

# Méthode numérique pour l'arrêt optimal des processus markoviens déterministes par morceaux

Benoîte de Saporta    François Dufour

INRIA CQFD, IMB, Université de Bordeaux

Journée MAB – 19 mars 2009

# Plan

- 1 Processus markoviens déterministes par morceaux
  - Définition
  - Exemples
- 2 Arrêt optimal
  - Formulation
  - Résolution
- 3 Méthode numérique
  - Méthode classique
  - Calcul de la fonction valeur
  - Temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal
- 4 Résultats numériques

# Introduction

Années 80, M. Davis

## Objectif

Modèle général dynamique **aléatoire** de type **non diffusif** pour traiter des problèmes d'**optimisation** en recherche opérationnelle, files d'attente, biologie, fiabilité, finance...

## Description : deux variables

- 1 variable euclidienne d'état  $x_t \in \mathbb{R}^d$ , grandeurs physiques
- 2 variable discrète de mode  $m_t \in \{1, 2, \dots, p\}$ , régime de fonctionnement

$$X_t = (x_t, m_t)$$

# Dynamique

## Caractéristiques

- **Flot  $\phi$**  mouvement déterministe entre deux sauts
- **Intensité  $\lambda$**  des sauts aléatoires
- **Noyau Markovien  $Q$**  sélectionne la valeur juste après un saut

## Sauts

- **$t^*(x, m)$**  temps d'atteinte de la frontière partant de  $(x, m)$
- Loi du temps de saut partant de  $(x, m)$

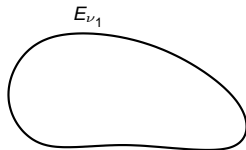
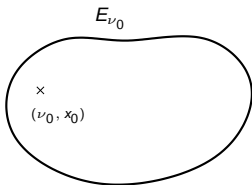
$$\mathbb{P}_{x,m}(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda(\phi(x,m,s)) ds} & \text{si } t < t^*(x, m) \\ 0 & \text{si } t \geq t^*(x, m) \end{cases}$$



# Construction itérative

Point de départ :

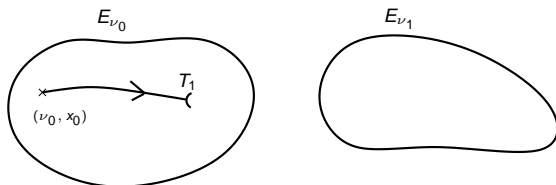
$$X_0 = Z_0 = (x, m)$$



# Construction itérative

$X_t$  suit le flot jusqu'au premier temps de saut  $T_1 = S_1$  :

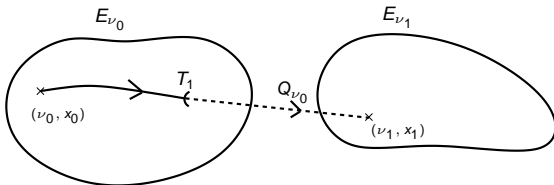
$$X_t = \phi(x, m, t), \quad t < T_1$$



# Construction itérative

Nouvelle position  $Z_1$  sélectionnée par

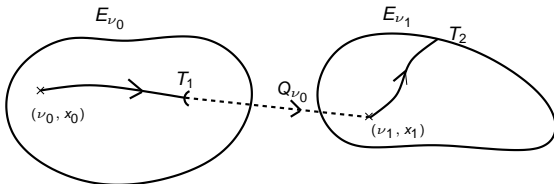
$$Q(\phi(x, m, T_1), \cdot)$$



# Construction itérative

$X_t$  suit le flot jusqu'au prochain temps de saut  $T_2 = T_1 + S_2$  :

