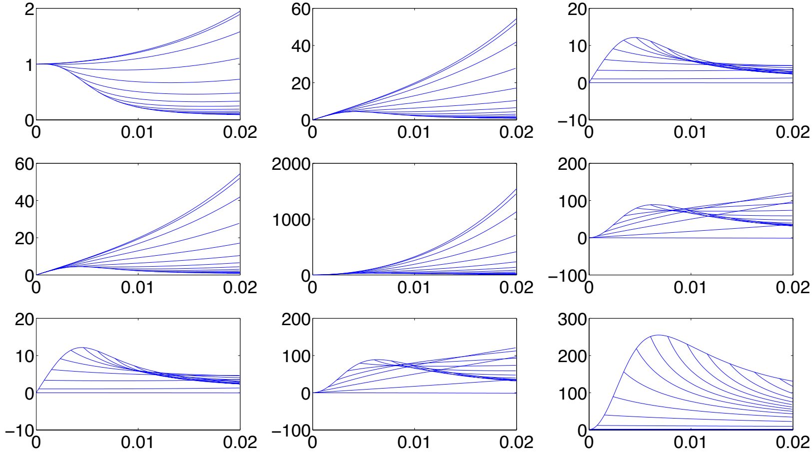
- Pour $1 \leq i \leq N$, stocker $\{i, 0, 0, 0, i, Var[x(0)]\}$

Boucle tant que stock non vide

- lire la première ligne du stock $\{i, t, s, n, cpt, M\}$
- mémoriser $\phi_i(M, k\delta t)$ pour $0 \leq k \leq \left[T/\delta t\right]$
- si $\Gamma_i(t) = \{s' \in \Gamma_i \ ; \ s' + t \leq T\} \neq \emptyset$, pour tout $s' \in \Gamma_i(t)$
  - calculer $M' = \phi_i(M, s')$
  - pour $1 \leq j \leq N$, $j \neq i$ stocker $\{j, t + s', s', n + 1, cpt{+}{+}, M'\}$
- ôter la première ligne du stock

Exemple de la suspension magnétique

Arbre des trajectoires pré-calculées, 50points



Calcul du filtre en temps réel

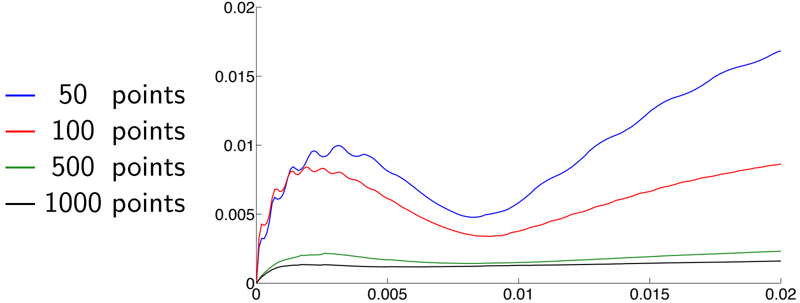
Initialisation

- $P(0) = Var[x(0)]$, $K(0) = P(0)C'_{\theta(0)}(D_{\theta(0)}D'_{\theta(0)})^{-1}$
- lire la première branche pré-calculée correspondant à $\theta(0)$

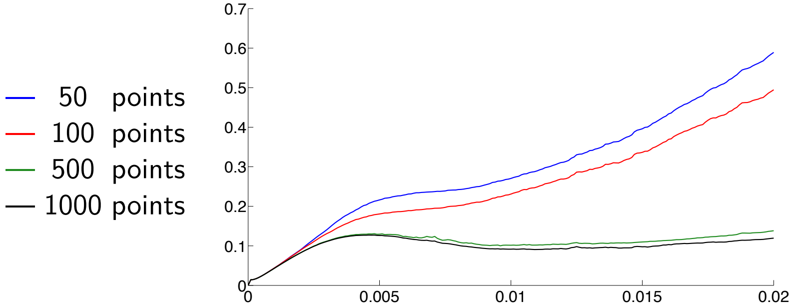
Boucle pour $1 \leq k \leq \left[T/\delta t\right]$

- calculer $\widetilde{x}(k\delta t)$ avec la valeur pré-calculée de P et K en $(k-1)\delta t$
- Si pas de saut de θ entre $(i-1)\delta t$ et i
  - lire la valeur pré-calculée de P en $k\delta t$, calculer K en $k\delta t$
- Sinon
  - chercher la branche pré-calculée correspondant à la nouvelle valeur de θ et à la projection dans les grilles de quantification de la durée depuis le dernier saut
  - prendre la valeur initiale de cette branche pour P en $k\delta t$, calculer K correspondant en $k\delta t$

Erreur $\mathbb{E}[\|P(t) - \widetilde{P}(t)\|]$



Erreur $\mathbb{E}[\|\widehat{x}_K(t) - \widetilde{x}_K(t)\|^2]^{1/2}$



Comparaison des erreurs intégrées sur $[0, T]$

Nombre de points	Erreur Kalman	Erreur Kalman approché	Erreur Fragoso Costa
10	3.9244	3.9634	3.9850
50	3.9244	3.9254	3.9850
100	3.9244	3.9246	3.9850
500	3.9244	3.9244	3.9850
1000	3.9244	3.9244	3.9850

Plan de l'exposé

Conclusion

Avantages

- bonne approximation du filtre de Kalman réalisable en temps réel
- meilleurs résultats que le filtre de Fragoso-Costa même pour des grilles à peu de points
- résultats théorique sur la régularité et la stabilité des équations de Riccati, sur la convergence du filtre
- pas besoin d'imposer $\pi(t) > 0$ pour tous i et t

Inconvénients

- un horizon correspondant à très peu de sauts possibles
- explosion des pré-calculs avec le nombre de sauts

Perspectives

Améliorations possibles

- structures des branches stockées / branches inexistantes
- horizon mobile
- quantification de $(\theta(t), P(t))$ sur un horizon plus long

MERCI