

Arrêt optimal et optimisation de la maintenance

Benoîte de Saporta

CQFD - Contrôle de Qualité et Fiabilité Dynamique

22 septembre 2011



Plan

- 1 Un problème de maintenance
- 2 Modélisation mathématique
- 3 Stratégie de résolution
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Plan

- 1 Un problème de maintenance
- 2 Modélisation mathématique
- 3 Stratégie de résolution
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

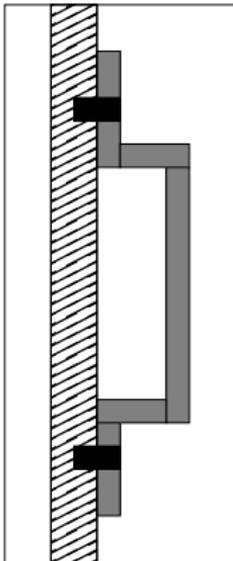
Maintenance d'une structure métallique

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion



Problème de corrosion

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion



- support pour les équipements du missile
- structure de petite taille : un seul point de mesure
- longue durée de vie → surveillance de la perte d'épaisseur par corrosion

Profil d'emploi

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

Profil d'emploi

Stockage dans 3 environnements différentes avec durées **aléatoires**

- 1 atelier
- 2 sous-marin nucléaire en mission
- 3 sous-marin en cale sèche

Exigence du sûreté très forte



Maîtriser l'évolution de l'épaisseur

Profil d'emploi

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

Profil d'emploi

Stockage dans 3 environnements différentes avec durées **aléatoires**

- 1 atelier
- 2 sous-marin nucléaire en mission
- 3 sous-marin en cale sèche

Exigence du sûreté très forte



Maîtriser l'évolution de l'épaisseur

Profil d'emploi

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

Profil d'emploi

Stockage dans 3 environnements différentes avec durées **aléatoires**

- 1 atelier
- 2 sous-marin nucléaire en mission
- 3 sous-marin en cale sèche

Exigence du sûreté très forte



Maîtriser l'évolution de l'épaisseur

Politique de Maintenance

Une seule intervention avant la rupture \Rightarrow remise à neuf de la structure

Optimisation de la maintenance : équilibre entre

- une maintenance trop précoce **coûteux**
- une maintenance trop tardive **dangereux**

Optimisation des marges

En phase de conception

- consolider les marges de dimensionnement par rapport aux spécifications
- assurer à 95% qu'aucune maintenance ne sera nécessaire avant la date objective contractuelle

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps aléatoire passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée aléatoire suivant une loi de Weibul
- Equation de la perte d'épaisseur dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable aléatoire suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \dots$
- Temps **aléatoire** passé dans l'environnement i loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée **aléatoire** suivant une loi de Weibul
- Equation de la **perte d'épaisseur** dans l'environnement i :

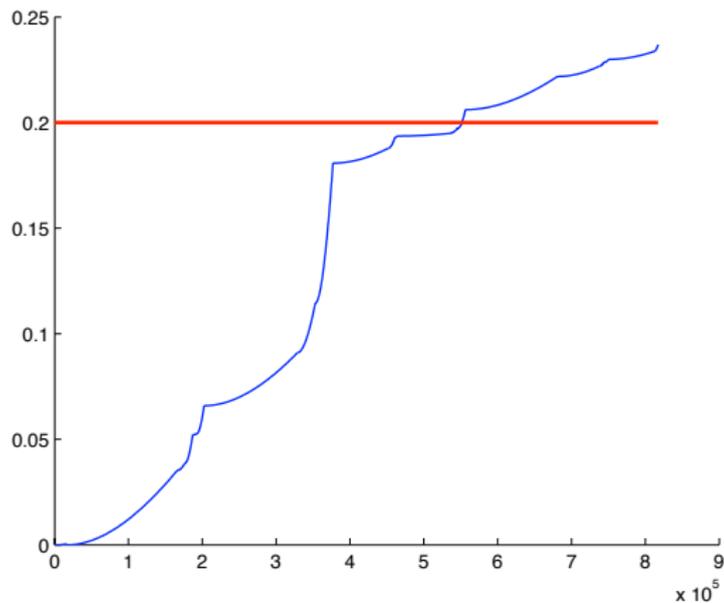
$$d_t = \rho_i \left(t - \eta_i + \eta_i \exp(-t/\eta_i) \right)$$

- ρ_i taux de corrosion stable **aléatoire** suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement i
- η_i durée de transition déterministe dans l'environnement i .

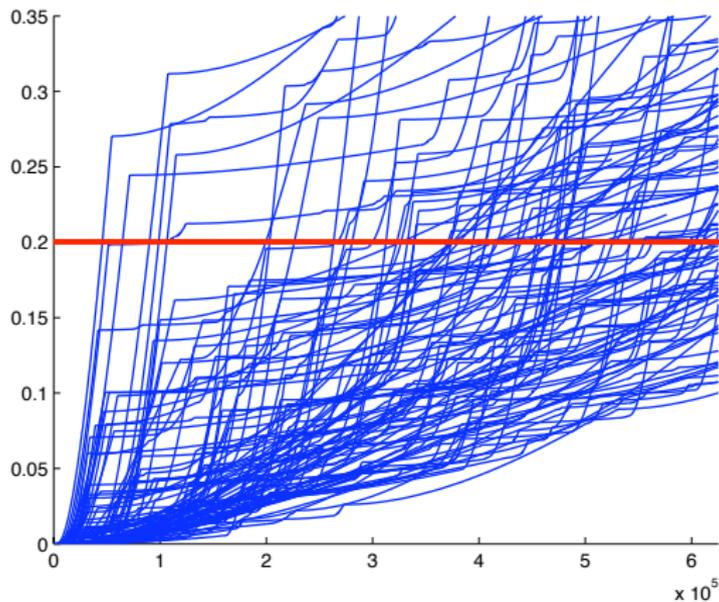
On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

Exemples de trajectoires simulées



Exemples de trajectoires simulées



Plan

- 1 Un problème de maintenance
- 2 Modélisation mathématique**
- 3 Stratégie de résolution
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Processus markoviens déterministes par morceaux

Davis (80's)

Classe générale de processus **hybrides**

- une variable **discrète** mode de fonctionnement ou environnement
- variables **continues** grandeurs physiques : épaisseur, pression, température. . .

