

Modélisation par les PDMP

Estimation de performance et optimisation

Application à la fiabilité dynamique

Benoîte de Saporta

Université de Bordeaux et Inria Bordeaux Sud-Ouest

Séminaire de Probabilités et Statistique

Université Montpellier 2

Plan

Introduction

Processus Markoviens déterministes par morceaux

Premiers domaines d'application

Calculer avec des PDMP

Temps de sortie et durée de service

Formulation du problème

Discrétisation par quantification

Résultats

Arrêt optimal

Formulation du problème

Résultats théoriques

Résultats numériques

Extensions

Méthodologie générale

Conclusion et perspectives

Processus markoviens déterministes par morceaux

Davis (80's)

Classe générale de processus stochastiques

- ▶ **markoviens**
- ▶ **hybrides** : une composant discrète et une composante continue
- ▶ **non-diffusion** : mouvement **déterministe** ponctué de sauts aléatoires

Dynamique

Processus hybride $X_t = (m_t, y_t)$

- ▶ mode **discret** $m_t \in \{1, 2, \dots, p\}$
- ▶ variables d'état **euclidiennes** $y_t \in \mathbb{R}^n$

Caractéristiques locales dans le mode m

- ▶ E_m ouvert de \mathbb{R}^d , ∂E_m sa frontière, \bar{E}_m sa fermeture, $E = \cup(\{m\} \times E_m)$ espace d'états
- ▶ Flot $\phi_m: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ groupe d'homéomorphismes, mouvement déterministe
- ▶ Intensité $\lambda_m: \bar{E}_m \rightarrow \mathbb{R}_+$ intensité des sauts
- ▶ Noyau markovien Q_m on $(\bar{E}_m, \mathcal{B}(\bar{E}_m))$ sélectionne les nouvelles positions après saut

Deux types de sauts

- ▶ temps d'atteinte de la frontière $t^*(m, y)$ déterministe

$$t^*(m, y) = \inf\{t > 0 : \phi_m(y, t) \in \partial E_m\}$$

- ▶ loi du premier temps de saut T_1

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda_m(\phi_m(y,s)) ds} & \text{si } t < t^*(m, y) \\ 0 & \text{si } t \geq t^*(m, y) \end{cases}$$

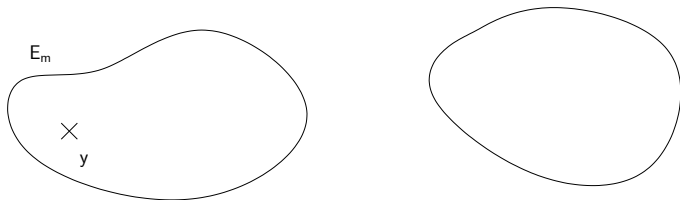
- ▶ T_1 a une densité sur $[0, t^*(m, y)[$ et un **atome** en $t^*(m, y)$:

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 = t^*(m, y)) > 0$$

Construction itérative

Point de départ

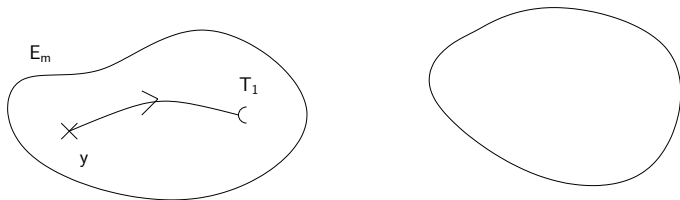
$$X_0 = Z_0 = (m, y)$$



Construction itérative

X_t suit le flot déterministe jusqu'au premier temps de saut $T_1 = S_1$

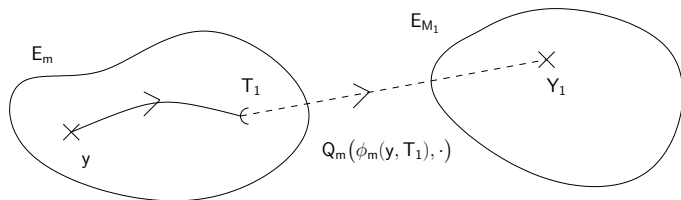
$$X_t = (m, \phi_m(y, t)), \quad t < T_1$$



Construction itérative

Position et mode après-saut $Z_1 = (M_1, Y_1)$ tirés suivant la loi

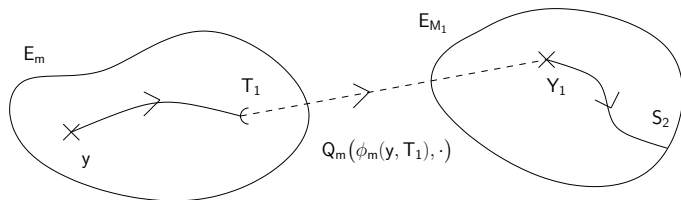
$$Q_m(\phi_m(y, T_1), \cdot)$$



Construction itérative

X_t suit le flot déterministe jusqu'au prochain temps de saut T_2

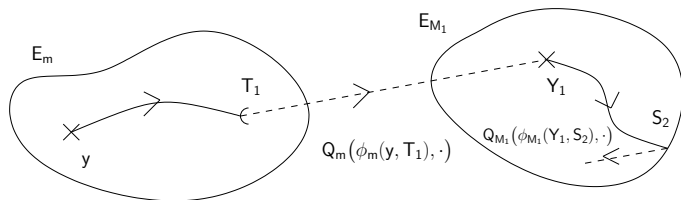
$$X_{T_1+t} = (M_1, \phi_{M_1}(Y_1, t)), \quad t < S_2 = T_2 - T_1$$



