# Etude de la solution stationnaire de l'équation $Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n$ à coefficients aléatoires

Benoîte de Saporta

Soutenance de thèse - 10 novembre 2004

# Plan de l'exposé

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives

# Le modèle

Modèle AR(1) :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad Y_n \in \mathbb{R}^d, \quad d \geq 1.$$

$(a_n, b_n)$ va sur $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

- séries chronologiques,
- processus de branchement,
- marches en milieu aléatoire,
- modèles AR(d), GARCH...

# Solution stationnaire

BRANDT 1986, BOUGEROL et PICARD 1992,

$(a_n, b_n)$ stationnaire

Si

$$\alpha = \lim \frac{1}{n} \log \|a_1 \cdots a_n\| < 0$$

et

$$\mathbb{E} \log^+ \|b_0\| < \infty,$$

unique solution stationnaire

$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{n-1} \cdots a_{n-k} b_{n-k-1},$$

# Moments

$(a_n, b_n)$ i.i.d.

- $\forall s > 0$,

$$\mathbb{E}\|R_1\|^s \leq \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s \mathbb{E}\|b_{-k}\|^s \qquad \text{si } s < 1,$$

$$(\mathbb{E}\|R_1\|^s)^{1/s} \leq \sum_{k=0}^{\infty} (\mathbb{E}\|a_0 a_{-1} \cdots a_{-k+1}\|^s)^{1/s} (\mathbb{E}\|b_{-k}\|^s)^{1/s} \qquad \text{si } s \geq 1.$$

- Si $b_0$ a des moments à tout ordre, $R$ a un moment d'ordre $s$ si

$$k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|a_1 a_2 \cdots a_n\|^s)^{1/n} < 1$$

# Références

Kesten 1973, 1974
Le Page 1983
Goldie 1991

- $\mathbb{E}\|R^s\| < \infty$ si et seulement si $k(s) < 1$
- Si $k(\kappa) = 1$, queue polynômiale :

$$\mathbb{P}(\|R\| > t) \sim Ct^{-\kappa}$$

# Renouvellement

- Introduction
- **Renouvellement pour les systèmes**
- L’ équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives

$F = (F_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ matrice de distributions.

$G = {}^t(G_1, \ldots, G_p)$ vecteur de fonctions réelles, bornées sur les compacts.

$Z = {}^t(Z_1, \ldots, Z_p)$ vecteur de fonctions inconnues qui vérifie

$$Z_i(t) = G_i(t) + \sum_{k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} Z_k(t-u) F_{ik}(du),$$

$\Longrightarrow$ comportement asymptotique de $Z$ en $+\infty$.

FELLER 1971 : $p = 1$, $F_{11}$ probabilité :

CRUMP 1970, ATHREYA et RAMA MURTHY 1976 :

$p > 1$, $F_{ij} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$

# Notations

- Produit de convolution matriciel $F * H$ :
$H$ matrice $p \times r$ de fonctions réelles mesurables

$$(F * H)_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{p} \int_{-\infty}^{\infty} H_{kj}(t-u) F_{ik}(du).$$

- Espérance de $F$ : $\Gamma = (\gamma_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ avec $\gamma_{ij} = \int u F_{ij}(du)$.

- $F^{(0)}(t) = diag(\mathbf{1}_{t \geq 0}, \ldots, \mathbf{1}_{t \geq 0})$.

- $F^{(n)}(t) = F * F^{(n-1)}(t)$.

- Fonction de renouvellement $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t)$.

# Arithméticité

$F$ est arithmétique si :

- pour tout $i \neq j$, $F_{ij}$ est concentrée sur un ensemble de la forme $b_{ij} + \lambda_{ij}\mathbb{Z}$,

- pour tout $i$, $F_{ii}$ est concentrée sur $\lambda_{ii}\mathbb{Z}$,

- les $\lambda_{ii}$ sont multiple entiers d'un même nombre,

$\lambda$ le plus grand de ces nombres,

- pour tous $a_{ij},\ a_{jk},\ a_{ik}$ points d'accroissement de $F_{ij},\ F_{jk}$ et $F_{ik}$,

$a_{ij} + a_{jk} - a_{ik}$ est un multiple entier de $\lambda$.

# Hypothèses sur $F$

1. Mesures finies :

$$\forall\, 1 \leq i, j \leq p, \qquad F_{ij}(\infty) = \lim_{t\to\infty} F_{ij}(t) < \infty.$$

2. Transience :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad U(t) < \infty.$$

3. $F(\infty)$ irréductible à puissances bornées en norme.