$$X_{T_1+t} = \phi(Z_1, t), \quad t < S_2$$

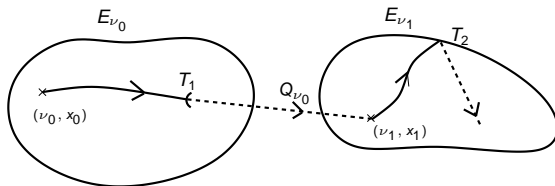




# Construction itérative

Nouvelle position  $Z_2$  sélectionnée par

$$Q(\phi(Z_1, S_2), \cdot) \dots$$



# Exemple simple

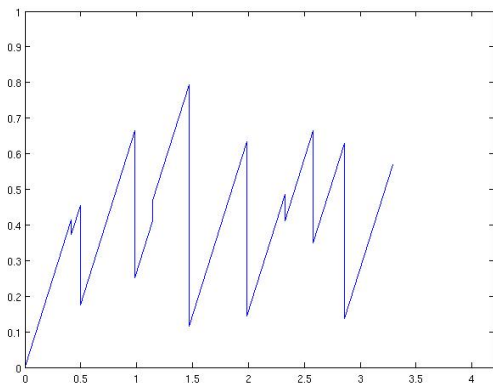
- mobile en déplacement sur  $[0; 1[$  à vitesse constante  $v$
- un seul mode

## Caractéristiques

- $\phi(x, t) = x + vt$
- $\lambda(x) = \beta x^\alpha$ ,  $\beta > 0$ ,  $\alpha \geq 1$  : plus on approche de la frontière 1 plus les chances de sauter augmentent
- $Q(x, \cdot)$  loi uniforme sur  $[0; 1/2]$

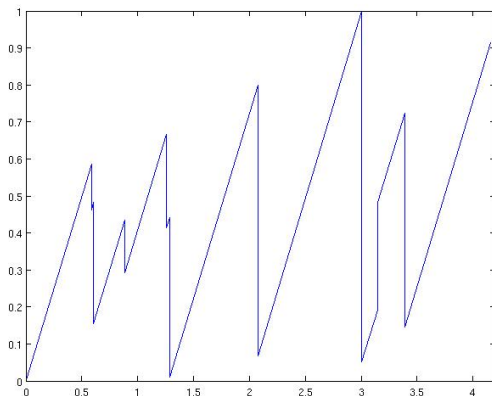
# Trajectoires

Exemples de trajectoires pour  $X_0 = 0$ ,  $v = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  et jusqu'au 10ème saut

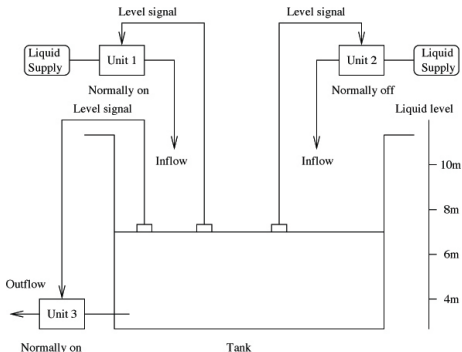


# Trajectoires

Exemples de trajectoires pour  $X_0 = 0$ ,  $\nu = 1$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 3$  et jusqu'au 10ème saut



# Exemple du réservoir



- **64 modes** en fonction des positions des 3 vannes (ouverte, fermée, bloquée ouverte, bloquée fermée)
- **2 variables d'état** : la hauteur et la température du liquide

# Définition

- Fonction coût  $g$
- $\mathcal{M}_N$  ensemble des temps d'arrêt  $\tau \leq T_N$

## Arrêt optimal

- calculer

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- trouver  $\tau^*$  qui réalise le sup

# Construction itérative

U. Gugerli 1986 :  $V(x) = v_0(x)$

## Programmation dynamique

- $v_N = g$
- $v_k = L(v_{k+1}, g)$  pour  $k \leq N - 1$

$$\begin{aligned}
 &L(v, g)(x) \\
 &= \sup_{u \leq t^*(x)} \left\{ \mathbb{E} \left[ v(Z_1) \mathbf{1}_{\{S_1 < u\}} + g(\phi(x, u)) \mathbf{1}_{\{S_1 \geq u\}} \mid Z_0 = x \right] \right\} \\
 &\quad \vee \mathbb{E} [v(Z_1) \mid Z_0 = x]
 \end{aligned}$$