Construction itérative

Position et mode après-saut $Z_2 = (M_2, Y_2)$ tirés suivant la loi

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) \dots$$



Chaîne induite

Z_n position et mode après le saut n

S_n durée entre le saut n et le saut $n - 1$

Propriété fondamentale

(Z_n, S_n) est une **chaîne de Markov** qui contient **tout** l'aléa du processus :

X_t connu pour tout $t \implies (Z_n, S_n)$ connus pour tout n

(Z_n, S_n) connus pour tout $n \implies X_t$ connu pour tout t

Domaines d'application

Premières applications

gestion de stock, modèles d'atelier, files d'attente, assurance, ...

Biologie

- ▶ modélisation du **potentiel électrique** dans les neurones [Pakdaman, Thieullen, Wainrib 2010] [Riedler, Thieullen, Wainrib 2012] [Génadot, Thieullen 2012]
- ▶ modélisation de la **division cellulaire** [Doumic, Hoffmann, Krell, Robert 2012]

Fiabilité dynamique

Comportement de systèmes complexes pouvant tomber en **panne**

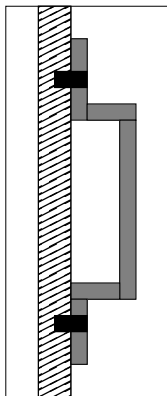
Exemple Astrium

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion



Problème de corrosion

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion



- ▶ support pour les équipements du missile
- ▶ structure de petite taille : un seul point de mesure
- ▶ longue durée de vie → surveillance de la perte d'épaisseur par corrosion

Profil d'emploi

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

Profil d'emploi

Stockage dans 3 environnements différentes avec durées **aléatoires**

1. atelier
2. sous-marin nucléaire en mission
3. sous-marin en cale sèche

Exigence du sûreté très forte



Maîtriser l'évolution de l'épaisseur

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶ ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶ ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- ▶ η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

Dynamique du processus de dégradation

- ▶ Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- ▶ Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- ▶ Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- ▶ Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

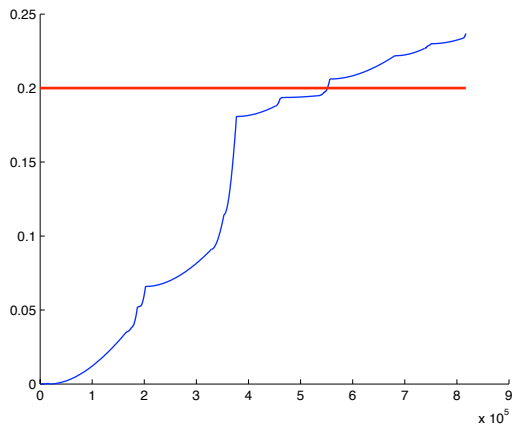
$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ▶ ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- ▶ η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

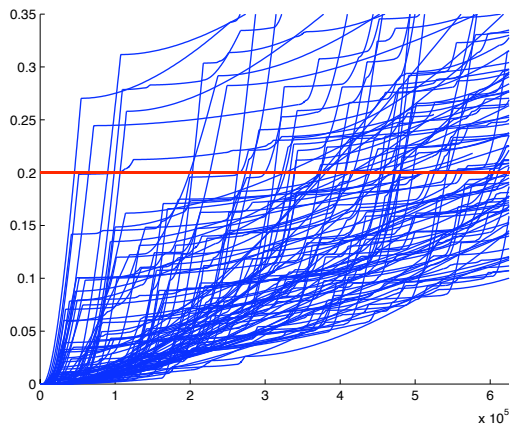
On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Exemples de trajectoires simulées



Exemples de trajectoires simulées



Méthodes numériques pour les PDMP

Constat

- ▶ fort potentiel d'applications
- ▶ nombreux résultats théoriques [Davis 93], [Jacobsen 06]
- ▶ processus faciles à **simuler** si le flot est explicite
- ▶ très peu de méthodes numériques pour les PDMP dans la littérature [Costa Davis 88, 89]

Objectif des travaux présentés

Proposer des **méthodes numériques**

- ▶ adaptées aux **spécificités** des PDMP
- ▶ avec des **preuves** (et des vitesses) de convergence
- ▶ utilisables en **pratique**

Pour **calculer**

- ▶ la loi d'un **temps de sortie**
- ▶ un temps d'arrêt **optimal**

Plan de l'exposé

Introduction

Temps de sortie et durée de service

Formulation du problème

Discrétisation par quantification

Résultats

Arrêt optimal

Extensions

Approximation de la loi d'un temps de sortie

$U \subset E, X_0 \in U$. Temps de sortie de U :

$$\tau = \inf\{s \geq 0 : X_s \notin U\}$$

Objectif

Proposer une méthode numérique pour approcher la loi de τ

$$s \longmapsto \mathbb{P}(\tau > s)$$

Formulation récursive du problème

Constat $\{\tau \leq T_{k+1}\} = \{\tau \leq T_k\} \cup \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\}$