Trajectoire **déterministe** avec des sauts **aléatoires**.

Applications

biologie, trafic internet, fiabilité dynamique. . .

Dynamique

Processus hybride $X_t = (m_t, y_t)$

- mode **discret** $m_t \in \{1, 2, \dots, p\}$
- variables d'état **continues** $y_t \in \mathbb{R}^d$

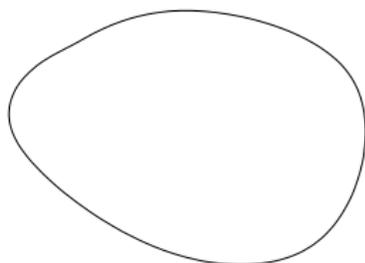
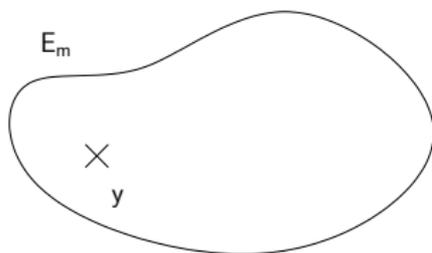
Caractéristiques locales dans le mode m

- **Flot** $\phi_m: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ mouvement déterministe entre les sauts
- **Intensité** $\lambda_m: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ intensité des sauts aléatoires
- **Noyau markovien** Q_m sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ sélectionne la nouvelle position après les sauts

Construction itérative

Point de départ

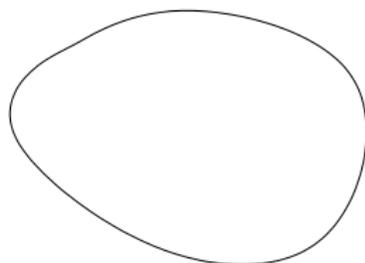
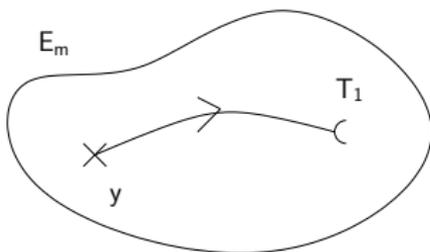
$$X_0 = Z_0 = (m, y)$$



Construction itérative

X_t suit le **flot déterministe**

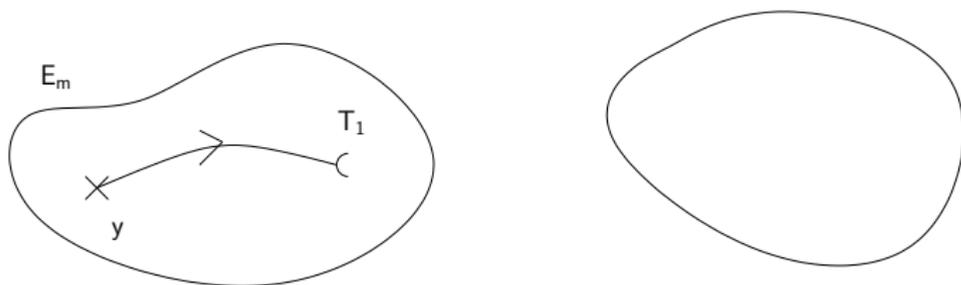
$$X_t = (m, \phi_m(y, t)), \quad t < T_1$$



Construction itérative

X_t suit le flot déterministe jusqu'au premier temps de saut $T_1 = S_1$

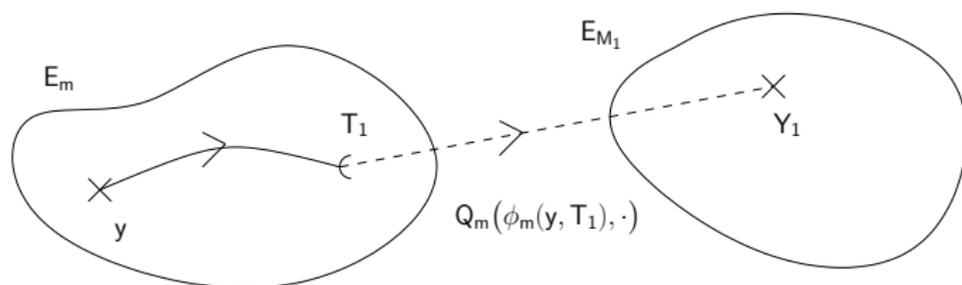
$$\mathbb{P}_{m,y}(T_1 > t) = \exp\left(-\int_0^{t \wedge t^*(m,y)} \lambda(\phi_m(y, s)) ds\right) \mathbf{1}_{\{t \leq t^*(m,y)\}}$$



