

Auto-régressions à régime markovien

Benoîte de Saporta

Université Montesquieu Bordeaux IV – GRAPE et MAB

Séminaire de Probabilités et Statistiques
Pau 17 octobre 2006



- 1 Introduction : les auto-regressions
- 2 Régime markovien
- 3 Renouvellement
- 4 Preuve
- 5 Autres résultats



3/39

Benoîte de Saporta

Introduction

Régime markovien

Renouvellement

Preuve

Autres résultats

- 1 Introduction : les auto-regressions
- 2 Régime markovien
- 3 Renouvellement
- 4 Preuve
- 5 Autres résultats

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

(a_n, b_n) variables aléatoires.

Modélisation :

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), ARMA, GARCH...

Brandt 1986, Bougerol et Picard 1992

Si (a_n, b_n) stationnaire,

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \mathbb{E} [\log \|a_1 \cdots a_n\|] < 0,$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|b_0\| < \infty,$$

\implies unique solution stationnaire

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1} \cdots a_{n-k} b_{n-k-1},$$

Si (a_n) indépendante de (b_n) , et b_0 a des moments à tout ordre

- $\forall 0 < s < 1,$

$$\mathbb{E}\|R_1\|^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s \mathbb{E}\|b_{-k}\|^s,$$

- $\forall s \geq 1,$

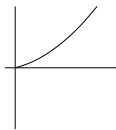
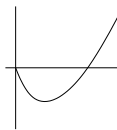
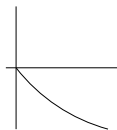
$$(\mathbb{E}\|R_1\|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|b_{-k}\|^s)^{1/s}.$$

Alors R a un moment d'ordre s si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_n\|^s)^{1/n} < 1.$$

$s \mapsto \log k(s) = \log \lim_n (\mathbb{E} \|a_1 a_2 \cdots a_n\|^s)^{1/n}$ est convexe

3 cas possibles :



Si (a_n, b_n) iid

Kesten 1973, 1974 : dimension d , matrices positives

Le Page 1983 : dimension d , matrices quelconques

Goldie 1991 : dimension 1

- $\mathbb{E}\|R_1^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R_1\| > t) \sim Ct^{-\kappa}.$$

- (a_n, b_n) iid
- $\exists \kappa > 0$ vérifiant

$$\mathbb{E}|a_0|^\kappa = 1, \quad \mathbb{E}[|a_0|^\kappa \log^+ |a_0|] < \infty, \quad \mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty,$$

- Stationnarité : $\mathbb{E} \log |a_1| < 0$
- loi conditionnelle de $\log |a_0|$ sachant $(a_0 \neq 0)$
non-arithmétique

Goldie, 1991

- Si $a_0 \geq 0$,

$$t^{\kappa} \mathbb{P}(R_1 > t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} C_+, \quad t^{\kappa} \mathbb{P}(R_1 < -t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} C_-,$$

$C_+ \geq 0$ et $C_- \geq 0$ constantes.

- Si $\mathbb{P}(a_0 < 0) > 0$, mêmes limites les limites avec $C_+ = C_- \geq 0$.
- Dans les deux cas, $C_+ + C_- > 0$ ssi $\mathbb{P}(b_0 = (1 - a_0)x) < 1$.



11 / 39

Benoîte de Saporta

Introduction

Régime markovien

Renouvellement

Preuve

Autres résultats

- 1 Introduction : les auto-regressions
- 2 Régime markovien**
- 3 Renouvellement
- 4 Preuve
- 5 Autres résultats

Auto-régression à **régime markovien** :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

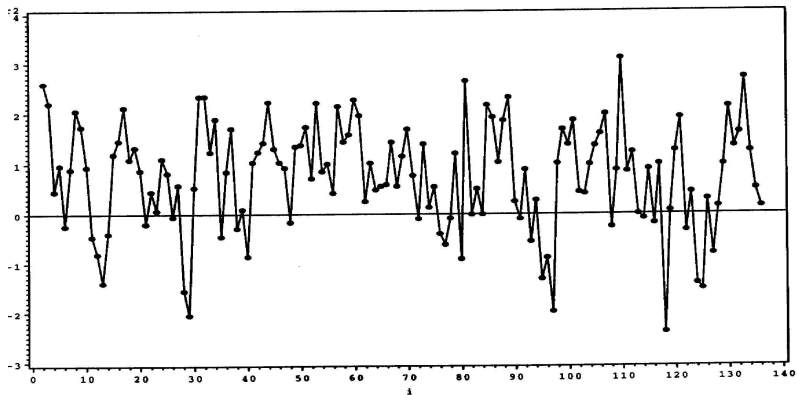
(a_n) est une chaîne de Markov

Séries chronologiques qui changent de régime au cours du temps

- séries économiques
- données climatiques

Exemple de HAMILTON 1989

PIB américain entre 1952 et 1984 : variation trimestrielle



$$X_n = a_n(0) + a_n(1)X_{n-1} + \cdots + a_n(4)X_{n-4} + b_n$$

- $X_n = 100 \log \frac{\text{PIB}_n}{\text{PIB}_{n-1}}$
- $a_n = (a_n(j), j = 0, \dots, 4)$ chaîne de Markov à deux états

$$(909, 265, 29, -126, -110)/1000$$

$$(-420, 216, 628, -73, 97)/1000$$

- Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.882 & 0.118 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