Conséquence : calcul récursif de $\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_n)$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_{k+1}) \\ &= \frac{\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_k) \mathbb{P}(\tau \leq T_k) + \mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})}{\mathbb{P}(\tau \leq T_{k+1})} \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\tau > s | \tau \leq T_0) = 0$$

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k)$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$

Stratégie

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k)$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov (Z_n, T_n)

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)]$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$
 $= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k + u^*(Z_k) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov (Z_n, T_n)

Stratégie de résolution

Deux quantités à calculer

- ▶ $\mathbb{P}(\tau \leq T_k) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{U^c}(Z_k)]$
- ▶ $\mathbb{P}(\{\tau > s\} \cap \{T_k < \tau \leq T_{k+1}\})$
 $= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_k + u^*(Z_k) \wedge T_{k+1} > s\}} \mathbb{1}_U(Z_k) \mathbb{1}_{U^c}(Z_{k+1})]$

Stratégie

- ▶ faire apparaître la chaîne de Markov (Z_n, T_n)
- ▶ Discrétiser la chaîne de Markov (Z_n, T_n)

Choix de la méthode de discrétisation

[Pagès 98], [Bally, Pagès 03], ...

Quantification d'une variable aléatoire $X \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Approcher X par \hat{X} à support fini pour minimiser $\|X - \hat{X}\|_p$

- ▶ grille finie pondérée Γ avec $|\Gamma| = K$
- ▶ $\hat{X} = p_\Gamma(X)$ projection au plus proche voisin

Propriétés asymptotiques

Si $E[|X|^{p+\eta}] < +\infty$ alors

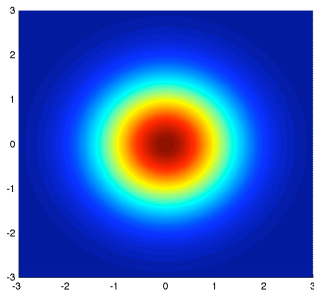
$$\min_{|\Gamma| \leq K} \|X - \hat{X}^\Gamma\|_p \simeq K^{-1/d}$$

Algorithmes de quantification

Il existe des algorithmes donnant

- ▶ la grille Γ
- ▶ la loi de \hat{X}
- ▶ les probabilités de transition pour des chaînes de Markov

Exemple: $\mathcal{N}(0, I_2)$

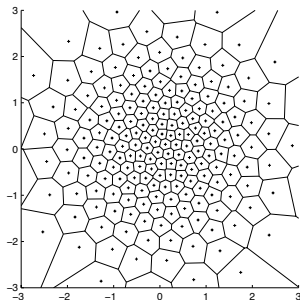


Algorithmes de quantification

Il existe des algorithmes donnant

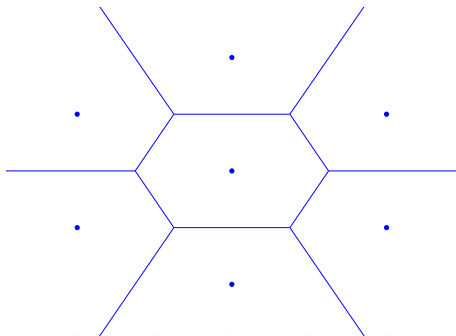
- ▶ la grille Γ
- ▶ la loi de \hat{X}
- ▶ les probabilités de transition pour des chaînes de Markov

Exemple: $\mathcal{N}(0, I_2)$



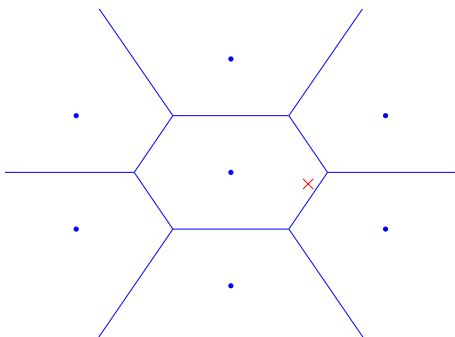
Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



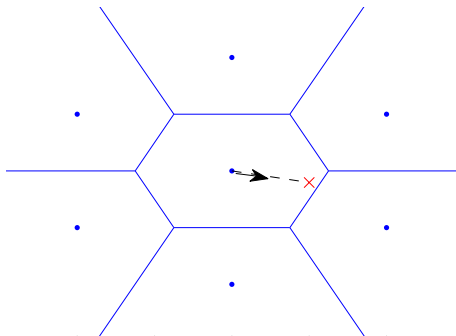
Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



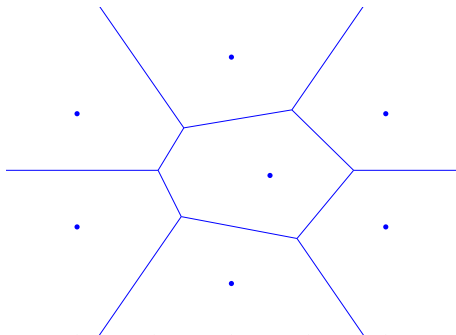
Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



