# Auto-Régressions à Régime Markovien

Benoîte de Saporta

# Plan de l'exposé

1. Introduction
2. Processus d'Ornstein Uhlenbeck à régime markovien
3. Discrétisations
4. Schéma de preuve

# Définition du modèle

Auto-régression à régime markovien :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$(a_n)$ est une (fonctionnelle d'une) chaîne de Markov

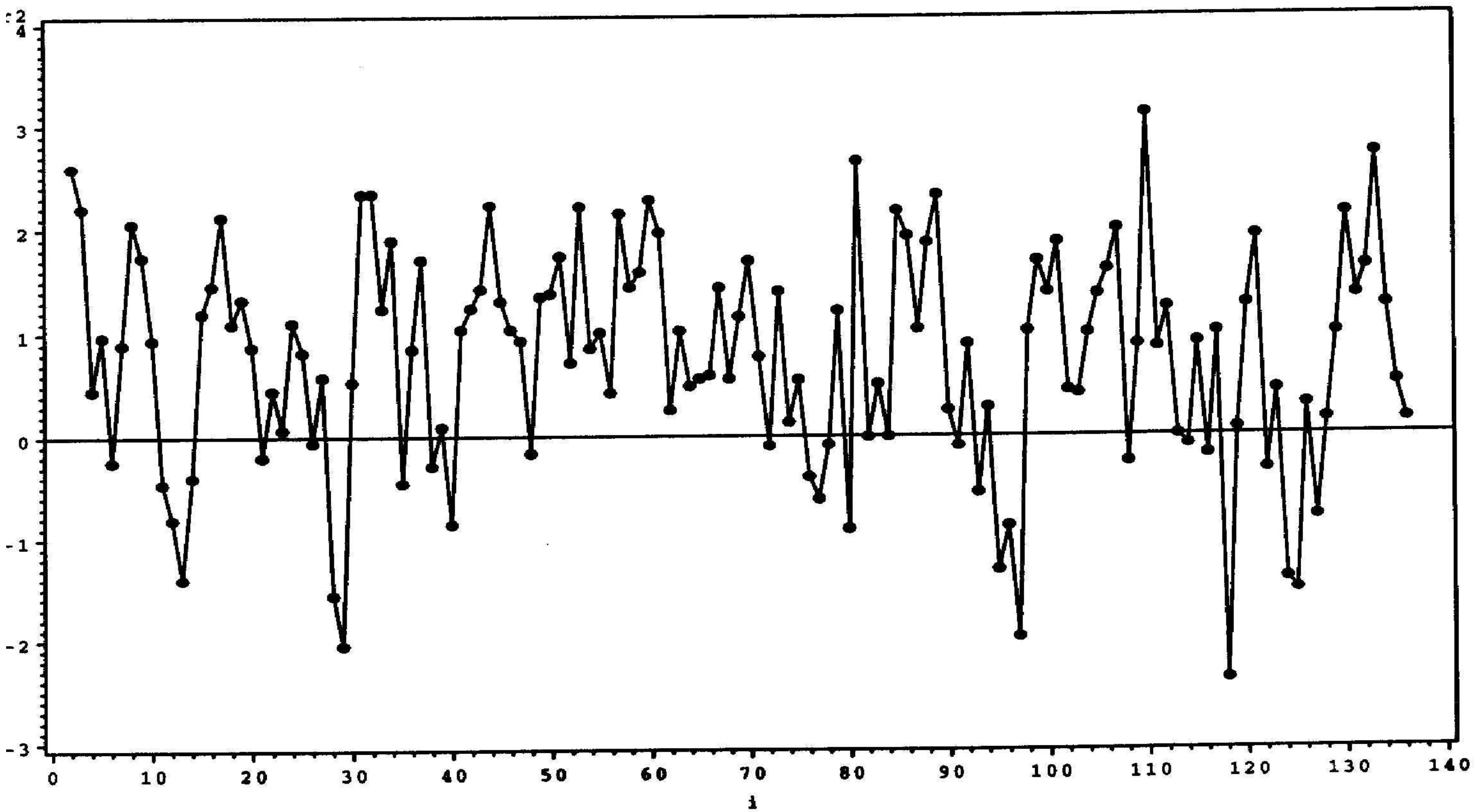
Séries chronologiques qui changent de régime au cours du temps

