# Contribution à l'estimation et au contrôle de processus stochastiques

Benoîte de Saporta

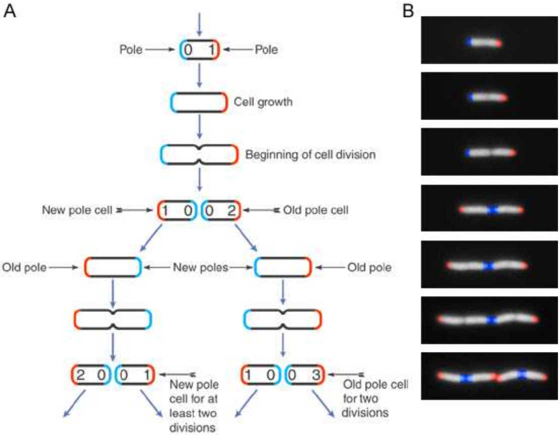
Habilitation à diriger des recherches

Université de Bordeaux

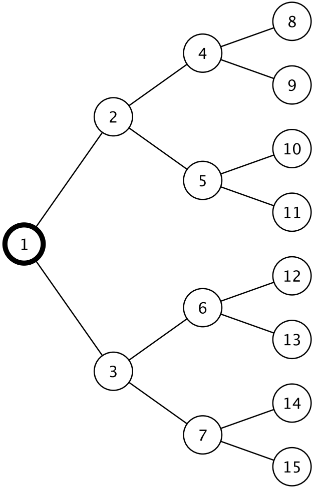
# Plan

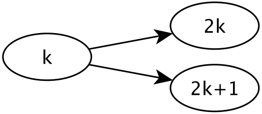
# Division d'Escherichia coli

[Stewart & al. 2005]



# Structure d'arbre binaire

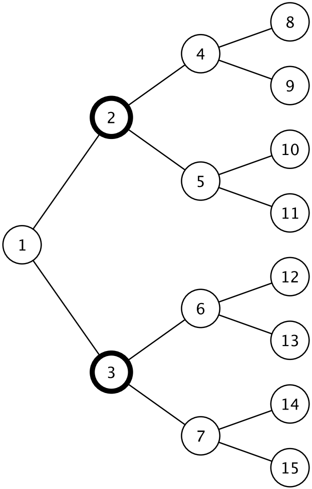


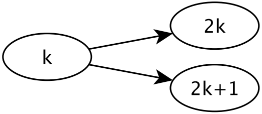




Génération 0:

$$\mathbb{G}_0 = \{1\}$$

# Structure d'arbre binaire

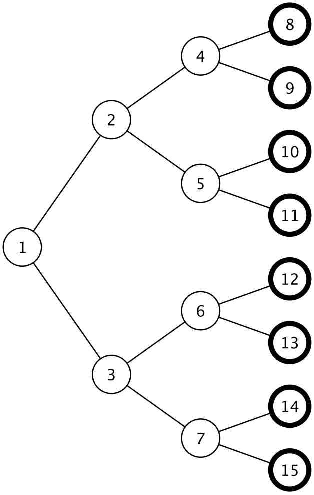


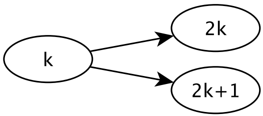




Génération 1:

$$\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$$

# Structure d'arbre binaire




Génération $n$:

$$\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$$

Arbre jusqu'à la génération $n$:

$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{\ell=0}^{n} \mathbb{G}_\ell$$

Observation d'une caractéristique $X_k$

# BAR asymétrique

[Guyon 2007] Processus auto-régressif de bifurcation asymétrique

$$\begin{cases} X_{2k} & = & a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} & = & c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

$(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$ gaussiennes iid, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$

Estimer les paramètres pour tester l'asymétrie

- $(a, b) = (c, d)$
- $a/(1-b) = c/(1-d)$

Méthode chaînes de Markov bifurquantes en utilisant la structure d'arbre par générations

# Première contribution

## Modèle BAR asymétrique

$$\begin{cases} X_{2k} = a + bX_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} = c + dX_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