4. Rayon spectral : $\quad \rho(F(\infty)) = 1.$

$m$ et $u$ vecteurs propres de Perron-Frobenius :

$$F(\infty)m = m, \qquad {}^t u F(\infty) = {}^t u,$$
$$\sum_{i=1}^{p} m_i = 1, \qquad \sum_{i=1}^{p} u_i m_i = 1.$$

**Théorème 1 (Première forme)**

- *hypothèses 1-4*
- $F$ *non arithmétique*
- *espérance* $\Gamma$ *existe*

*alors,* $\gamma = {}^t u \Gamma m > 0$ *et*

$$U_{ij}(t+h) - U_{ij}(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{m_i u_j}{\gamma} h.$$

**Théorème 2 (Deuxième forme)**

- *Mêmes hypothèses*
- $G$ *directement Riemann intégrable*
- $Z = U * G$ *existe,*

*alors*

$$\lim_{t\to\infty} Z_i(t) = \frac{1}{\gamma} m_i \sum_{j=1}^{p} \left[ u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(u)du \right].$$

# Preuve des théorèmes

- Incréments de $U$ uniformément bornés

$\Longrightarrow \exists(t_n) \to +\infty$ et $V_{ij}$ mesures t.q.

$$U_{ij}(t_n + dt) \longrightarrow V_{ij}(dt)$$

- Identification des $V_{ij}$

$G = {}^t(0, \ldots, G_k, \ldots, 0)$ avec $G_k$ continue à support compact
$t_n \to +\infty$ dans l'équation de renouvellement
solutions de $Z = F * Z$
$\Longrightarrow V_{ij}$ multiples de la mesure de Lebesgue : $V_{ij} = a_{ij}\ell$

- Identification des coefficients de proportionnalité

$G = {}^t(0, \ldots, G_k, \ldots, 0)$ avec $G_k(t) = \mathbb{1}_{[0,\ 1]}(t) \qquad \Longrightarrow a_{ij} = c m_i u_j$

$G(t) = (F(\infty)\mathbb{1}_{t\geq 0} - F(t))m \qquad \Longrightarrow c = \gamma^{-1}$

# Théorie du potentiel

Extension de DELLACHERIE et MEYER 1983 en dimension $p$ :

Noyau sur $\mathbb{R}^p$ : $N = (N_{i,j})_{1 \leq i,j \leq p}$, avec $N_{i,j}(t, A)$ noyaux sur $\mathbb{R}$

Noyau unité $N^0 = I$ :

$$\begin{cases} I_{ij}(t, A) & = & 0 \qquad \text{si} \quad i \neq j, \\ I_{ii}(t, A) & = & \mathbb{1}_A(t). \end{cases}$$

Produit des noyaux : $MN = ((MN)_{ij})$ avec

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^{p} M_{ik} N_{kj}.$$

Noyau Potentiel

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} N^k.$$

# Principe du Maximum

Relation d'ordre sur les fonctions mesurables de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}_+)^p$

$$u \preceq v \quad \text{si} \quad \forall\, 1 \leq i \leq p, \quad u_i \leq v_i.$$

Si $u \preceq v$ alors $Nu \preceq Nv$

$u : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}_+)^p$ est excessive pour le noyau $N$ si

$$Nu \preceq u.$$

**Théorème 3 (Principe du Maximum)** *Si* $\mathbf{1} = {}^t(1, 1, \ldots, 1)$ *est excessive, alors pour toute fonction* $f$ *à coordonnées positives,*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} Gf(t) \;=\; \sup_{t \in A} Gf(t),$$

*où* $A$ *est le support de* $f$ *:*

$$A = \cup_{i=1}^{p} \{f_i > 0\}$$

# Coefficients markoviens

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- **L' équation à coefficients markoviens**
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives

# Introduction

Processus auto-régressif à régime markovien :

$$Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

$(a_n)$ : chaîne de Markov irréductible, apériodique, stationnaire sur $E = \{e_1, \ldots, e_p\} \subset \mathbb{R}_+^*$, matrice de transition $P = (p_{ij})$, loi stationnaire $\mu$.