Mise en oeuvre

Modèle \longrightarrow simulateur de trajectoires \longrightarrow grilles



Avantages et inconvénients de la quantification

Avantages

- ▶ un simulateur de la loi cible suffit
- ▶ construction automatique des grilles
- ▶ vitesse de convergence pour $\mathbb{E}[|f(X) - f(\hat{X})|]$ si f lipschitz

Inconvénients

- ▶ temps de calcul des grilles
- ▶ fléau de la dimension
- ▶ questions ouvertes sur la convergence des algorithmes

Problème pratique pour le modèle de corrosion

Echelles des différents paramètres

- ▶ taux de corrosion stable $\rho \sim 10^{-6}$ mm/h
- ▶ temps moyen de séjour dans l'ambiance 2 : $\lambda_2^{-1} = 131\,400$ h

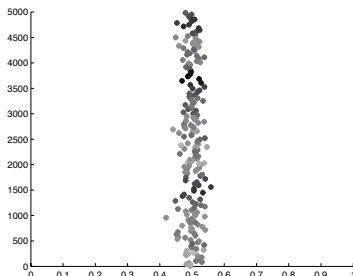
Problème pratique pour le modèle de corrosion

Echelles des différents paramètres

- ▶ taux de corrosion stable $\rho \sim 10^{-6}$ mm/h
- ▶ temps moyen de séjour dans l'ambiance 2 : $\lambda_2^{-1} = 131\,400$ h

Loi uniforme sur
 $[0, 1] \times [0, 5000]$

algorithme standard



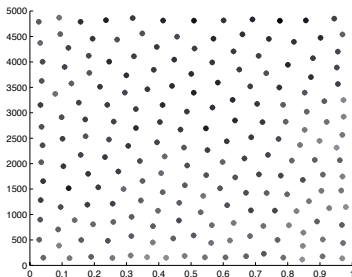
Problème pratique pour le modèle de corrosion

Echelles des différents paramètres

- ▶ taux de corrosion stable $\rho \sim 10^{-6}$ mm/h
- ▶ temps moyen de séjour dans l'ambiance 2 : $\lambda_2^{-1} = 131\,400$ h

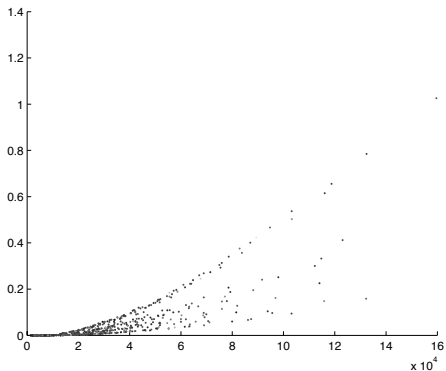
Loi uniforme sur
 $[0, 1] \times [0, 5000]$

algorithme pondéré



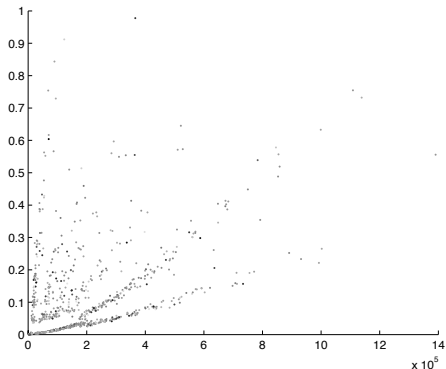
Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 2 après le 1er saut



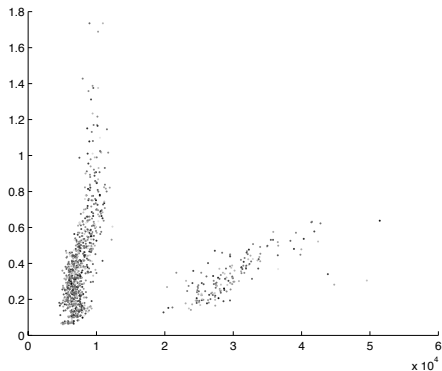
Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 3 après le 2ème saut



Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 1 après le 15ème saut



Mise en œuvre de notre stratégie

- ▶ Remplacer (Z_n, T_n) par son approximation **quantifiée** (\hat{Z}_n, \hat{T}_n)
- ▶ Prouver la convergence de la méthode sous des hypothèses lipschitz [Brandejsky, dS, Dufour 2012]

Points difficiles

- ▶ si $Z_k \in U$, on n'a pas forcément $\hat{Z}_k \in U \implies$ hypothèse de **convexité** sur U
- ▶ besoin de contrôler la probabilité de sauter près de la frontière de U
- ▶ dénominateur dans la relation de récurrence

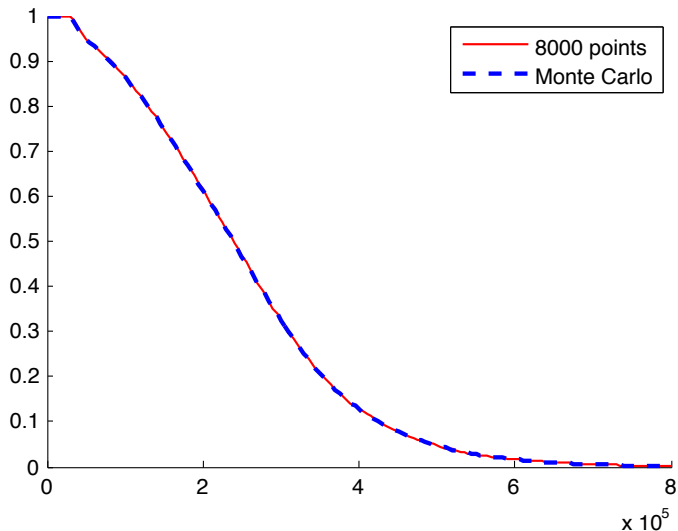
Résultats numériques : modèle de corrosion