Interprétation des états

1=croissance, 2=récession \implies Cycles économiques

Processus auto-régressif à régime markovien scalaire :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

- (a_n) : chaîne de Markov **irréductible**, **apériodique**, **stationnaire** sur $E = \{e_1, \dots, e_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$, matrice de transition $P = (p_{ij})$, loi stationnaire μ .
- (b_n) **i.i.d.** non nulles, indépendantes de (a_n)
- $\mathbb{E} \log(a_0) = \sum \log(e_i) \mu(e_i) < 0$ et $\mathbb{E} \log^+(b_0) < \infty$
unique solution stationnaire :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_{n-k} b_{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Théorème (SPA 2005)

- $\exists \kappa > 0$ tel que $P_\kappa = \text{diag}(e_i^\kappa)^t P$ soit de rayon spectral **1**,
- les $\log e_i$ ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre,
- $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty$,

alors pour $x \in \{-1, 1\}$:

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} L(x),$$

où $L(1) + L(-1) > 0$.

- 2 états : $E = \{e_1, e_2\}$
- matrice de transition $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{pmatrix}$, $p < 1$, $q < 1$ et $p + q \neq 0$
- loi invariante : $\mu = \frac{1}{2-p-q}(1-q, 1-p)$
- Condition de stationnarité : $|e_1|^{1-q}|e_2|^{1-p} < 1$
- Calcul du rayon spectral

$$P_s = \begin{pmatrix} |e_1|^s p & |e_1|^s (1-q) \\ |e_2|^s (1-p) & |e_2|^s q \end{pmatrix}$$

Rayon spectral : $\rho_s = \frac{|e_1|^s p + |e_2|^s q + \sqrt{\Delta_s}}{2}$, avec

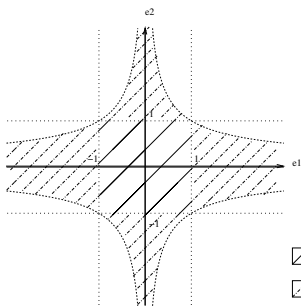
$$\Delta_s = |e_1|^{2s} p^2 + |e_2|^{2s} q^2 + 2|e_1 e_2|^s (pq - 2p - 2q + 2)$$

moment à tout ordre si :

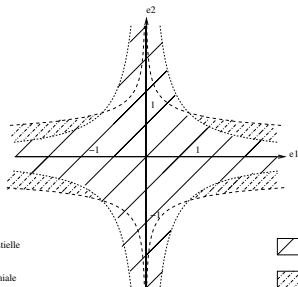
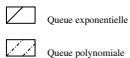
- $|e_1| \leq 1$ et $|e_2| \leq 1$,
- $p = 0$ et $1 < |e_1| \leq |e_2|^{-1}$,
- $q = 0$ et $1 < |e_2| \leq |e_1|^{-1}$.

queue polynômiale si :

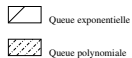
- $|e_1| > 1$ et $p \neq 0$,
- $p = 0$ et $|e_2|^{-1} < |e_1| < |e_2|^{-1/1-q}$,
- $|e_2| > 1$ et $q \neq 0$,
- $q = 0$ et $|e_1|^{-1} < |e_2| < |e_1|^{-1/1-p}$.



$$p = 0.5, q = 0.7$$



$$p = 0, q = 0.7$$



LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

$$z(x, t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u) du.$$

$z(x, t) = \sum_{i=1}^p Z_i(x, t)$, où :

$$\begin{aligned} Z_i(x, t) &= e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) du \\ &= e^{-t} \int_0^{e^t} u^\kappa \mathbb{P}(xe_i R_0 > u, a_0 = e_i) du + G_i(x, t). \end{aligned}$$

Changement de variable

$$Z_i(x, t) = e^{-(t - \log e_i)} e_i^\kappa \int_0^{e^{t - \log e_i}} u^\kappa \mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) du + G_i(x, t).$$

Propriété de Markov

$$\mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) = \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(xR_0 > u, a_{-1} = e_j) p_{ji}.$$