- séries macroéconomiques
- données climatiques

# Exemple de Hamilton 1

Exemple de HAMILTON 1989

PIB americain entre 1952 et 1984 : variation trimestrielle



# Exemple de Hamilton 2

Etude de la variation trimestrielle du PIB américain entre 1952 et 1984

- Modèle :

$$X_n = a_n(0) + a_n(1)X_{n-1} + \cdots + a_n(4)X_{n-4} + b_n$$

  - $X_n = 100 \log \frac{\mathrm{PIB}_n}{\mathrm{PIB}_{n-1}}$

  - $a_n = (a_n(j),\ j = 0, .., 4)$ chaîne de Markov à deux états

$$(909,\ 265,\ 29,\ -126,\ -110)/1000$$
$$(-420,\ 216,\ 628,\ -73,\ 97)/1000$$

  - Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.882 & 0.118 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

- Interprétation des états :
  1=croissance, 2=récession $\Longrightarrow$ Cycles économiques

# Solution stationnaire

BRANDT 1986, BOUGEROL et PICARD 1992 : si $(a_n, b_n)$ stationnaire, et

$$\alpha = \mathbb{E}[\log|a_0|] < 0, \qquad \mathbb{E}\log^+|b_0| < \infty,$$

Alors : unique solution stationnaire

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1}\cdots a_{n-k} b_{n-k-1},$$

- $\forall s > 0$,

$$\mathbb{E}|R_1|^s \leq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}|a_0 a_{-1}\cdots a_{-k+1}|^s \mathbb{E}|b_{-k}|^s \qquad \text{si } s < 1,$$

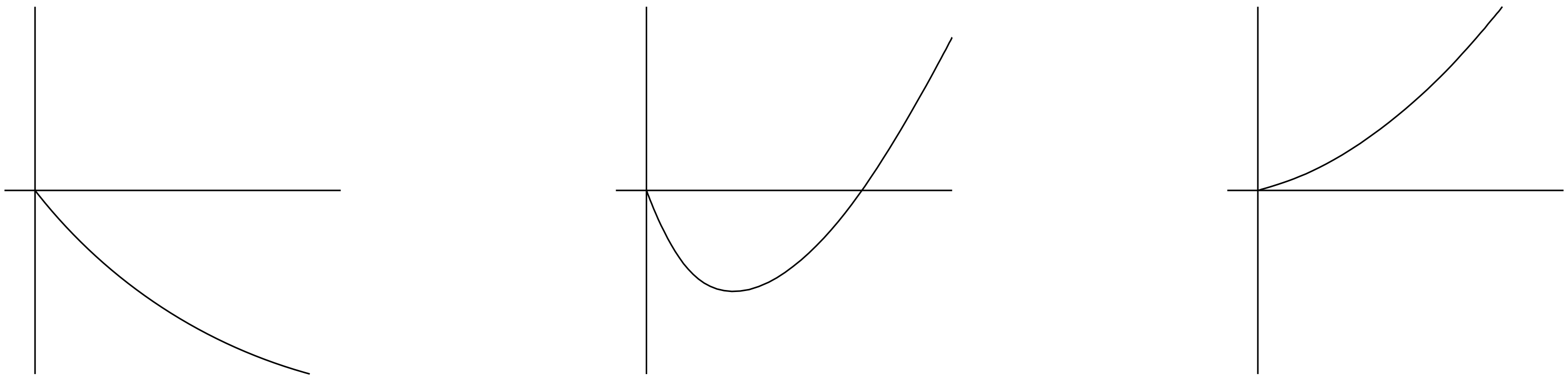
$$(\mathbb{E}|R_1|^s)^{1/s} \leq \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}|a_0 a_{-1}\cdots a_{-k+1}|^s)^{1/s} (\mathbb{E}|b_{-k}|^s)^{1/s} \qquad \text{si } s \geq 1.$$

- Si $b_0$ a des moments à tout ordre, $R$ a un moment d'ordre $s$ si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}|a_1 a_2 \cdots a_n|^s)^{1/n} < 1$$

$s \longmapsto \log k(s)$ est convexe

3 cas possibles :



# Références

KESTEN 1973, 1974 : $(a_n, b_n)$ iid, dimension d, matrices positives
LE PAGE 1983 : $(a_n, b_n)$ iid, dimension d, matrices quelconques
GOLDIE 1991 : $(a_n, b_n)$ iid, dimension 1

- $\mathbb{E}|R_1^s| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

Résultat analogue pour les AR à régime markovien.