### Hypothèses affaiblies

$\mathcal{F}_n = \sigma\{X_k, k \in \mathbb{T}_n\}$ filtration des générations

- moments d'ordre 8 pour le bruit
- différence de martingale $\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}|\mathcal{F}_n] = 0$ pour tout $k \in \mathbb{G}_n$, $\epsilon_{2k+i}$ indépendant de $\epsilon_{2l+j}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_n$ pour tout $k \neq l \in \mathbb{G}_n$
- $\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}^2|\mathcal{F}_n] = \sigma^2$, $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}|\mathcal{F}_n] = \rho$ pour tout $k \in \mathbb{G}_n$

- convergence des estimateurs avec vitesse
- méthode martingale

# Méthode martingale

## Convergence des martingales $L^2$

$(M_n)$ martingale scalaire bornée dans $L^2$

$< M >_n = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}[(M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n]$

Si $\lim_{n\to\infty} < M >_n = +\infty$, alors $\frac{M_n}{<M>_n} \to 0$ p.s.

$+$ conditions de moment alors $\left(\frac{M_n}{<M>_n}\right)^2 = \mathcal{O}\left(\frac{\log(<M>_n)}{<M>_n}\right)$ p.s.

Mise en œuvre

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations
- calculer la limite du crochet
- redémontrer le théorème de vitesse de convergence pour une martingale sur un arbre binaire

# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète

# Données réelles

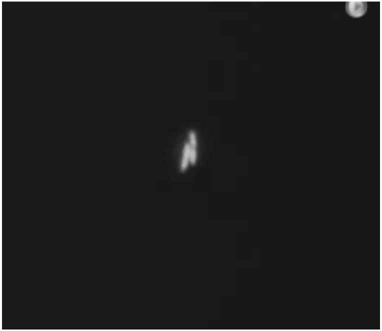
Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète

# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète



# Données réelles

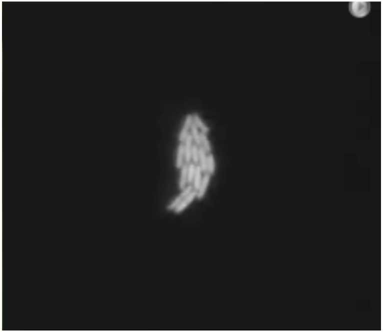
Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète

# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète



# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète

# Données réelles

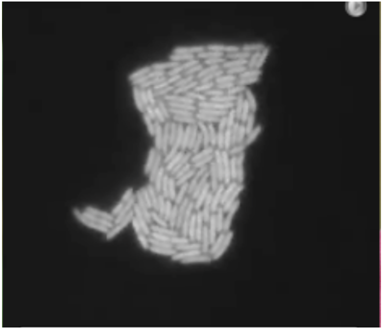
Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète

# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

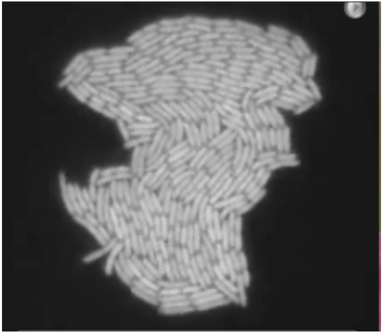
- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète



# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

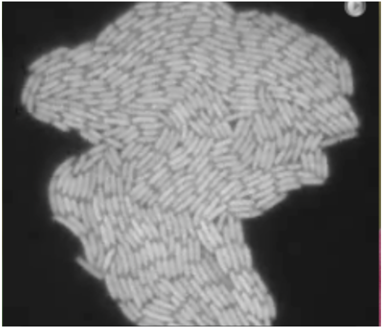
- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète



# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète



# Données réelles

Données de [Stewart & al. 2005]

- 94 films = 94 généalogies
- 4 à 9 générations de cellules par généalogie
- mesure du taux de croissance des cellules
- aucune généalogie complète

On ne peut pas appliquer notre procédure d'estimation et de test à ces données

$\Longrightarrow$ Nouvelle procédure d'estimation en tenant compte des données manquantes