$U = [0, 0.2]mm$, τ =durée de service de la structure

Grilles de quantification	max de l'erreur
20 points	0.1041
50 points	0.0664
100 points	0.0447
200 points	0.0335
500 points	0.0112
1000 points	0.0091
2000 points	0.0058
4000 points	0.0039
6000 points	0.0028
8000 points	0.0024
10000 points	0.0023

Résultats numériques : modèle de corrosion

$U = [0, 0.2]mm$, τ = durée de service de la structure



Plan de l'exposé

Introduction

Temps de sortie et durée de service

Arrêt optimal

- Formulation du problème

- Résultats théoriques

- Résultats numériques

Extensions

Motivation : maintenance préventive

Machine pouvant tomber en panne

Problème de maintenance

Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

Motivation : maintenance préventive

Machine pouvant tomber en panne

Problème de maintenance

Trouver un **équilibre** optimal entre

- ▶ changer les pièces trop tôt/souvent
- ▶ ne rien faire jusqu'à la panne totale

Problème mathématique

- ▶ arrêt optimal
- ▶ contrôle impulsionnel

Problème d'arrêt optimal

- ▶ Fonction de performance g
- ▶ Horizon aléatoire : N -ème temps de saut T_N du PDMP
- ▶ \mathcal{M}_N ensemble des temps d'arrêt $\tau \leq T_N$

Problème d'arrêt optimal

- ▶ calculer la fonction valeur

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- ▶ trouver un temps d'arrêt (ε) -optimal τ^* qui atteint $V(x)(-\varepsilon)$

Écriture récursive des fonctions

[Gugerli,1986]

Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶ $v_N = g$
- ▶ $v_n = L(v_{n+1}, g)$ pour $n \leq N - 1$

$$v_0(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V(x)$$

$L(w, g)(x)$

$$= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[w(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n = x \right] \right\}$$

$$\vee \mathbb{E} [w(Z_{n+1}) \mid Z_n = x]$$

Construction itérative de variables aléatoires

Equation de programmation dynamique rétrograde

- ▶ $v_N(Z_N) = g(Z_N)$
- ▶ $v_n(Z_n) = L(v_{n+1}, g)(Z_n)$ pour $n \leq N - 1$

$$v_0(Z_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

$$\begin{aligned} v_n(Z_n) &= L(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[v_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n \right] \right\} \\ &\quad \vee \mathbb{E} [v_{n+1}(Z_{n+1}) \mid Z_n] \end{aligned}$$

Discrétisation

Approximation de la fonction valeur

- ▶ $\widehat{v}_N(\widehat{Z}_N) = g(\widehat{Z}_N)$
- ▶ $\widehat{v}_n(\widehat{Z}_n) = \widehat{L}_d(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n)$ pour $n \leq N - 1$

$$\begin{aligned} & \widehat{L}_d(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ &= \max_{u \in G(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[v(\widehat{Z}_{n+1}) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \geq u\}} \mid \widehat{Z}_n \right] \right\} \\ & \quad \vee \mathbb{E} [v(Z_{n+1}) \mid \widehat{Z}_n] \end{aligned}$$

Vitesse de convergence

[dS, Dufour, Gonzalez 2009]

Théorème

Hypothèses de régularité **Lipschitz** sur ϕ , λ , Q , t^* et g

$$|v_0(x) - \hat{v}_0(x)| \leq C\sqrt{EQ}$$

C constante explicite,
 EQ erreur de quantification

$\sqrt{\cdot}$ due aux **indicatrices**

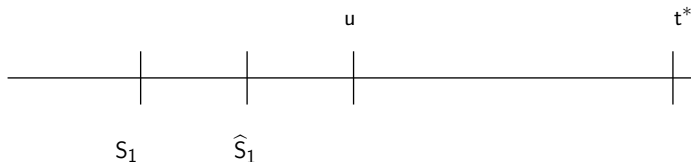
Indicatrices

Lemme

Soit η t.q. $\forall u \in G(\widehat{Z}_0)$, $u + \eta < t^*(\widehat{Z}_0)$

$$\left\| \max_{u \in G(\widehat{Z}_0)} \mathbf{E}_{\widehat{Z}_0} \left[\left| \mathbb{1}_{\{S_1 < u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_1 < u\}} \right| \right] \right\|_2 \leq \frac{1}{\eta} \|S_1 - \widehat{S}_1\|_2 + C\eta$$