$(b_n)$ i.i.d. non nulles, indépendantes de $(a_n)$

Si $\mathbb{E} \log(a_0) = \sum \log(e_i)\mu(e_i) < 0$ et $\mathbb{E} \log^+(b_0) < \infty$ unique solution stationnaire :

$$R_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_{n-k} b_{n-1-k}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

**Théorème 4**

1. *il existe* $\kappa > 0$ *tel que la matrice* $P_\kappa = diag(e_i^\kappa)^t P$ *soit de rayon spectral* $1$,
2. *les* $\log e_i$ *ne sont pas tous multiples entiers d'un même nombre,*
3. $\mathbb{E}|b_0|^\kappa < \infty$,

*alors pour* $x \in \{-1, 1\}$ *on a :*

$$t^\kappa \mathbb{P}(xR_1 > t) \xrightarrow[t \to \infty]{} L(x),$$

*où* $L(1) + L(-1) > 0$.

*Si* $b_0 \geq 0$, *alors* $L(-1) = 0$, *et* $L(1) > 0$. *Si* $b_0 \leq 0$, *alors* $L(1) = 0$, *et* $L(-1) > 0$.

# Equations de renouvellement 1

LE PAGE 1983, GOLDIE 1991

$$z(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > u)du.$$

$x = \pm 1$, même comportement asymptotique que $t^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > t)$.

$z(x,t) = \sum_{i=1}^{p} Z_i(x,t)$, où :

$$Z_i(x,t) = e^{-t}\int_0^{e^t} u^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i)du.$$

# Equations de renouvellement 2

Alors

$$\begin{aligned} Z_i(x,t) &= e_i^{\kappa} \sum_{j=1}^{p} \Big[ p_{ji} Z_j(x, t - \log e_i) \Big] + G_i(x,t) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \int Z_j(x,u) F_{ij}(du) + G_i(x,t), \end{aligned}$$

avec

$$F_{ij}(t) = e_i^{\kappa} p_{ji} \mathbb{1}_{t \geq \log e_i},$$

et

$$G_i(x,t) = e^{-t} \int_0^{e^t} u^{\kappa} \Big[ \mathbb{P}(xR_1 > u, a_0 = e_i) - \mathbb{P}(x a_0 R_0 > u, a_0 = e_i) \Big] du.$$

# Théorème de renouvellement

Théorème de renouvellement pour les systèmes :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to\infty} t^{\kappa}\mathbb{P}(xR_1 > t) &= \lim_{t\to\infty} z(x,t) \\
&= \lim_{t\to\infty} \sum_{i=1}^{p} Z_i(x,t) \\
&= \frac{1}{\gamma}\sum_{j=1}^{p}\Big[u_j \int_{-\infty}^{\infty} G_j(x,s)ds\Big].
\end{aligned}$$

Limite non nulle ?

# Limite non nulle

- Première étape :
  Grincevicius 1980, Goldie 1991

$$\mathbb{P}(|R_1| > t) \geq C \ \mathbb{P}(\sup_n \ a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon}).$$

  Inégalité de symétrisation de Lévy
  Lemme de Feller Chung

- Deuxième étape :

  Evaluer $\mathbb{P}(\sup_n \ a_0 \cdots a_{1-n} > \frac{2t}{\varepsilon})$.

# Etude du produit $a_0 \cdots a_{1-n}$

Marche aléatoire

$$S_0 = 0, \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \log(a_{1-k}) = \log(a_0 \cdots a_{1-n}).$$

Etude du processus d'échelle $S_{\tau_n}$ où :

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \inf\{n \geq 1 : \quad S_n > 0\}, \\ \tau_n &= \inf\{k > \tau_{n-1} : \quad S_k > S_{\tau_{n-1}}\}. \end{aligned}$$

Renouvellement

$$\Longrightarrow e^{\kappa t}\mathbb{P}(\max(S_n) > t) = e^{\kappa t}\mathbb{P}(\max(S_{\tau_n}) > t) \geq C > 0,$$

$C > 0$ constante explicite.

# Temps continu

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- **Modèle analogue en temps continu**
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- Perspectives

# Le Modèle

- $X$ processus Markovien de saut ergodique.
  - espace d'états $E = \{1, \cdots, N\}$, $N > 1$
  - fonction d'intensité $\lambda > 0$ sur $E$
  - noyau de saut $q$ irréductible, à diagonale nulle
  - loi stationnaire $\mu$

- $W$ mouvement brownien standard indépendant de $X$, $(\mathcal{F}_t)$ filtration associée

Processus de Ornstein-Ulhlenbeck à régime markovien :

$$\begin{cases} Y_0 \ \mathcal{F}_0 - \text{mesurable} \\ dY_t = e(X_t)Y_t dt + \sigma(X_t) dW_t \end{cases}$$

# Loi stationnaire

GUYON, IOVLEFF, YAO 2004 :

Si

$$\mathbb{E}_\mu[e(X_t)] = \sum_{i \in E} e(i)\mu(i) < 0,$$

alors $Y$ a une unique loi stationnaire $\nu$.