# O-U Markovien

1. Introduction
2. Processus d'Ornstein Uhlenbeck à régime markovien
3. Discrétisations
4. Schéma de preuve

# Le modèle

- $X$ processus Markovien de saut ergodique.
  - espace d'états $E = \{1, \cdots, N\}$, $N > 1$,
  - fonction d'intensité $\lambda > 0$ sur $E$
  - noyau $Q = (q_{ij})$ irréductible, à diagonale nulle
  - loi stationnaire $\mu$
  - $P_t$ semi-groupe Markovien associé : $\forall i, j$, et pour $h$ petit,

$$\mathbb{P}(X_h = j \mid X_0 = i) = P_h(i,j) = \begin{cases} \lambda(i)q(i,j)h + o(h) & \text{si } j \neq i, \\ 1 - \lambda(i)h + o(h) & \text{si } j = i. \end{cases}$$

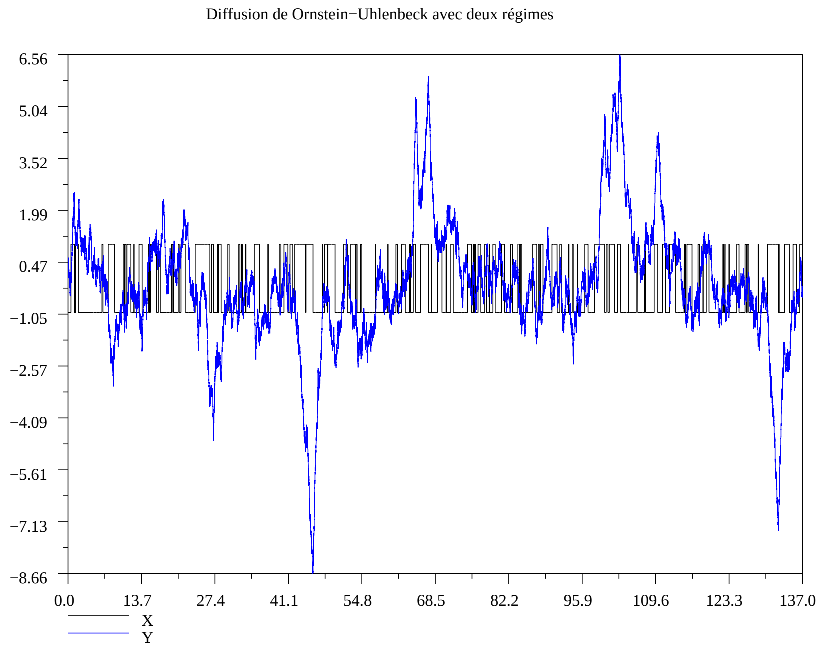
- $W$ mouvement brownien standard indépendant de $X$, $(\mathcal{F}_t)$ filtration associée

- Processus d'Ornstein Uhlenbeck à régime markovien

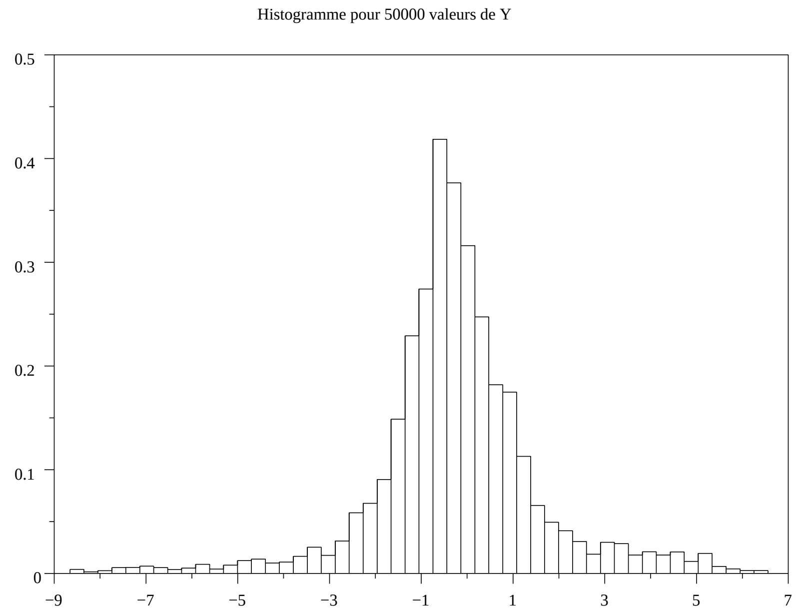
$$\begin{cases} Y_0 \ \ \mathcal{F}_0 - \text{mesurable}, \\ dY_t = e(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t. \end{cases}$$

# Exemple à 2 régimes

- $(e(1), e(2)) = (-1, 1)$
- $(\lambda(1), \lambda(2)) = (1, 2)$
- $\sigma(1) = \sigma(2) = 1$




Une trajectoire de $X_t$ et $Y_t$.