Cas faciles



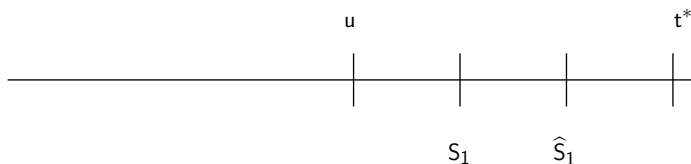
Indicatrices

Lemme

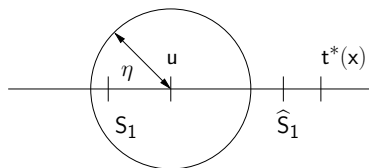
Soit η t.q. $\forall u \in G(\widehat{Z}_0)$, $u + \eta < t^*(\widehat{Z}_0)$

$$\left\| \max_{u \in G(\widehat{Z}_0)} \mathbf{E}_{\widehat{Z}_0} [|\mathbb{1}_{\{S_1 < u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_1 < u\}}|] \right\|_2 \leq \frac{1}{\eta} \|S_1 - \widehat{S}_1\|_2 + C\eta$$

Cas faciles



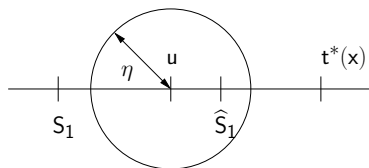
S_1 et \widehat{S}_1 sont de part et d'autre de u



$$|\mathbb{1}_{\{S_1 < u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_1 < u\}}| \leq \mathbb{1}_{\{|S_1 - u| \leq \eta\}} + \mathbb{1}_{\{|S_1 - \widehat{S}_1| > \eta\}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\widehat{Z}_0} [\mathbb{1}_{\{u-\eta \leq S_1 \leq u+\eta\}}] &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} [\mathbb{1}_{\{u-\eta \leq S_1 \leq u+\eta\}} \mid Z_0] \mid \widehat{Z}_0 \right] \\ &= \int_{u-\eta}^{u+\eta} \lambda(\phi(Z_0, u)) du \leq C\eta \end{aligned}$$

S_1 et \widehat{S}_1 sont de part et d'autre de u



$$|\mathbb{1}_{\{S_1 < u\}} - \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_1 < u\}}| \leq \mathbb{1}_{\{|S_1 - u| \leq \eta\}} + \mathbb{1}_{\{|S_1 - \widehat{S}_1| > \eta\}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\widehat{Z}_0} [\mathbb{1}_{\{u-\eta \leq S_1 \leq u+\eta\}}] &= \mathbf{E} \left[\mathbf{E} [\mathbb{1}_{\{u-\eta \leq S_1 \leq u+\eta\}} \mid Z_0] \mid \widehat{Z}_0 \right] \\ &= \int_{u-\eta}^{u+\eta} \lambda(\phi(Z_0, u)) du \leq C\eta \end{aligned}$$

Temps d'arrêt optimal

Règle d'arrêt calculable $\hat{\tau}$

- ▶ construction itérative **explicite**
- ▶ pas de calculs supplémentaires
- ▶ **vrai temps d'arrêt** pour la filtration du processus (X_t)

Théorème

Mêmes hypothèses

$$|v_0(x) - \mathbb{E}_x[g(X_{\hat{\tau}})]| \leq C_1 EV + C_2 \sqrt{EQ}$$

C_1, C_2 constantes explicites

EV erreur de la fonction valeur

EQ erreur de quantification

Autre approximation de la fonction valeur par **Monte Carlo**

Politique de maintenance pour le modèle de corrosion

Une seule intervention avant la rupture \Rightarrow remise à neuf de la structure

Optimisation de la maintenance : équilibre entre

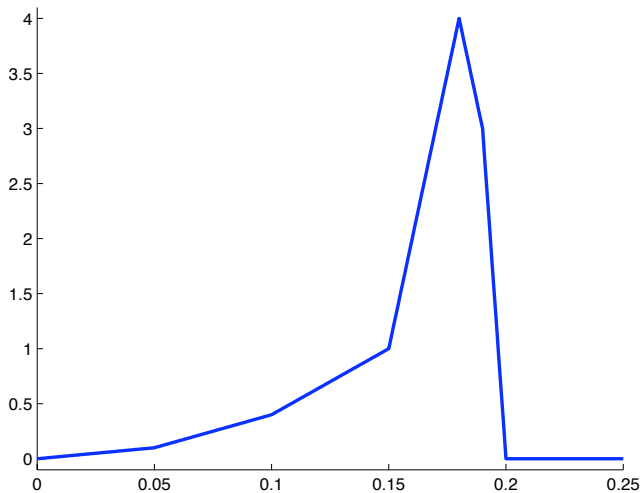
- ▶ une maintenance trop précoce **coûteux**
- ▶ une maintenance trop tardive **dangereux**

Optimisation des marges

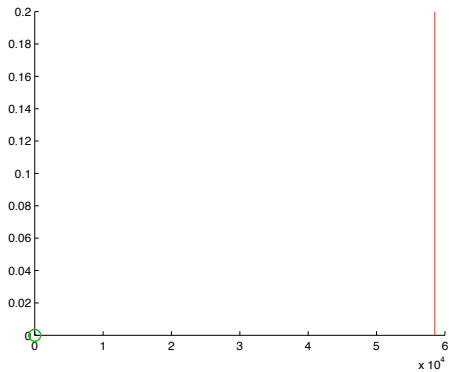
En phase de conception

- ▶ consolider les marges de dimensionnement par rapport aux spécifications
- ▶ assurer à 95% qu'aucune maintenance ne sera nécessaire avant la date objective contractuelle