# Méthode numérique pour les diffusions

Bally, Pagès, Pham, Printems 98–05

$Y_t$  processus de diffusion en temps continu

- 1 **discrétisation en temps** (schéma d'Euler) :  $Y_k = Y_{k\Delta t}$  chaîne de Markov en temps discret
- 2 **quantification** : remplacer  $Y_k$  par une variable à valeurs dans un ensemble fini  $\hat{Y}_k$
- 3 remplacement des **espérances conditionnelles** par des sommes finies

Hypothèses + fonction coût **Lipschitz**  $\implies$  **vitesse de convergence** de la fonction valeur discrétisée vers la fonction valeur d'origine



# Méthode numérique pour les diffusions

Bally, Pagès, Pham, Printems 98–05

$Y_t$  processus de diffusion en temps continu

- 1 **discrétisation en temps** (schéma d'Euler) :  $Y_k = Y_{k\Delta t}$  chaîne de Markov en temps discret
- 2 **quantification** : remplacer  $Y_k$  par une variable à valeurs dans un ensemble fini  $\hat{Y}_k$
- 3 remplacement des **espérances conditionnelles** par des sommes finies

Hypothèses + fonction coût **Lipschitz**  $\implies$  **vitesse de convergence** de la fonction valeur discrétisée vers la fonction valeur d'origine

# Méthode numérique pour les diffusions

Bally, Pagès, Pham, Printems 98–05

$Y_t$  processus de diffusion en temps continu

- 1 **discrétisation en temps** (schéma d'Euler) :  $Y_k = Y_{k\Delta t}$  chaîne de Markov en temps discret
- 2 **quantification** : remplacer  $Y_k$  par une variable à valeurs dans un ensemble fini  $\hat{Y}_k$
- 3 remplacement des **espérances conditionnelles** par des sommes finies

Hypothèses + fonction coût Lipschitz  $\implies$  vitesse de convergence de la fonction valeur discrétisée vers la fonction valeur d'origine

# Méthode numérique pour les diffusions

Bally, Pagès, Pham, Printems 98–05

$Y_t$  processus de diffusion en temps continu

- 1 **discrétisation en temps** (schéma d'Euler) :  $Y_k = Y_{k\Delta t}$  chaîne de Markov en temps discret
- 2 **quantification** : remplacer  $Y_k$  par une variable à valeurs dans un ensemble fini  $\hat{Y}_k$
- 3 remplacement des **espérances conditionnelles** par des sommes finies

Hypothèses + fonction coût **Lipschitz**  $\implies$  **vitesse de convergence** de la fonction valeur discrétisée vers la fonction valeur d'origine

# Spécificité des PMDM

- sauts à des instants aléatoires
- fonctions indicatrices même si la fonction coût est régulière

## Solution

utiliser la chaîne en temps discret  $(Z_n, S_n)$

# Approximation de la fonction valeur

$$\begin{aligned} L(v, g)(x) &= \sup_{u \leq t^*(x)} \left\{ \mathbb{E} \left[ v(Z_1) \mathbf{1}_{\{S_1 < u\}} + g(\phi(x, u)) \mathbf{1}_{\{S_1 \geq u\}} \mid Z_0 = x \right] \right\} \\ &\quad \vee \mathbb{E} [v(Z_1) \mid Z_0 = x] \end{aligned}$$

- 1 quantification de la chaîne  $(Z_n, S_n)$  et transformation des espérances conditionnelles en sommes finies
- 2 discrétisation des intervalles  $[0, t^*(z)]$  pour  $z$  dans les grilles de quantification et transformation du sup en max

# Vitesse de convergence

## Théorème

Hypothèses de type **Lipschitz** sur  $\phi$ ,  $\lambda$ ,  $Q$ ,  $t^*$  et  $g$

$$|V(x) - \hat{V}(x)| \leq C\sqrt{EQ}$$

$C$  constante explicite,

$EQ$  erreur de quantification

$\sqrt{\cdot}$  prix à payer pour les indicatrices

# Règle d'arrêt

Avec la même discrétisation, **sans calculs supplémentaires** on construit une règle d'arrêt  $\tau$  qui est un **vrai temps d'arrêt** pour  $X_t$