Construction itérative

Position après saut $Z_1 = (M_1, Y_1)$ tirée suivant la loi

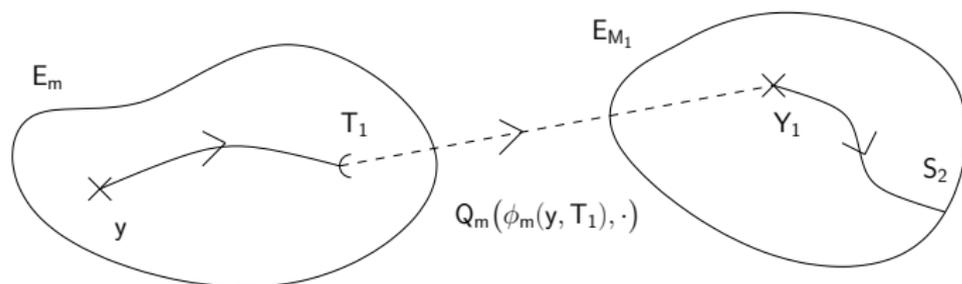
$$Q_m(\phi_m(y, T_1), \cdot)$$



Construction itérative

X_t suit le flot jusqu'au deuxième temps de saut $T_2 = T_1 + S_2$

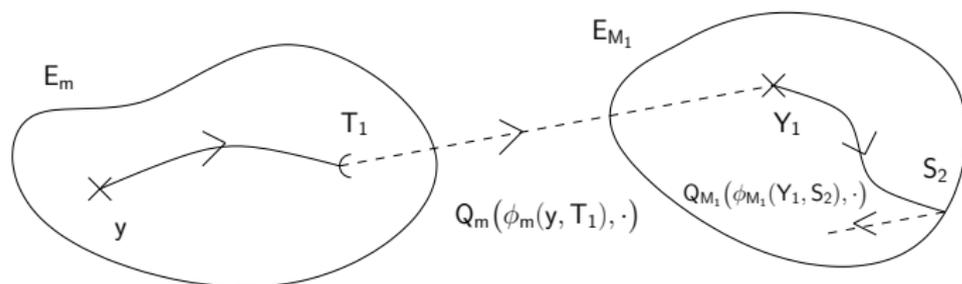
$$X_{T_1+t} = (M_1, \phi_{M_1}(Y_1, t)), \quad t < S_2$$



Construction itérative

Position après saut $Z_2 = (M_2, Y_2)$ tirée suivant la loi

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) \dots$$



Chaîne de Markov sous-jacente

$\{X_t\}$ processus de Markov en **temps continu**

Processus en **temps discret** sous-jacent

- Z_0 point de départ du processus, $S_0 = 0$, $S_1 = T_1$
- Z_n nouveaux mode et position après le n -ème saut, $S_n = T_n - T_{n-1}$, durée inter-saut

Proposition

(Z_n, S_n) est une chaîne de Markov en temps discret
Seule source d'aléa du PDP

Modélisation de la corrosion par un PDP

Processus Markovien déterministe par morceaux

$$X_t = (m_t, d_t, \gamma_t, \rho_t)$$

- mode m_t : environnement à l'instant t
- d_t perte d'épaisseur
- γ_t : reste de la protection anti-corrosion à l'instant t
- ρ_t : taux de corrosion

Chaîne de Markov sous-jacente (S_n, Z_n)

S_n : temps passé dans le n -ème environnement

Z_n : valeur du processus juste après le n -ème changement d'environnement

Temps d'arrêt

Prendre une décision dans un environnement aléatoire qui change au cours du temps

- choisir une date de maintenance
- décider d'acheter ou de vendre une action
- ...

Instant d'intervention = temps d'arrêt

Instant **aléatoire** où on prend une décision en fonction du **passé** et du **présent** mais **pas** du futur

Exemple : vendre l'action quand son prix aura doublé

Contre-exemples : vendre l'action au maximum de son cours,
vendre l'action avant qu'elle baisse, ...

Formulation mathématique du problème d'optimisation

Problème d'arrêt optimal

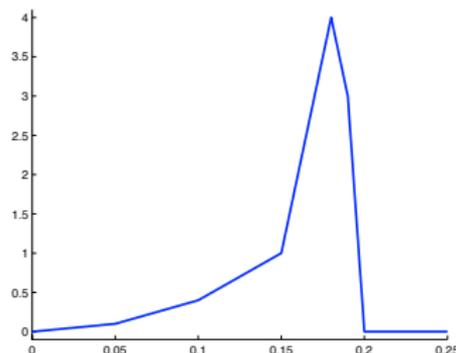
- Calculer la **fonction valeur**

$$V(x) = \sup_{\tau \leq T_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

→ performance optimale

- Trouver un temps d'arrêt **optimal** τ^* qui atteint $V(x)$
→ instant de maintenance

Fonction de performance g



Objectif

Objectif

Proposer une **méthode numérique** pour calculer

- la **fonction valeur**
- une **règle d'arrêt** optimale

avec des **bornes de l'erreur** commise

- application à la maintenance du missile

Plan

- 1 Un problème de maintenance
- 2 Modélisation mathématique
- 3 Stratégie de résolution**
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Résolution itérative théorique

Programmation dynamique

- $v_N = g$
- $v_n = L(v_{n+1}, g)$ pour $n \leq N - 1$

$$v_0(x) = \sup_{\tau \leq T_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V(x)$$

$$\begin{aligned} L(w, g)(x) &= \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \left\{ \mathbb{E} \left[w(Z_{n+1}) \mathbf{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g(\phi(Z_n, u)) \mathbf{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \mid Z_n = x \right] \right\} \\ &\quad \vee \mathbb{E} [w(Z_{n+1}) \mid Z_n = x] \end{aligned}$$

Résolution itérative théorique

Programmation dynamique

- $v_N = g$
- $v_n = L(v_{n+1}, g)$ pour $n \leq N - 1$

$$v_0(x) = \sup_{\tau \leq T_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)] = V(x)$$

But : proposer une méthode **numérique** d'approximation de V

Quantification

Méthode de discrétisation

- remplacer une variable aléatoire X à valeurs dans un **espace continu** par une variable aléatoire \hat{X} prenant un nombre **fini** de valeurs
- les espérances (intégrales) en X deviennent des **sommes finies** en \hat{X}
- l'erreur commise est connue