# Discrétisation

Solution explicite :

$$Y_t = a(0,t)\Big[Y_0 + \int_0^t a(0,u)^{-1}\sigma(X_u)dW_u\Big]$$

où

$$a(s,t) = a_{s,t} = \exp\int_s^t e(X_u)du.$$

$\delta > 0$, discrétisation $Y^{(\delta)} = (Y_{n\delta})$ vérifie

$$Y_{(n+1)\delta} = a_n Y_{n\delta} + b_n,$$

avec $b_n = V_n^{1/2}\xi_n$, $(\xi_n)$ i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$ et

$$\begin{aligned} a_n &= \exp\Big[\int_{n\delta}^{(n+1)\delta} e(X_u)du\Big], \\ V_n &= \int_{n\delta}^{(n+1)\delta} \exp\Big[2\int_u^{(n+1)\delta} e(X_v)dv\Big]\sigma^2(X_u)du. \end{aligned}$$

**Théorème 5**

1. *Si* $\forall\ i$, $e(i) \leq 0$, *alors* $\forall\ s > 0$ *:*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^s \nu(dx) < \infty.$$

2. *Si* $\exists\ i$ *tel que* $e(i) > 0$, *alors* $\exists\ \kappa > 0$ *et* $L > 0$ *:*

$$t^{\kappa}\nu(]t, +\infty[) \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} \quad L,$$
$$t^{\kappa}\nu(]-\infty, -t[) \quad \xrightarrow[t \to +\infty]{} \quad L.$$

# Calcul de $\kappa$

Si $\exists\ i$ tel que $e(i) > 0$.

$$s_1 = \min\left\{\frac{\lambda(i)}{e(i)} \mid e(i) > 0\right\}$$

Pour $s < s_1$, $M_s = ((M_s)_{ij})$ avec

$$(M_s)_{ij} = \frac{q(i,j)\lambda(i)}{\lambda(i) - se(i)}$$

$\kappa$ est l'unique $0 < s < s_1$ tel que

$$\rho(M_s) = 1$$

# Cas iid

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- **Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.**
- Perspectives

Travail en collaboration avec Y. GUIVARC'H et E. LE PAGE

Processus auto-régressif multidimensionnel :

$$Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n, \qquad n \in \mathbb{N},$$

$(A_n, B_n)$ i.i.d. sur $Gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$.

Si
- $\lim_n \frac{1}{n} \log \|A_1 A_2 \cdots A_n\| = \alpha < 0$ presque sûrement,
- $\mathbb{E} \log^+ \|B_1\| < \infty$,

unique solution stationnaire de même loi que :

$$R = \sum_{k=1}^{\infty} A_1 A_2 \cdots A_{k-1} B_k$$

# Références

KESTEN, 1973
$A_n$ matrices positives

LE PAGE, 1983
Matrices inversibles quelconques
Condition de récurrence :
Pour tout $x \in \mathbb{S}^{d-1}$, la chaîne

$$X_n = x \cdot A_1 \cdots A_n, \qquad x \cdot A = \frac{xA}{\|xA\|}$$

visite tous les ouverts de la sphère.

# Définitions

- $k(s) = \lim_n (\mathbb{E}\|A_1 \cdots A_n\|^s)^{1/n}$,

- On suppose que $\sigma = \sup\{s \geq 0;\ k(s) < \infty\} > 0$.

- $\Gamma_\mu$ semi-groupe engendré par le support $S_\mu$ de la loi $\mu$ de $A_1$ vérifie la condition i-p-e :

  - $\Gamma_\mu$ irréductible : pas de sous-espace invariant non trivial
  - $\Gamma_\mu$ proximal sur l'espace projectif $\mathcal{P}^{d-1}$ :

$$\forall v, v' \in \mathcal{P}^{d-1}, \quad \exists (a_n) \in \Gamma_\mu \text{ t.q. } \delta(va_n, v'a_n) \longrightarrow 0$$

  - $\Gamma_\mu$ expansif : contient un élément de rayon spectral $> 1$.