# Modélisation des données manquantes

[Delmas & Marsalle 2010]

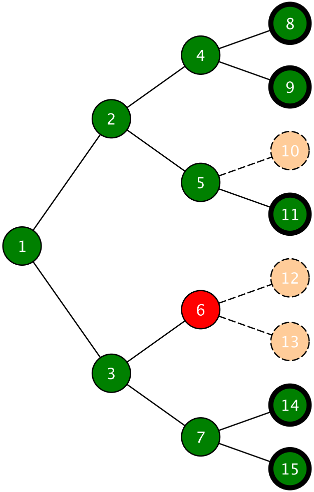
- chaque cellule a un type 0 (pair–nouveau pôle) ou 1 (impair–ancien pôle)
- une cellule non observée n'a pas de descendante observée
- probabilité $p(j_0, j_1)$ d'avoir $j_0$ fille de type 0 et $j_1$ fille de type 1, tiré indépendamment pour chaque cellule
- $Z_n$ nombre de cellules présentes à la génération $n$
  Galton-Watson
- inférence sur le BAR partiellement observé par méthode chaîne de Markov bifurquante

Le nombre de cellules filles de chaque type devrait aussi dépendre du type de la mère

# Modèle de Galton-Watson à deux types

- $\delta_k = 1$ si la cellule $k$ est observée, 0 sinon
- une cellule non observée n'a pas de descendante observée
- probabilité $p^{(i)}(j_0, j_1)$ pour une cellule mère de type $i$ d'avoir $j_0$ fille de type 0 et $j_1$ fille de type 1, tiré indépendamment pour chaque cellule
- $Z_n^i$ nombre de cellules de type $i$ présentes à la génération $n$, $(Z_n^0, Z_n^1)$ processus de Galton-Watson à deux types

# Générations observées




Génération $n$ observée:

$$\mathbb{G}_n^* = \{k \in \mathbb{G}_n \ ; \ \delta_k = 1\}$$

Arbre jusqu'à la génération $n$:

$$\mathbb{T}_n^* = \{k \in \mathbb{T}_n \ ; \ \delta_k = 1\} = \cup_{\ell=0}^{n} \mathbb{G}_\ell^*$$

# BAR partiellement observé

$$\begin{cases} X_{2k} = a + b\,X_k + \epsilon_{2k} \\ X_{2k+1} = c + d\,X_k + \epsilon_{2k+1} \end{cases}$$

## Hypothèses

- indépendance entre $(\delta_k)$ et $(X_k)$ et $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})$
- bruit différence de martingale avec moments d'ordre 8

Estimation de $\boldsymbol{\theta} = (a, b, c, d)^t$ : minimiser

$$\Delta_n(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k}(X_{2k} - a - bX_k)^2 + \delta_{2k+1}(X_{2k+1} - c - dX_k)^2.$$

Estimateurs empiriques des moments du bruit

# Estimateur de $\boldsymbol{\theta}$

## Estimateur des moindres carrés pour $\boldsymbol{\theta}$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \begin{pmatrix} \widehat{a}_n \\ \widehat{b}_n \\ \widehat{c}_n \\ \widehat{d}_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{2k} X_{2k} \\ \delta_{2k} X_k X_{2k} \\ \delta_{2k+1} X_{2k+1} \\ \delta_{2k+1} X_k X_{2k+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_n^0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S}_n^1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_n^0 = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{S}_n^1 = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

# Convergence avec vitesse

**Théorème**

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \parallel \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \parallel^2 = \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \mathcal{O}\left(\frac{\log |\mathbb{T}_{n-1}^*|}{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}\right)$$

Preuve: méthode martingale

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations (augmentée de tout le processus d'observation)
- calculer la limite du crochet
- théorème de vitesse de convergence pour une martingale sur un arbre binaire de Galton-Watson