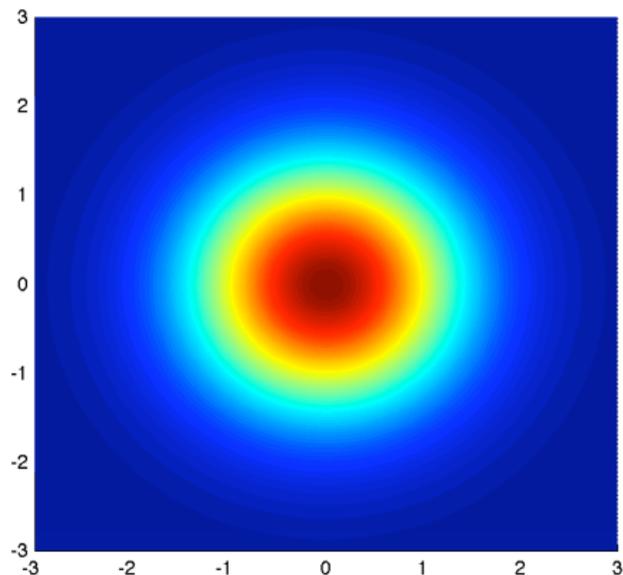
Calcul des grilles

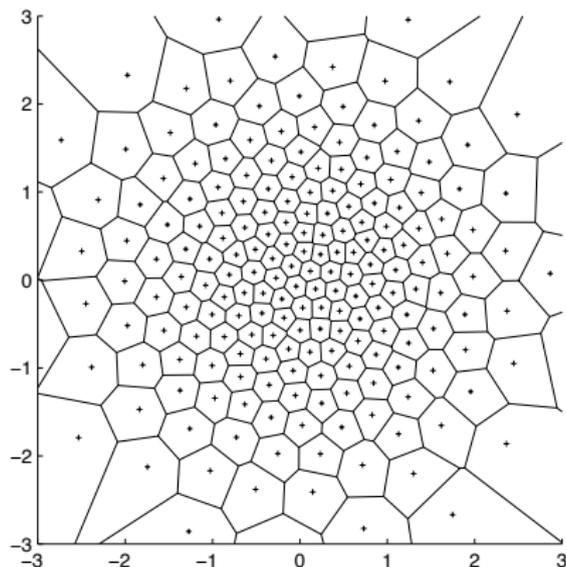
Algorithme de quantification

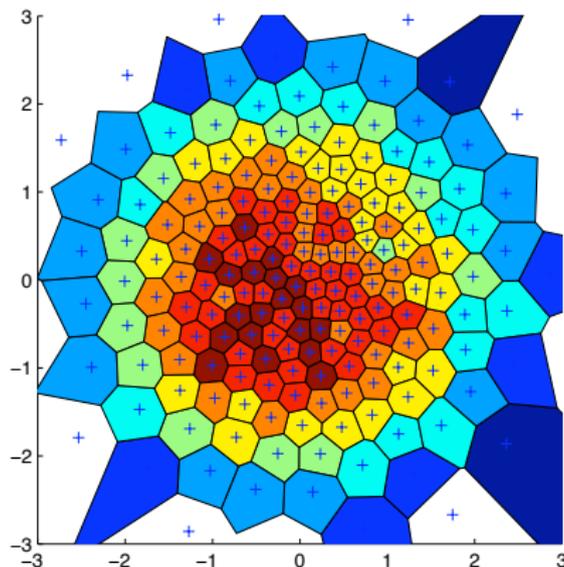
- **entrée** : simulateur de X
- **sortie** :
 - grille Γ
 - la **poids** de chaque point de Γ

\hat{X} est la projection de X sur Γ

Exemple $\mathcal{N}(0, I_2)$



Exemple $\mathcal{N}(0, I_2)$ 

Exemple $\mathcal{N}(0, I_2)$ 

Problème pratique

Echelles des différents paramètres

- taux de corrosion stable $\rho \sim 10^{-6}$
- temps moyen de séjour dans l'environnement 2
 $\lambda_2^{-1} = 131\,400 \text{ h}$

Loi uniforme sur
 $[0, 1] \times [0, 5000]$

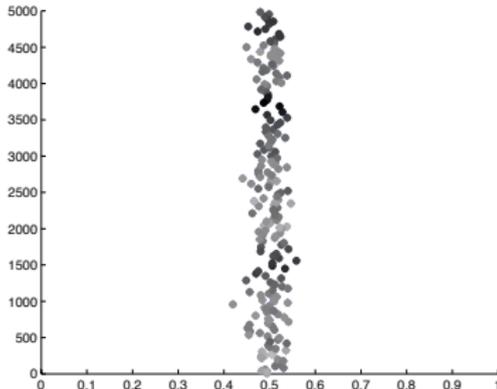
Problème pratique

Echelles des différents paramètres

- taux de corrosion stable $\rho \sim 10^{-6}$
- temps moyen de séjour dans l'environnement 2
 $\lambda_2^{-1} = 131\,400 \text{ h}$

Loi uniforme sur
 $[0, 1] \times [0, 5000]$

algorithme standard



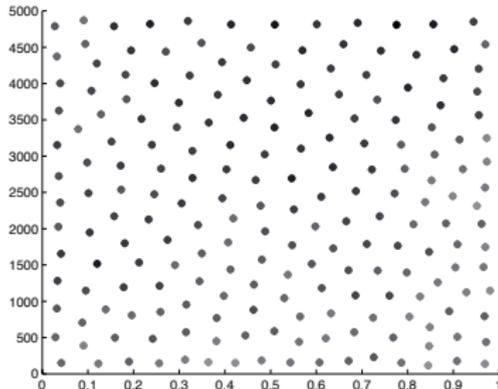
Problème pratique

Echelles des différents paramètres

- taux de corrosion stable $\rho \sim 10^{-6}$
- temps moyen de séjour dans l'environnement 2
 $\lambda_2^{-1} = 131\,400$ h

Loi uniforme sur
 $[0, 1] \times [0, 5000]$

algorithme pondéré

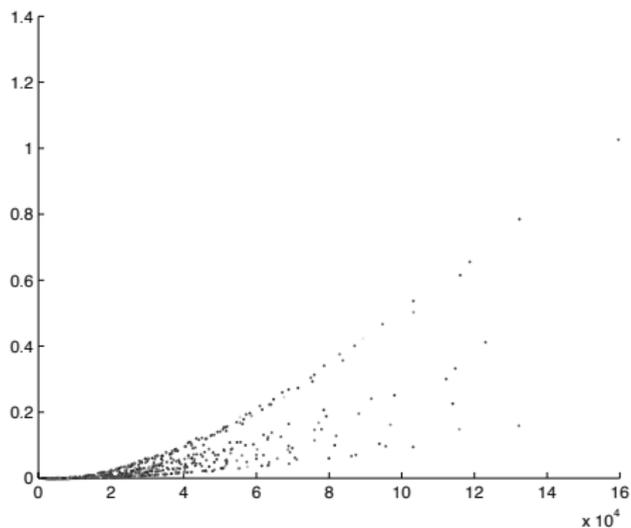


Plan

- 1 Un problème de maintenance
- 2 Modélisation mathématique
- 3 Stratégie de résolution
- 4 Résultats numériques**
- 5 Conclusion et perspectives