Stationnarité

$$\mathbb{P}(xR_0 > u, a_0 = e_i) = \sum_{j=1}^p \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_j) p_{ji}.$$

On obtient le système :

$$\begin{aligned} Z_i(x, t) &= e_i^\kappa \sum_{j=1}^p \left[p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \right] + G_i(x, t) \\ &= \sum_{j=1}^p \int Z_j(x, t - u) F_{ij}(du) + G_i(x, t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^\kappa p_{ji} \mathbb{1}_{t \geq \log e_i},$$

$G_i(x, t)$

$$= e^{-t} \int_0^{e^t} \left(\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i) \right) du.$$



23/39

Benoîte de Saporta

Introduction

Régime markovien

Renouvellement

Preuve

Autres résultats

- 1 Introduction : les auto-regressions
- 2 Régime markovien
- 3 Renouvellement**
- 4 Preuve
- 5 Autres résultats

- $F = (F_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ fonctions de répartition
- $G = {}^t(G_1, \dots, G_p)$ fonctions réelles
- $Z = {}^t(Z_1, \dots, Z_p)$ fonctions réelles

$$Z_i(t) = G_i(t) + \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t-u) F_{ik}(du),$$

Théorie du renouvellement

comportement asymptotique de Z en $+\infty$

Références

- Feller, 1971 : $p = 1$, F_{11} probabilité
- Crump, 1970, Athreya et Rama Murthy 1976 : $p > 1$,
 $F_{ij} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

- Produit de convolution matriciel $F * H$:
 H matrice $p \times r$ de fonctions réelles mesurables

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} H_{kj}(t-u) F_{ik}(du).$$

- Espérance de F : $\Gamma = (\gamma_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ avec $\gamma_{ij} = \int u F_{ij}(du)$
- $F^{(0)}(t) = \text{diag}(\mathbf{1}_{t \geq 0}, \dots, \mathbf{1}_{t \geq 0})$
- $F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t)$
- Fonction de renouvellement $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$

F est arithmétique si

- pour tout $i \neq j$, F_{ij} est concentrée sur un ensemble de la forme $b_{ij} + \lambda_{ij}\mathbb{Z}$,
- pour tout i , F_{ii} est concentrée sur $\lambda_{ii}\mathbb{Z}$,
- les λ_{ij} sont multiple entiers d'un même nombre,

λ le plus grand de ces nombres,

- pour tous a_{ij} , a_{jk} , a_{ik} points d'accroissement de F_{ij} , F_{jk} et F_{ik} , $a_{ij} + a_{jk} - a_{ik}$ est un multiple entier de λ .

- Mesures finies :

$$\forall 1 \leq i, j \leq p, \quad F_{ij}(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} F_{ij}(t) < \infty.$$

- Transience :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad U(t) < \infty.$$

- $F(\infty)$ irréductible à puissances bornées en norme.
- Rayon spectral : $\rho(F(\infty)) = 1$.

m et u vecteurs propres de Perron-Frobenius

$$F(\infty)m = m, \quad {}^t u F(\infty) = {}^t u,$$

$$\sum_{i=1}^p m_i = 1, \quad \sum_{i=1}^p u_i m_i = 1.$$

Théorème (Ann IHP 2003)

- F non arithmétique
- espérance Γ existe

alors, $\gamma = tU\Gamma m > 0$ et

$$U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{m_i u_j}{\gamma} h.$$

- G directement Riemann intégrable
- $Z = U * G$ existe,

alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z_i(t) = \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^p \left[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u) du \right].$$

- Incréments de U **uniformément bornés**

$\implies \exists (t_n) \rightarrow +\infty$ et V_{ij} mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

- Identification des V_{ij}

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$ avec G_k continue à support compact
 $t_n \rightarrow +\infty$ dans l'équation de renouvellement
 solutions de $Z = F * Z$

$$V_{ij} = a_{ij} \ell$$

- Identification des coefficients de proportionnalité

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$ avec

$$G_k(t) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) \implies a_{ij} = cm_i u_j$$

$$G(t) = (F(\infty)\mathbb{1}_{t \geq 0} - F(t))m \implies c = \gamma^{-1}$$

- Incréments de U uniformément bornés

$\implies \exists (t_n) \rightarrow +\infty$ et V_{ij} mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

- Identification des V_{ij}

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$ avec G_k continue à support compact
 $t_n \rightarrow +\infty$ dans l'équation de renouvellement
 solutions de $Z = F * Z$

$$V_{ij} = a_{ij} \ell$$

- Identification des coefficients de proportionnalité

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$ avec

$$G_k(t) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) \implies a_{ij} = cm_i u_j$$

$$G(t) = (F(\infty)\mathbb{1}_{t \geq 0} - F(t))m \implies c = \gamma^{-1}$$

- Incréments de U uniformément bornés

$\implies \exists (t_n) \rightarrow +\infty$ et V_{ij} mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