# Martingale principale

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{M}_n$, avec $(\boldsymbol{M}_n)$ martingale pour la filtration des générations et observations

$$\boldsymbol{M}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{2k}\epsilon_{2k} \\ \delta_{2k}X_k\epsilon_{2k} \\ \delta_{2k+1}\epsilon_{2k+1} \\ \delta_{2k+1}X_k\epsilon_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$(\boldsymbol{M}_n)_{n\geq 1}$ de carré intégrable et de crochet $< \boldsymbol{M} >_n = \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}$

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = \begin{pmatrix} \sigma^2 \boldsymbol{S}_n^0 & \rho \boldsymbol{S}_n^{0,1} \\ \rho \boldsymbol{S}_n^{0,1} & \sigma^2 \boldsymbol{S}_n^1 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \boldsymbol{S}_n^{0,1} = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k}\delta_{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}$$

# Convergence du crochet

Lois des grands nombres pour les observations $(\delta_k)$, le bruit $(\delta_k \epsilon_k)$, le BAR $(\delta_{2k+i} X_k^q)$

- martingales scalaires pour différentes filtrations
- forme spécifique de l'auto-régression
- hypothèse $\max\{|b|, |d|\} < 1$

# Théorème central limite

## Théorème

Conditionnellement à la non extinction

$$\sqrt{|\mathbb{T}^*_{n-1}|}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{S}^{-1})$$

Deux difficultés

- normalisation $|\mathbb{T}^*_{n-1}|$ aléatoire
- résultat conditionné à la non extinction : valable sur l'ensemble de non extinction $\overline{\mathcal{E}} = \cap\{|\mathbb{G}^*_n| > 0\}$ muni de la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{\mathcal{E}}}(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \cap \overline{\mathcal{E}})/\mathbb{P}(\overline{\mathcal{E}})$

# Analyse des données E. coli

51 généalogies comportant 8 ou 9 générations

- test $(a, b) = (c, d)$ 42 p-valeurs $\leq 0.05$
- test $a/(1-b) = c/(1-d)$ 41 p-valeurs $\leq 0.05$

Simulations $\Longrightarrow$ faible puissance des tests pour 8 ou 9 générations

Utiliser toutes les données disponibles

# Estimateur multi-arbres

## Estimateur des moindres carrés pour $\boldsymbol{\theta}$

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{j,2k} X_{j,2k} \\ \delta_{j,2k} X_{j,k} X_{j,2k} \\ \delta_{j,2k+1} X_{j,2k+1} \\ \delta_{j,2k+1} X_{j,k} X_{j,2k+1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\boldsymbol{S}_n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{S}_n^0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{S}_n^1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_n^i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{j,2k+i} \begin{pmatrix} 1 & X_{j,k} \\ X_{j,k} & X_{j,k}^2 \end{pmatrix}$$

# Analyse multi-arbres des données E. coli

Estimation de $\boldsymbol{\theta} \Longrightarrow$ hypothèse $\max\{|b|, |d|\} < 1$ vraie

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 0.0204 [0.0203; 0.0205] | $c$ | 0.0201 [0.0200; 0.0202] |
| $b$ | 0.4686 [0.4536; 0.4837] | $d$ | 0.4518 [0.4366; 0.4669] |

Estimation des moments du bruit

| | |
|---|---|
| $\sigma^2$ | $1.38 \cdot 10^{-5}$ $[1.33 \cdot 10^{-5}; 1.43 \cdot 10^{-5}]$ |
| $\rho$ | $0.51 \cdot 10^{-5}$ $[0.47 \cdot 10^{-5}; 0.55 \cdot 10^{-5}]$ |

Tests : hypothèse $(a, b) = (c, d)$ rejetée (p-valeur$< 10^{-10}$)
hypothèse $a/(1-b) = c/(1-d)$ rejetée (p-valeur$< 10^{-10}$)

# Modèle à coefficients aléatoires

$$\begin{cases} X_{2k} = (a+\varepsilon_{2k}) + (b+\eta_{2k})\,X_k \\ X_{2k+1} = (c+\varepsilon_{2k+1}) + (d+\eta_{2k+1})\,X_k \end{cases}$$