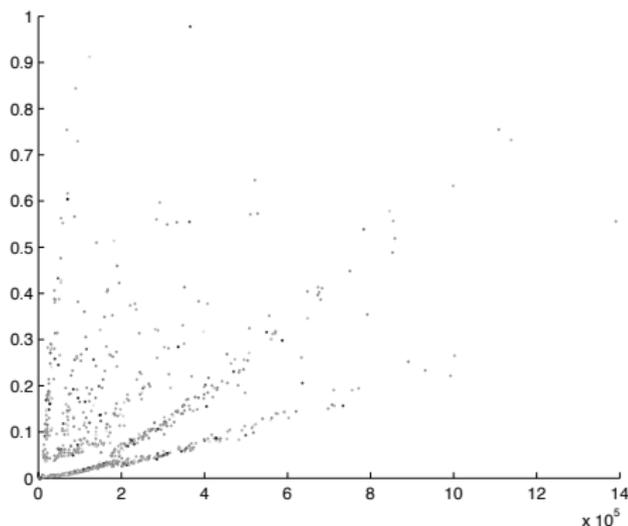
Grilles pour le processus de dégradation

Dans l'environnement 2 après le 1er saut



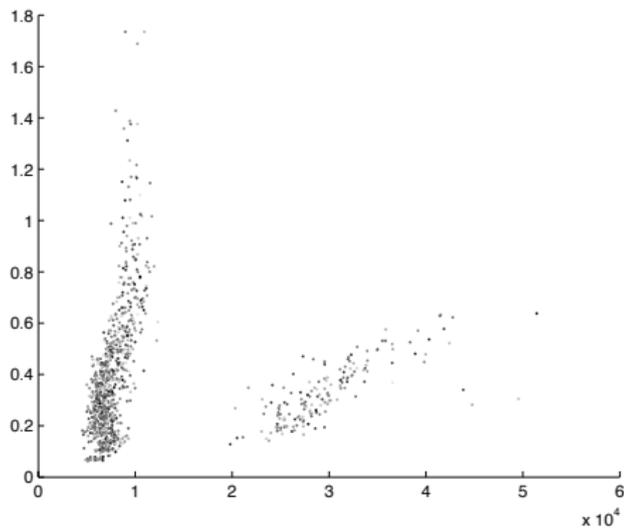
Grilles pour le processus de dégradation

Dans l'environnement 3 après le 2ème saut



Grilles pour le processus de dégradation

Dans l'environnement 1 après le 15ème saut



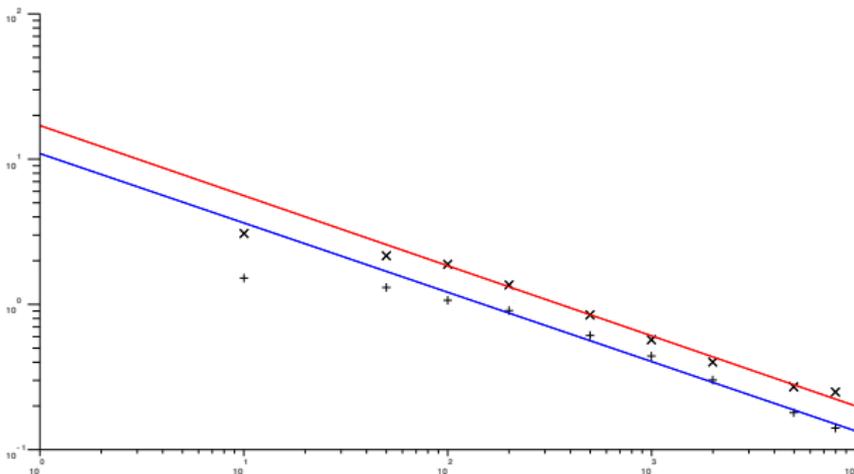
Calcul de la fonction valeur

Résultats numériques (vraie valeur : 4)

Nombre de points dans les grilles de quantification	Fonction valeur approchée	Fonction valeur par Monte Carlo
10	2.48	0.94
50	2.70	1.84
100	2.94	2.10
200	3.09	2.63
500	3.39	3.15
1000	3.56	3.43
2000	3.70	3.60
5000	3.82	3.73
8000	3.86	3.75

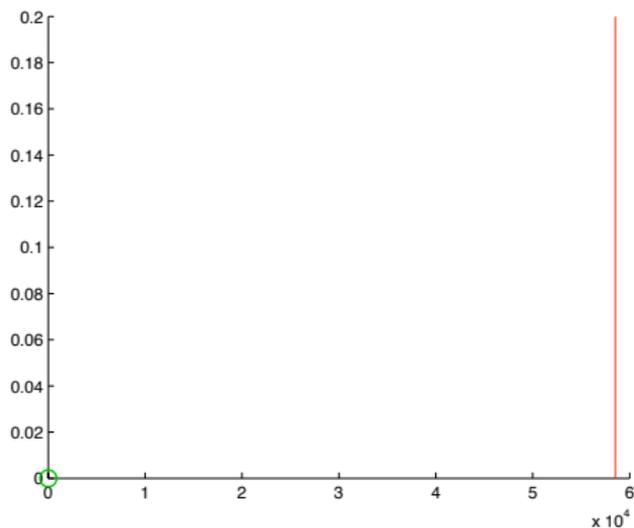
Vitesse de convergence

Droites de régression pour l'erreur calcul **direct**, **par Monte Carlo**

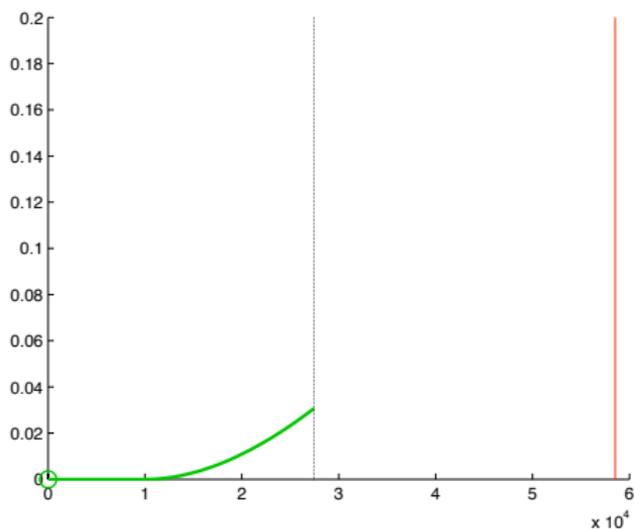


Coefficients directeurs : **-0.477**, **-0.483** (valeur théorique -0.5)