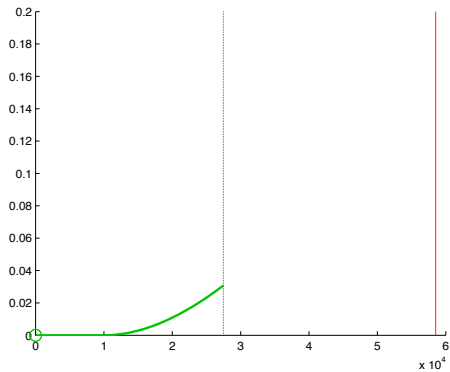
Fonction de performance



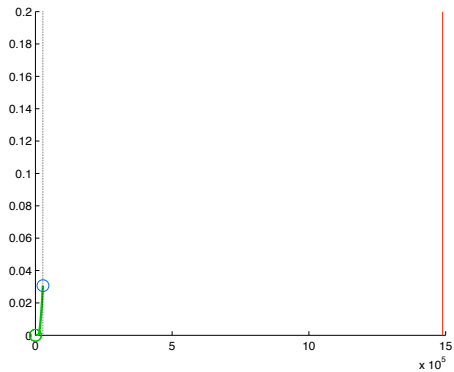
Règle d'arrêt itérative



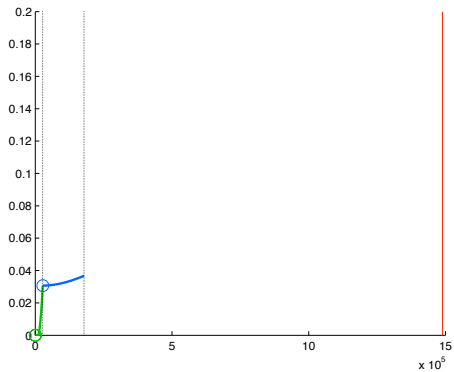
Règle d'arrêt itérative



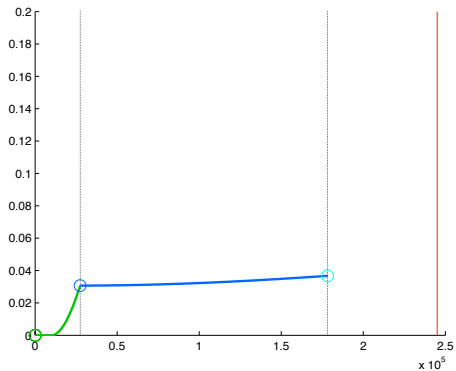
Règle d'arrêt itérative



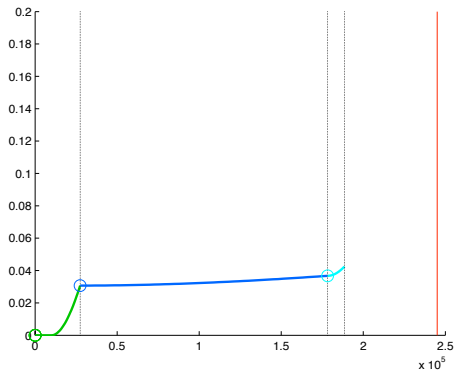
Règle d'arrêt itérative



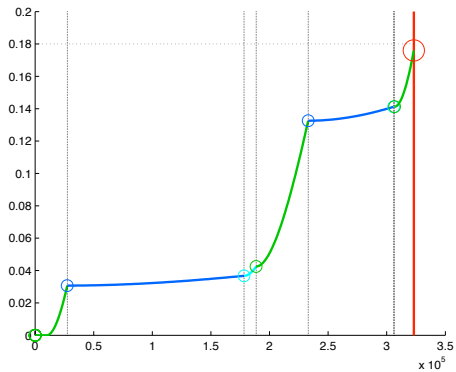
Règle d'arrêt itérative



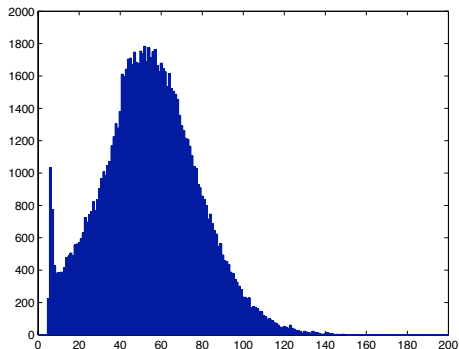
Règle d'arrêt itérative



Règle d'arrêt itérative



Optimisation des marges



Seuil	Probabilité
5 ans	0.0002
10 ans	0.0304
15 ans	0.0524
20 ans	0.0793
40 ans	0.2647
60 ans	0.6048
80 ans	0.8670
100 ans	0.9691
150 ans	0.9997

Calcul de la fonction valeur

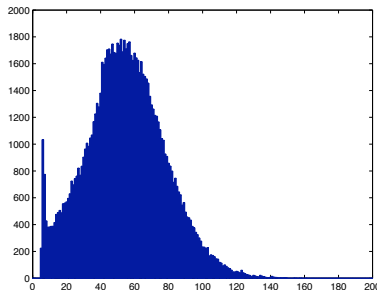
Résultats numériques (vraie valeur : 4)