Histogramme de 50000 valeurs de $Y$.

# Ergodicité

- Ornstein Uhlenbeck standard

$$dY_t = eY_t dt + \sigma dW_t.$$

Si $e < 0$, loi stationnaire $\mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{2|e|})$.

- Ornstein Uhlenbeck à régime markovien

Guyon, Iovleff, Yao 2004

Si

$$\alpha = \mathbb{E}_\mu[e(X_t)] = \sum_{i \in E} e(i)\mu(i) < 0,$$

alors $Y$ a une unique loi stationnaire $\nu$.

**Théorème** S. ET YAO, AAP 2005

*Si* $\forall\ i$, $e(i) \leq 0$, *alors* $\forall\ s > 0$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^s \nu(dx) < \infty.$$

*Si* $\exists\ i$ *tel que* $e(i) > 0$, *alors* $\exists\ \kappa > 0$ *et* $L > 0$ *:*

$$\begin{aligned} t^{\kappa}\nu(]t,+\infty[) &\xrightarrow[t\to+\infty]{} L, \\ t^{\kappa}\nu(]-\infty,-t[) &\xrightarrow[t\to+\infty]{} L. \end{aligned}$$

## Caractérisation de $\kappa$

Cas polynômial :

$$s_1 = \min \left\{ \frac{\lambda(i)}{e(i)} \;\middle|\; e(i) > 0 \right\}.$$

Pour $0 \leq s < s_1$,

$$(M_s)_{ij} = \frac{q(i,j)\lambda(i)}{\lambda(i) - se(i)}.$$

**Proposition** *$\kappa$ est l'unique $0 < s < s_1$ tel que*

$$\rho(M_s) = 1.$$

*($\rho$ désigne le rayon spectral)*

# Exemple à 2 régimes

- $E = \{1, 2\}$,
- $e(1) > 0$ ou $e(2) > 0$,
- noyau :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

- loi invariante :

$$\mu = \left(\frac{\lambda(2)}{\lambda(1)+\lambda(2)}, \frac{\lambda(1)}{\lambda(1)+\lambda(2)}\right),$$

- Condition d'ergodicité :

$$\lambda(1)e(2) + \lambda(2)e(1) < 0.$$

# Exemple à 2 régimes

Soit $r_i = \frac{e(i)}{\lambda(i)}$.
On a $r_1 + r_2 < 0$, $r_1 r_2 > 0$, et $s_1 = \max\{r_1^{-1}, r_2^{-1}\}$.

$$M_s = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{1-sr_1} \\ \frac{1}{1-sr_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Rayon spectral

$$\rho(M_s) = \left[(1 - sr_1)(1 - sr_2)\right]^{-1/2}.$$

Il vaut 1 pour

$$s = \kappa = r_1^{-1} + r_2^{-1} = \frac{\lambda(2)}{e(2)} + \frac{\lambda(1)}{e(1)}.$$

# Discrétisations

1. Introduction
2. Processus d'Ornstein Uhlenbeck à régime markovien
3. Discrétisations
4. Schéma de preuve

# Forme explicite de $Y_t$

Rappel : $dY_t = e(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t)dW_t$.

$$a(s,t) = a_{s,t} = \exp \int_s^t e(X_u)du, \qquad \forall 0 \leq s \leq t.$$

Alors $\forall 0 \leq s \leq t$, $Y$ satisfait l'équation récursive aléatoire :

$$\begin{aligned} Y_t &= a(s,t)\Big[Y_s + \int_s^t a(s,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u\Big] \\ &= a_{s,t}Y_s + V_{s,t}^{1/2}\xi_{s,t}, \end{aligned}$$

avec $\xi_{s,t} \sim \mathcal{N}(0,1)$ dépendant uniquement de $(W_u)$, $s \leq u \leq t$, et

$$V_{s,t} = \int_s^t \exp\Big[2\int_u^t e(X_v)dv\Big]\sigma^2(X_u)du.$$

$\forall\delta > 0$, la discrétisation de pas $\delta$ de $Y$ est le processus $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta})_{n\in\mathbb{N}}$.