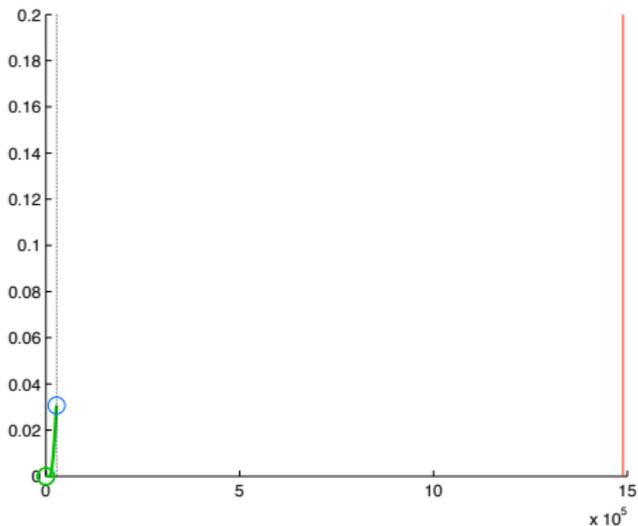
Règle d'arrêt itérative



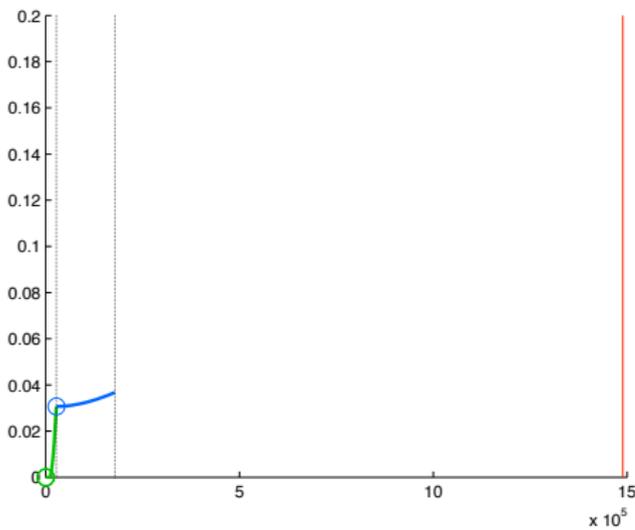
Règle d'arrêt itérative



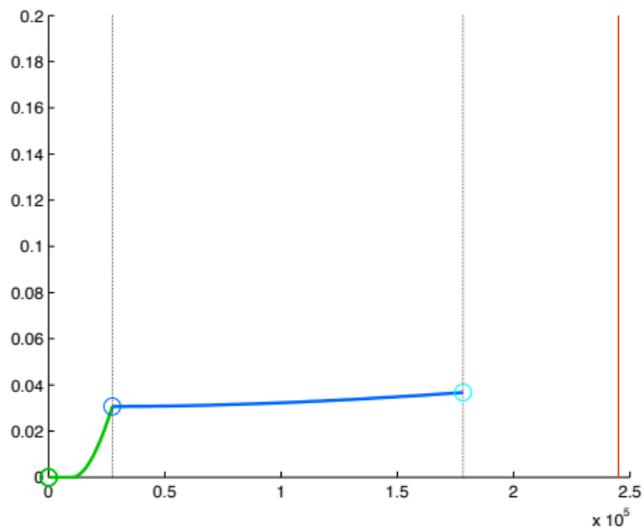
Règle d'arrêt itérative



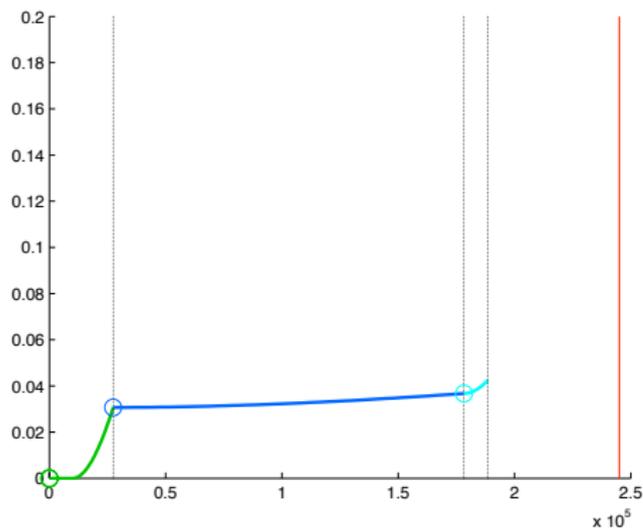
Règle d'arrêt itérative



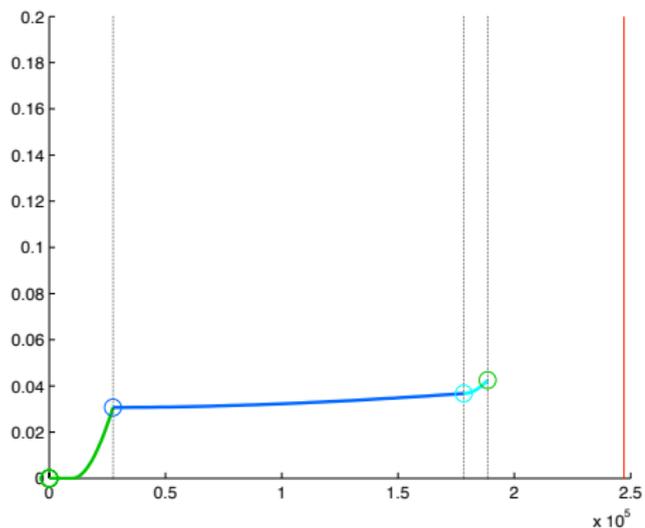
Règle d'arrêt itérative



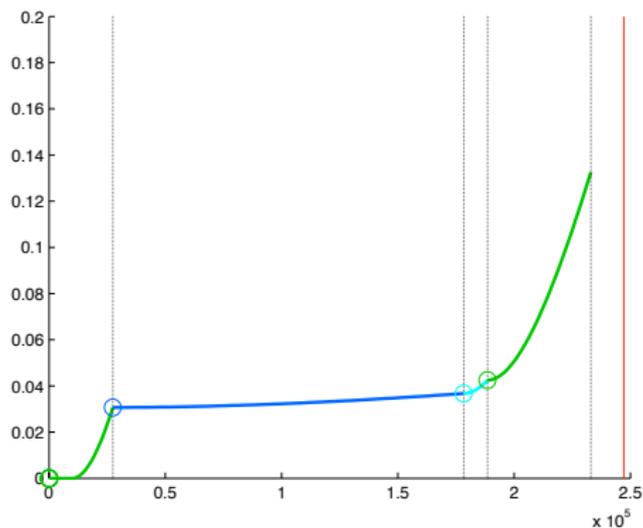
Règle d'arrêt itérative



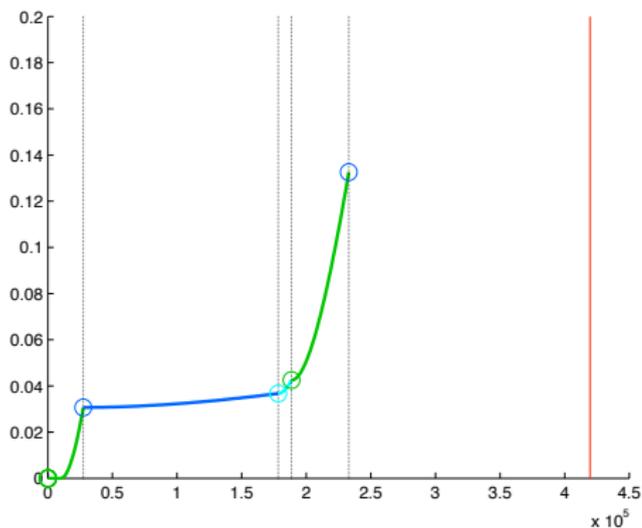
Règle d'arrêt itérative



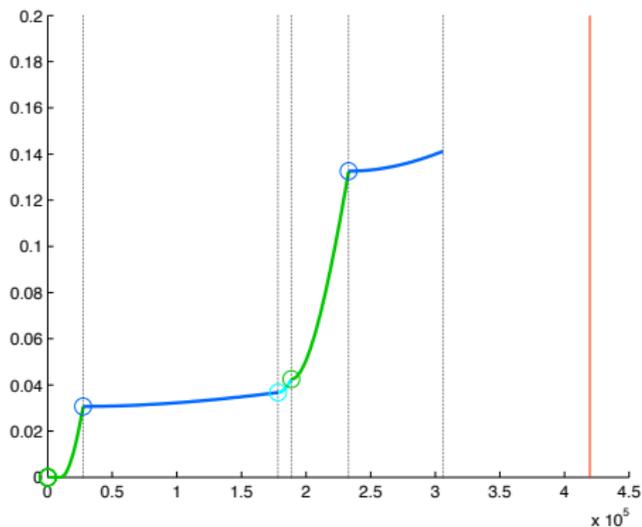
Règle d'arrêt itérative



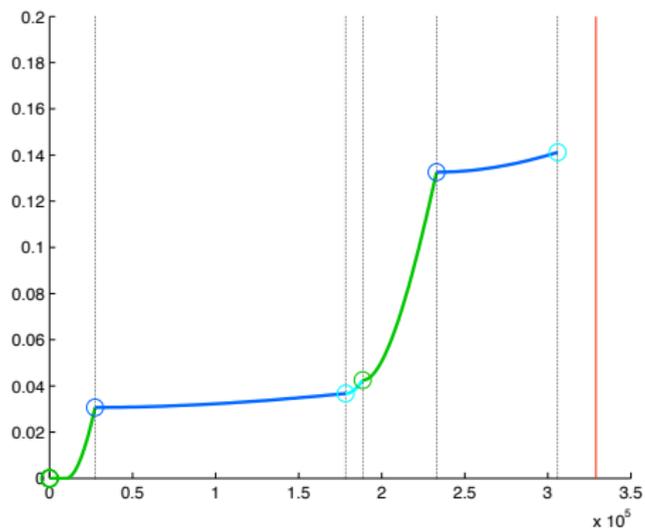
Règle d'arrêt itérative



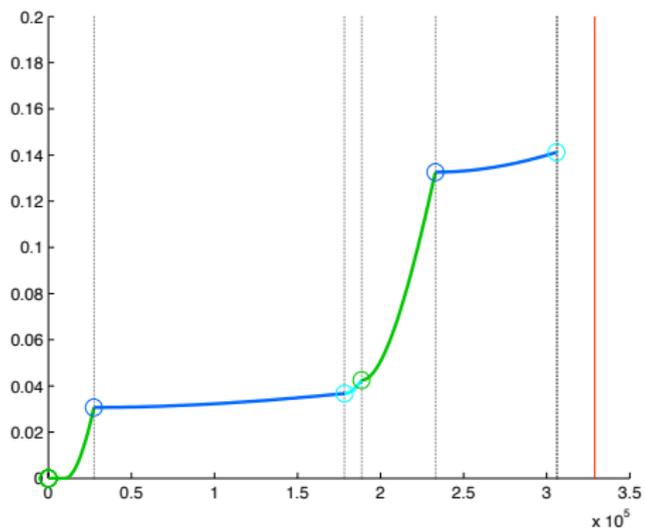
Règle d'arrêt itérative



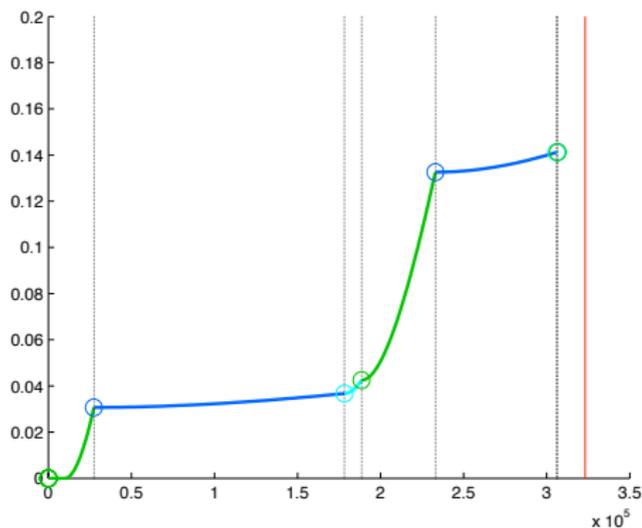