- Identification des V_{ij}

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$ avec G_k continue à support compact
 $t_n \rightarrow +\infty$ dans l'équation de renouvellement
 solutions de $Z = F * Z$

$$V_{ij} = a_{ij} \ell$$

- Identification des coefficients de proportionnalité

$G = {}^t(0, \dots, G_k, \dots, 0)$ avec

$$G_k(t) = \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) \implies a_{ij} = cm_i u_j$$

$$G(t) = (F(\infty) \mathbb{1}_{t \geq 0} - F(t)) m \implies c = \gamma^{-1}$$



30/39

Benoîte de Saporta

Introduction

Régime markovien

Renouvellement

Preuve

Autres résultats

- 1 Introduction : les auto-regressions
- 2 Régime markovien
- 3 Renouvellement
- 4 Preuve**
- 5 Autres résultats

Rappel

$$Z_i(x, t) = \sum_{j=1}^p \int Z_j(x, t - u) F_{ij}(du) + G_i(x, t),$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^{\kappa} p_{ji} \mathbb{1}_{t \geq \log e_i},$$

$G_i(x, t)$

$$= e^{-t} \int_0^{e^t} u^{\kappa} \left(\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(xa_0R_0 > u, a_0 = e_i) \right) du.$$

- F_{ij} mesures finies, $F_{ij}(\infty) = e_i^\kappa p_{ji} = P_\kappa$ de rayon spectral 1.
- Espérance de F : $\Gamma_{ij} = e_i^\kappa p_{ji} \log e_i$.
- Les $\log(e_i)$ ne sont pas multiples entiers d'un même nombre, donc F **non arithmétique**.
- Finitude de U :

$$U_{ij}(t) = \sum F_{ij}^{(n)}(t) \leq e^{\frac{\kappa t}{2}} \sum (P_{\frac{\kappa}{2}})_{ij}^n$$

série convergente par convexité de $s \mapsto \log(\rho(P_s))$.

- $Z = U * G$: itérer l'équation de renouvellement, et $F^{(n)} * Z \rightarrow 0$
- G est **directement Riemann intégrable** : utiliser $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < +\infty$.

Théorème de renouvellement pour les systèmes :

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\gamma} \mathbb{P}(xR_1 > t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} z(x, t) \\
 &= \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^p Z_i(x, t) \\
 &= \frac{1}{\gamma} \sum_{j=1}^p \left[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x, s) ds \right].
 \end{aligned}$$

Problème

Limite non nulle ?

- Première étape :
Grincevicius 1980, Goldie 1991

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C \mathbb{P}(\sup_n a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

Inégalité de symétrisation de Lévy
Lemme de Feller Chung

- Deuxième étape :
Evaluer $\mathbb{P}(\sup_n a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon})$.

Marche aléatoire à pas markovien :

$$S_0 = 0, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \log(a_{1-k}) = \log(a_0 \cdots a_{1-n}).$$

Etude du processus d'échelle S_{τ_n} où :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 1 : S_n > 0\}, \\ \tau_n &= \inf\{k > \tau_{n-1} : S_k > S_{\tau_{n-1}}\}. \end{aligned}$$

Arjas et Speed 1973 + Renouvellement

$$\implies e^{\kappa t} \mathbb{P}(\max(S_n) > t) = e^{\kappa t} \mathbb{P}(\max(S_{\tau_n}) > t) \geq C > 0,$$

$C > 0$ constante explicite.



36/39

Benoîte de Saporta

Introduction

Régime markovien

Renouvellement

Preuve

Autres résultats

- 1 Introduction : les auto-regressions
- 2 Régime markovien
- 3 Renouvellement
- 4 Preuve
- 5 Autres résultats**

Résultats analogues :

- Indépendance conditionnelle entre (a_n) et (b_n) .
- les a_n changent de signe

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck à régime Markovien

$$dY_t = e(X_t) Y_t dt + \sigma(X_t) dW_t$$

S. et Yao, AAP 2005

ν loi stationnaire

- Si $\forall i, e(i) \leq 0$, alors $\forall s > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^s \nu(dx) < \infty.$$

- Si $\exists i$ tel que $e(i) > 0$, alors $\exists \kappa > 0$ et $L > 0$:

$$t^\kappa \nu(]t, +\infty[) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} L,$$

$$t^\kappa \nu(]-\infty, -t]) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} L.$$



39/39

Benoîte de
Saporta

Introduction

Régime
markovien

Renouvel-
lement

Preuve

Autres
résultats

- Chaîne à espace d'états fini dans les matrices positives

- Travaux de R. Stelzer : point de vue inverse