$\forall\delta > 0$, $Y^{(\delta)}$ vérifie

$$Y_{(n+1)\delta} = a_n Y_{n\delta} + V_n^{1/2}\xi_{n+1},$$

avec

$$\left\{\begin{array}{lllll} a_n & = & a_n(\delta) & = & \exp\left[\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} e(X_u)du\right], \\ V_n & = & V_n(\delta) & = & \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \exp\left[2\int_u^{(n+1)\delta} e(X_v)dv\right]\sigma^2(X_u)du, \end{array}\right.$$

et $(\xi_n)$ iid $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de $(a_n, V_n)$.

# Solution stationnaire

**Proposition** *Si* $\alpha < 0$, $\forall \delta > 0$, *l'auto-régression satisfaite par* $Y^{(\delta)}$ *a une unique solution stationnaire* $(\widetilde{Y}_{n\delta})$ *avec :*

$$\widetilde{Y}_{n\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_{n-k}V_{n-k-1}^{1/2}\xi_{n-k-1}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

*De plus,* $\forall \delta > 0$, $\widetilde{Y}_{n\delta} \sim \nu$.

# Un opérateur auxiliaire

$s \geq 0$ et $\delta > 0$ fixés

$$A_{(s,\delta)}\varphi(i) = \mathbb{E}_i[a_0^s(\delta)\varphi(X_\delta)] = \sum_{j=1}^{N} \mathbb{E}_i[a_0^s \mathbb{1}_{X_\delta = j}]\varphi(j),$$

$\forall \varphi : E \to \mathbb{R}$ et $i$ dans $E$.

Propriétés : $\forall s, \delta, \gamma$,

- $A_{(s,\delta)}$ est une matrice positive, irréductible et apériodique.
- Semi-groupe :

$$A_{(s,\delta)}A_{(s,\gamma)} = A_{(s,\delta+\gamma)}.$$

- Rayon spectral

$$\rho(A_{(s,\delta)}) = \lim_{k\to\infty} \left(\mathbb{E}_\mu[(a_1 \cdots a_k)^s]\right)^{1/k}.$$

# Caractérisation des deux cas

- Choix de $\delta$ indifférent : $s \geq 0$ fixé,

$$\exists \delta \text{ tel que } \rho(A_{(s,\delta)}) < 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall \delta, \quad \rho(A_{(s,\delta)}) < 1,$$

  de même pour $> 1$ et $= 1$.

- Caractérisation des deux cas :

$$\forall i \in E, \quad e(i) \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall s > 0, \quad \rho(A_s) < 1.$$

- Moments de la loi stationnaire : GUYON, IOVLEFF, YAO 2004
  Si $\rho(A_s) < 1$, alors $\nu$ a un moment d'ordre $s$

# Preuve

1. Introduction
2. Processus d'Ornstein Uhlenbeck à régime markovien
3. Discrétisations
4. Schéma de preuve

# Preuve 1

Solution stationnaire $(R_n)$ de loi $\nu$ avec

$$R_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1} b_{-k}.$$

On cherche

$$\lim_{t \to +\infty} t^\kappa \nu(]t, +\infty) = \lim_{t \to +\infty} t^\kappa \mathbb{P}_\mu(R_1 > t).$$

- Régularisation :

$$Z_i(t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}_\mu(R_1 > u,\ X_1 = i) du.$$

# Preuve 2

- Auto-régression, stationnarité et propriété de Markov $\Longrightarrow$ système d'équations de renouvellement

$$Z_i(t) = \sum_{j=1}^{N} F_{ij} * Z_j(t) + G_i(t)$$

avec

$$F_{ij}(t) = \mathbb{E}_j[a_0^\kappa \mathbb{1}_{X_1=i} \mathbb{1}_{t \geq \log a_0}].$$

$$G_i(t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa [\mathbb{P}_\mu(R_1 > u, X_1 = i) - \mathbb{P}_\mu(a_0 R_0 > u, X_1 = i)] du.$$

- Théorie du renouvellement adaptée
- Etude de la limite.