## Hypothèses

- $(\varepsilon_{2k}, \eta_{2k}, \varepsilon_{2k+1}, \eta_{2k+1})$ iid
- moments d'ordre 32
- donnés manquantes Galton Watson simple

- Estimateur des moindres carrés pour $\boldsymbol{\theta}$ : même formule
- Estimateurs des moindres carrés modifiés pour les moments du bruit

# Convergence

## Vitesse de convergence

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \parallel \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} \parallel^2 = \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*|>0\}} \mathcal{O}\left(\frac{\log|\mathbb{T}_{n-1}^*|}{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}\right)$$

## Théorème central limite

Conditionnellement à la non extinction

$$\sqrt{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}(\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{S}^{-1})$$

- identifier une martingale (vectorielle) pour la filtration des générations et observations
- calculer la limite du crochet
- théorème de vitesse de convergence pour une martingale sur un arbre binaire de Galton-Watson

# Martingale principale

$\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n - \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{S}_{n-1}^{-1}\boldsymbol{M}_n$, avec $(\boldsymbol{M}_n)$ martingale pour la filtration des générations et observations

$$\boldsymbol{M}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \delta_{2k}\epsilon_{2k} \\ \delta_{2k}X_k\epsilon_{2k} \\ \delta_{2k+1}\epsilon_{2k+1} \\ \delta_{2k+1}X_k\epsilon_{2k+1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \epsilon_{2k} &= \delta_{2k}(\varepsilon_{2k} + \eta_{2k}X_k), \\ \epsilon_{2k+1} &= \delta_{2k+1}(\varepsilon_{2k+1} + \eta_{2k+1}X_k), \end{cases}$$

$(\boldsymbol{M}_n)_{n\geq 1}$ de carré intégrable et de crochet $< \boldsymbol{M} >_n = \boldsymbol{\Gamma}_{n-1}$ faisant intervenir des termes en $\sum_{k\in\mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k+i}X_k^q$, $0 \leq q \leq 4$

# Convergence du crochet

On ne veut pas imposer

$$\max\{|b + \eta_2|, |d + \eta_3|\} < 1$$

$\Longrightarrow$ plus de majoration qui gomme l'asymétrie
impossibilité d'utiliser la méthode martingale directe

# Convergence du crochet

On ne veut pas imposer

$$\max\{|b+\eta_2|, |d+\eta_3|\} < 1$$

$\Longrightarrow$ plus de majoration qui gomme l'asymétrie
impossibilité d'utiliser la méthode martingale directe

$\Longrightarrow$ lois des grands nombres par la méthode chaîne de Markov bifurquante

# Méthode par chaîne de Markov bifurquante

[Guyon 2007]

- définition d'un modèle de chaîne de Markov sur un arbre binaire complet

$$\mathbb{E}\left[\prod_{k\in\mathbb{G}_n} f_k(X_{2k},X_{2k+1}) \,\middle|\, \sigma(X_j, j\in\mathbb{T}_n)\right] = \prod_{k\in\mathbb{G}_n} Pf_k(X_k)$$

- comportement asymptotique de $(X_k)$ donnée par la chaîne induite

$$\begin{cases} Y_0 &= X_1, \\ Y_{n+1} &= A_{n+1} + B_{n+1} Y_n \end{cases}$$

$(A_n, B_n)$ iid de loi $(a+\epsilon_2, b)\mathbb{1}_{\{\zeta=1\}} + (c+\epsilon_3, d)\mathbb{1}_{\{\zeta=0\}}$,
$\zeta \sim$ Bernoulli$(1/2)$ lignée aléatoire

# Chaîne de Markov bifurquante sur un arbre GW

Chaîne bifurquante sur $\mathbb{R} \cup \partial$

$$X_k^* = X_k \mathbb{1}_{\{\delta_k=1\}} + \partial \mathbb{1}_{\{\delta_k=0\}}$$