Règle d'arrêt itérative



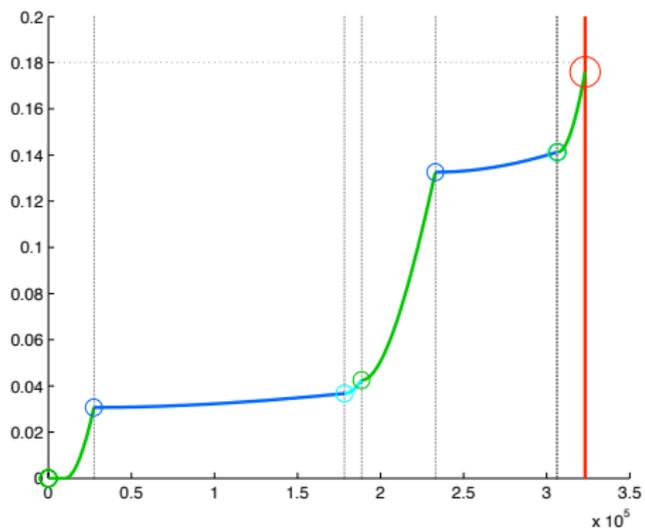
Règle d'arrêt itérative



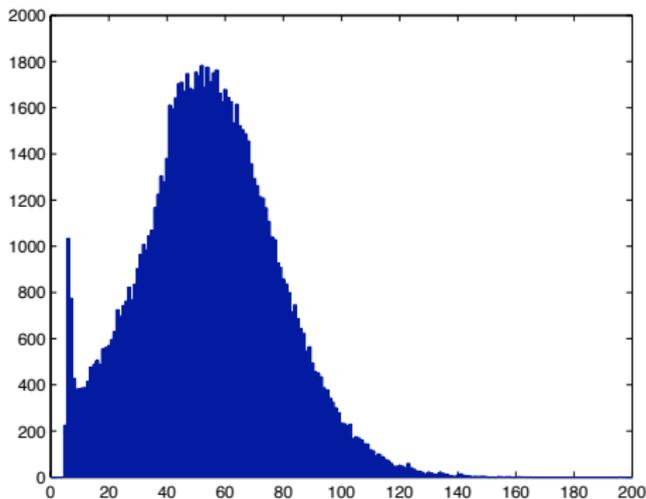
Règle d'arrêt itérative



Règle d'arrêt itérative



Optimisation des marges

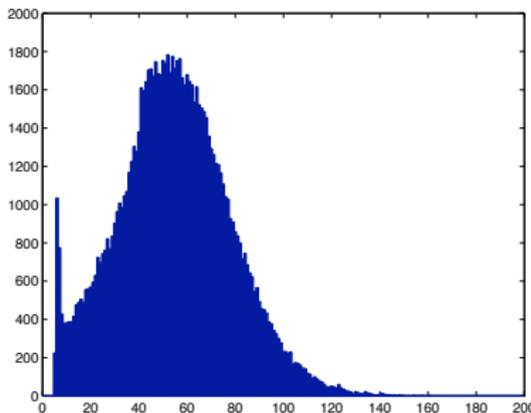


Seuil	Probabilité
5 ans	0.0002
10 ans	0.0304
15 ans	0.0524
20 ans	0.0793
40 ans	0.2647
60 ans	0.6048
80 ans	0.8670
100 ans	0.9691
150 ans	0.9997

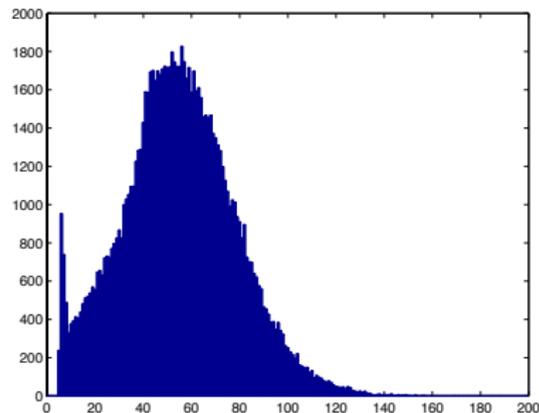
Comparaison avec Monte Carlo

Temps d'arrêt optimal

$$\tau^* = \inf\{t : d_t \geq 0.02\}$$



temps d'arrêt approché



temps d'arrêt théorique

Plan

- 1 Un problème de maintenance
- 2 Modélisation mathématique
- 3 Stratégie de résolution
- 4 Résultats numériques
- 5 Conclusion et perspectives

Conclusion

- méthode numérique performante
- calculs lourds *off line* indépendants de la fonction coût
- calcul de la règle arrêt en temps réel
- règle d'arrêt adaptée à chaque trajectoire
- pas besoin de mesure en continu : seulement aux changements d'environnement
- contexte mathématique rigoureux
 - algorithme général pour ce type de processus
 - preuve de convergence avec vitesse
- **Astrium** étude exploratoire en vue d'optimiser et de justifier les marges de conception

Perspectives

Etape suivante : maintenance avec réparations éventuellement partielles

⇒ [contrôle impulsionnel](#)

difficultés théoriques et pratiques importantes