**Théorème 6**

1. $\Gamma_\mu$ *vérifie la condition i-p-e,*
2. $\Gamma_\mu$ *ne laisse pas de cône convexe fermé saillant d'intérieur non vide invariant,*
3. $\forall x$ *vecteur colonne de* $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{P}(A_1 x + B_1 = x) < 1$

*Alors* $k(s) = 1$ *a une unique solution* $\kappa$ *sur* $]0, \sigma[$.
*Si* $\mathbb{E}[\|A_1\|^\kappa \log \det |A_1|] > -\infty$ *et* $\mathbb{E}\|B_1\|^\kappa < +\infty$, *alors*

$$\forall x \in \mathbb{S}^{d-1} \qquad \lim_{t \to \infty} t^\kappa \mathbb{P}(xR > t) = \ell e_\kappa(x),$$

*où* $\ell > 0$ *et* $e_\kappa > 0$ *continue symétrique sur* $\mathbb{S}^{d-1}$

# Idée de la preuve

Equation de renouvellement : $Z(x,t) = QZ(x,t) + G(x,t)$ avec

$$Qf(x,t) = \frac{1}{e_\kappa(x)} \int \|xa\|^\kappa e_\kappa(x \cdot a) f(x \cdot a, t - \log \|xa\|)\mu(da).$$

Définition de $e_\kappa$, étude de $Q$ sur $\mathcal{P}^{d-1}$ : GUIVARC'H, LE PAGE 2004.

Propriétés de $Q$ sur $\mathbb{S}^{d-1}$ : étudier les fermés $\Gamma_\mu$-invariants sur $\mathbb{S}^{d-1}$
$\Longrightarrow$ hypothèse 2.

# Exemples 1

- matrices positives : $\exists$ cône $\Gamma_\mu$-invariant
- $\mu = (\delta_a + \delta_{a'})/2$ avec $a$ positive, $a'$ négative, $x$ vecteur positif alors $x \cdot A_1 \cdots A_n$ ne visite pas l'ouvert des vecteurs non positifs et non négatifs.

Ex :

$$a = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a' = \begin{pmatrix} -1/5 & -1/5 \\ -1/5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B_n \sim \mathcal{N}(0,1).$$

vérifie toutes les hypothèses du théorème.

# Exemples 2

Modèle AR(2)

$$X_n = a_{1,n}X_{n-1} + a_{2,n}X_{n-2} + b_n \Longleftrightarrow Y_n = A_{n-1}Y_{n-1} + B_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

avec
$$\begin{aligned} Y_n &= {}^t(X_n, X_{n-1}), \\ B_n &= {}^t(b_n, 0), \end{aligned} \qquad A_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} & a_{2,n} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ex : $\mu = \frac{1}{4}\delta_a + \frac{3}{4}\delta_{a'}$ avec

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a' = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$b_1 \sim \mathcal{N}(0,1)$ ou discrète prenant des valeurs autres que $2$ et $9/8$.

# Exemples 3

Question de KESTEN 1973

- dimension $d = 2$
- $m_1$, $m_2$ matrices strictement positives
- $m_3 = r_\theta$ rotation d'angle $\theta$

Est-ce que $\mu = p_1\delta_{m_1} + p_2\delta_{m_2} + p_3\delta_{m_3}$ peut donner une queue polynômiale ?

$\Longrightarrow$ $\Gamma_\mu$ vérifie la condition i-p sans cône invariant dès que :

$$\theta \neq 0 \mod \frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad \frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q} \ \text{ ou } \ \frac{\theta}{\pi} = \frac{2k+1}{n}.$$

# Perspectives

- Introduction
- Renouvellement pour les systèmes
- L' équation à coefficients markoviens
- Modèle analogue en temps continu
- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d.
- **Perspectives**

# Perspectives 1

- Cas multidimensionnel à coefficients i.i.d. :