Nombre de points dans les grilles de quantification	Fonction valeur approchée	Fonction valeur par Monte Carlo
10	2.48	0.94
50	2.70	1.84
100	2.94	2.10
200	3.09	2.63
500	3.39	3.15
1000	3.56	3.43
2000	3.70	3.60
5000	3.82	3.73
8000	3.86	3.75

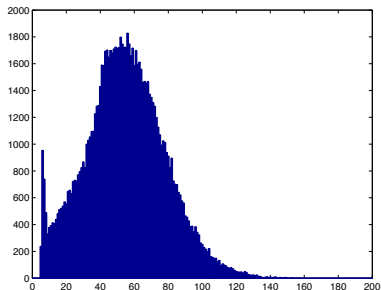
Comparaison avec Monte Carlo

[dS, Dufour, Zhang, Elegbede 2012]

Temps d'arrêt optimal $\tau^* = \inf\{t : d_t \geq 0.02\}$



temps d'arrêt approché



temps d'arrêt théorique

Plan de l'exposé

Introduction

Temps de sortie et durée de service

Arrêt optimal

Extensions

Méthodologie générale

Conclusion et perspectives

Stratégie numérique générale

Propriété

Toute quantité concernant la loi du processus peut s'exprimer uniquement à l'aide de la suite (Z_n, S_n) ou (Z_n, T_n)

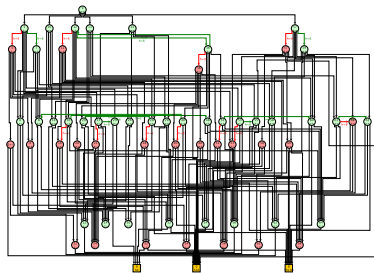
- ▶ trouver une expression (récursive) du problème en fonction de la suite (Z_n, S_n)
- ▶ **discrétiser** (Z_n, S_n) pour obtenir une approximation numérique

Autres résultats pour l'estimation de performance

- ▶ espérance de **fonctionnelles** de X_t dépendant du **temps**
[Brandejsky, dS, Dufour 2012b]
- ▶ moment de **temps de sortie** [Brandejsky, dS, Dufour 2012]

Autres résultats pour le contrôle

- ▶ arrêt optimal sur un cas test de réservoir (128 modes) [dS, Zhang 2013]



- ▶ arrêt optimal sous observation **partielle** [Brandejsky, dS, Dufour 2013]
- ▶ contrôle **impulsionnel** [dS, Dufour 2012]

Conclusion et perspectives

Avantages et inconvénients des méthodes numériques

- ▶ méthode utilisable en pratique
- ▶ temps de calcul on line/off line
- ▶ dimension

Perspectives

- ▶ stratégie optimale pour le contrôle impulsionnel
- ▶ méthodes numériques pour les MDP
- ▶ méthodes numériques pour les systèmes linéaires à sauts markoviens
- ▶ applications en biologie : modélisation, optimisation de traitement, . . .

Références

- [Bally, Pagès 03] A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems, Bernoulli
- [Brandejsky, dS, Dufour 2012] Numerical methods for the exit time of a piecewise deterministic Markov process, Adv. in Appl. Probab.
- [Brandejsky, dS, Dufour 2012b] Numerical method for expectations of piecewise deterministic Markov processes, CAMCoS
- [Brandejsky, dS, Dufour 2013] Optimal stopping for partially observed piecewise deterministic Markov processes, Stoch. Proc. Appl.
- [Costa Davis 88] Approximations for optimal stopping of a piecewise deterministic process, Math. Control Signals Systems
- [Costa Davis 89] Impulse control of piecewise-deterministic processes, Math. Control Signals Systems
- [Davis 93] Markov models and optimization, Chapman & Hall
- [dS, Dufour 2012] Numerical method for impulse control of piecewise deterministic Markov processes, Automatica
- [dS, Dufour, Gonzalez 2009] Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes, Ann. Appl. Probab.
- [dS, Dufour, Zhang, Elegbede 2012] Optimal stopping for the predictive maintenance of a structure subject to corrosion, J. of Risk and Reliability
- [dS, Zhang 2013] Predictive maintenance for the heated hold-up tank, Rel. Eng. & System Safety
- [Domic, Hoffmann, Krell, Robert 2012] Statistical estimation of a growth-fragmentation model observed on a genealogical tree, Arxiv 1210.3240
- [Génadot, Thieullen 2012] Averaging for a fully coupled piecewise-deterministic Markov process in infinite dimensions, Adv. in Appl. Probab.
- [Gugerli, 1986] Optimal stopping of a piecewise-deterministic Markov process, Stochastics
- [Jacobsen 06] Point process theory and applications: marked point and piecewise deterministic processes, Birkhäuser
- [Pagès 98] A space quantization method for numerical integration, J. Comput. Appl. Math.
- [Pakdaman, Thieullen, Wainrib 2010] Fluid limit theorems for stochastic hybrid systems with application to neuron models, Adv. in Appl. Probab.
- [Riedler, Thieullen, Wainrib 2012] Limit theorems for infinite-dimensional piecewise deterministic Markov processes. Applications to stochastic excitable membrane models, Electron. J. Probab.