## Théorème

Mêmes hypothèses

$$|V(x) - \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]| \leq C_1 EV + C_2 \sqrt{EQ}$$

$C_1, C_2$  constantes explicites,

$EV$  erreur dans l'approximation de la fonction valeur

$EQ$  erreur de quantification

# Exemple du mobile

- mobile en déplacement sur  $[0; 1[$  à vitesse constante 1
- un seul mode

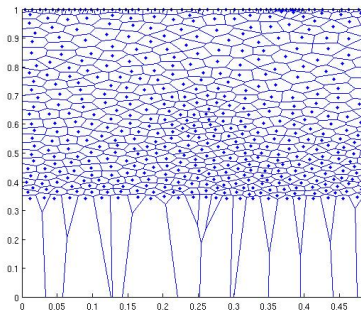
## Caractéristiques

- $\phi(x, t) = x + t$
- $\lambda(x) = 3x$  : plus on approche de la frontière 1 plus les chances de sauter augmentent
- $Q(x, \cdot)$  loi uniforme sur  $[0; 1/2]$
- horizon :  $N = 10$  sauts
- départ en  $x = 0$

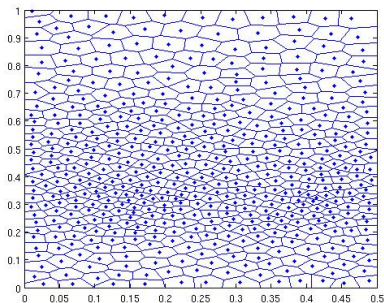


# Grilles de quantification 500 points

$(Z_1, S_1)$

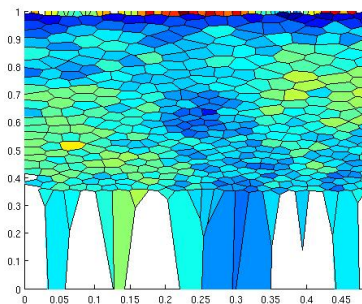


$(Z_2, S_2)$

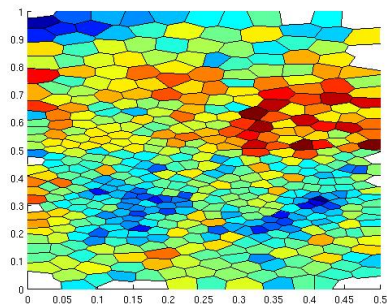


# Grilles de quantification 500 points

$(Z_1, S_1)$

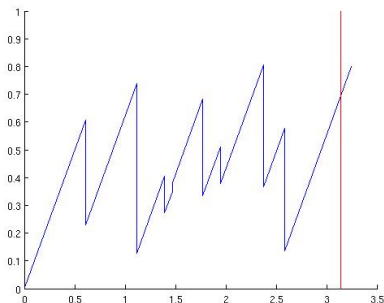
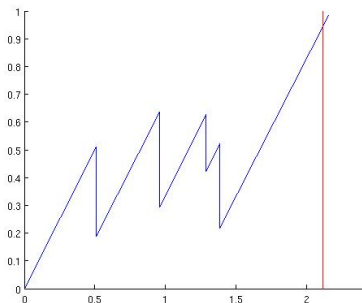


$(Z_2, S_2)$



# Règle d'arrêt

## Exemples de trajectoires stoppées



# Calculs de la fonction valeur

Vraie fonction valeur inconnue

$$\mathbb{E}_x[g(X_\tau)] \leq V(x) \leq \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T_N} g(X_t)\right] = 0.9878$$

## Résultats numériques

$Pt$	$QE$	$\Delta$	$\hat{V}_0$	$\bar{V}_0$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
10	0.0943	0.151	0.7760	0.8173	0.1705	74.64	897.0
50	0.0418	0.100	0.8298	0.8785	0.1093	43.36	511.5
100	0.0289	0.083	0.8242	0.8850	0.1028	34.15	400.3
500	0.0133	0.056	0.8432	0.8899	0.0989	21.03	243.1
900	0.0102	0.049	0.8514	0.8968	0.0910	17.98	206.9