  - matrices positives : cône invariant des vecteurs positifs

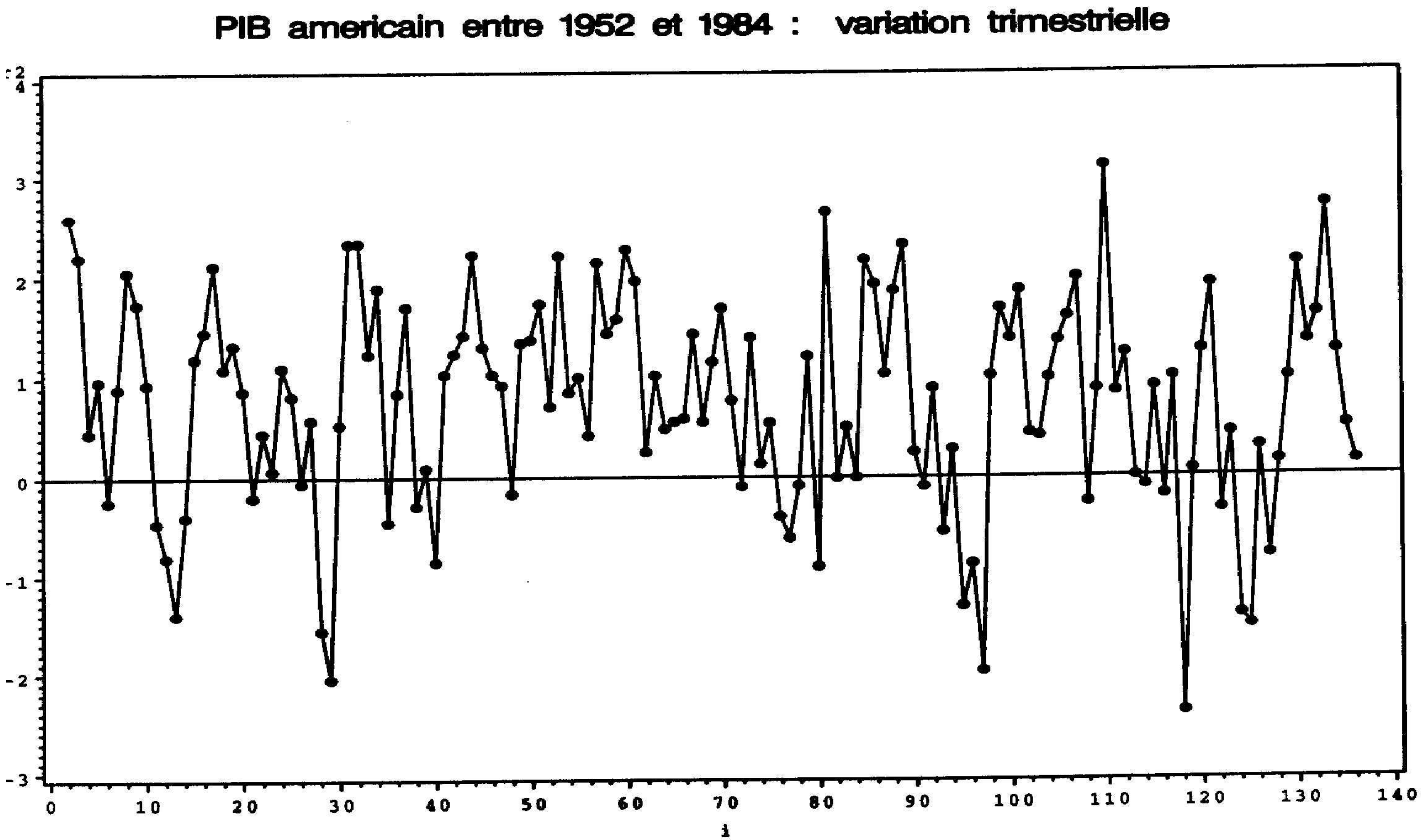
  - pas de cône invariant

  - **cône invariant général ?**

# Perspectives 2

- Cas multidimensionnel à coefficients markoviens

  - exemple de HAMILTON 1989



# Perspectives 3

- Modèle :

$$X_n = a_n(0) + a_n(1)X_{n-1} + \cdots + a_n(4)X_{n-4} + b_n$$

  - $X_n = 100 \log \frac{\mathrm{PIB}_n}{\mathrm{PIB}_{n-1}}$

  - $a_n = (a_n(j), j = 0, ..4)$ chaine de Markov à deux états

$$(909,\ 265,\ 29,\ -126,\ -110)/1000$$
$$(-420,\ 216,\ 628,\ -73,\ 97)/1000$$

  - Matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0.882 & 0.118 \\ 0.286 & 0.714 \end{pmatrix}$$

- Interprétation des états :
  1=croissance, 2=récession $\Longrightarrow$ Cycles économiques