Noyau markovien sur $(\mathbb{R} \cup \partial)^3$: $Pf(\partial) = f(\partial, \partial, \partial)$ et

$$\begin{aligned} Pf(x) \quad = \quad & p(1,1)\mathbb{E}\left[f\left(x, (b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2, (d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right] \\ & + p(1,0)\mathbb{E}\left[f\left(x, (b+\eta_2)x + a + \varepsilon_2, \partial\right)\right] \\ & + p(0,1)\mathbb{E}\left[f\left(x, \partial, (d+\eta_3)x + c + \varepsilon_3\right)\right] \\ & + p(0,0)f(x, \partial, \partial) \end{aligned}$$

# Chaîne induite

$(A_n, B_n)$ iid de loi $(a+\epsilon_2, b+\eta_2)\mathbb{1}_{\{\zeta=1\}} + (c+\epsilon_3, d+\eta_3)\mathbb{1}_{\{\zeta=0\}}$,
$\zeta \sim$ Bernoulli$\left(\frac{p(1,0)+p(1,1)}{p(1,0)+p(0,1)+2p(1,1)}\right)$

$$\left\{\begin{array}{rcl} Y_0 & = & X_1, \\ Y_{n+1} & = & A_{n+1} + B_{n+1} Y_n \end{array}\right.$$

- loi invariante $\mu \sim \sum B_1 \cdots B_{n-1} A_n$
- ergodicité géométrique pour $x^q$ dès que

$$\mathbb{E}[|B_1|^q] = \frac{p(1,0)+p(1,1)}{m}\mathbb{E}[|b+\eta_2|^q] + \frac{p(0,1)+p(1,1)}{m}\mathbb{E}[|d+\eta_3|^q] < 1$$

remplace l'hypothèse $\max\{|b|,|d|\} < 1$

# Analyse multi-arbres des données E. coli (coefficients aléatoires)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 0.0204 [0.0197; 0.0210] | $c$ | 0.0201 [0.0194; 0.0208] |
| $b$ | 0.4686 [0.4511; 0.4861] | $d$ | 0.4518 [0.4336; 0.4700] |

Estimation des moments du bruit

| | |
|---|---|
| $\sigma_\epsilon^2$ | $1.44 \cdot 10^{-4}$ $[0.59 \cdot 10^{-4}; 2.28 \cdot 10^{-4}]$ |
| $\sigma_\eta^2$ | $9.44 \cdot 10^{-2}$ $[3.20 \cdot 10^{-2}; 15.68 \cdot 10^{-2}]$ |

Test : hypothèse $\sigma_\eta^2 = 0$ rejetée (p-valeur$= 10^{-3}$)

# Conclusion et perspectives

## Comparatif méthode chaîne de Markov et méthode martingale

| | Martingale | Chaîne de Markov |
|---|---|---|
| bruit | différence de martingale<br>moments d'ordre $q$ | iid<br>moments d'ordre $4q$ |
| $b$ et $d$ | max $< 1$ | moyenne pondérée $< 1$ |
| observations | Galton-Watson<br>à deux types | Galton-Watson<br>simple<br>deux types? |

## Perspectives

- remise en cause de l'asymétrie par de nouvelles expériences biologiques
- modélisation du vieillissement par accumulation de déchets
- dynamique des mitochondries

# Plan

# Définition des PDP

## Davis (80's)

Classe générale de processus stochastiques hybrides de type non-diffusion : mouvement deterministe ponctué de sauts aléatoires

## Domaines d'application

ingénierie, optimisation, recherche opérationnelle, files d'attente, assurance, biologie, trafic internet, neurosciences, fiabilité dynamique . . .

# Dynamique

### Processus hybride $X_t = (m_t, y_t)$

- mode discret $m_t \in \{1, 2, \ldots, p\}$
- variables d'état euclidiennes $y_t \in \mathbb{R}^n$

### Caractéristiques locales dans le mode $m$

- $E_m$ ouvert de $\mathbb{R}^d$, $\partial E_m$ sa frontière, $\overline{E}_m$ sa fermeture, $E = \cup(\{m\} \times E_m)$ espace d'états
- Flot $\phi_m$: $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^d$ groupe d'homéomorphismes, mouvement déterministe
- Intensité $\lambda_m$: $\overline{E}_m \to \mathbb{R}_+$ intensité des sauts
- Noyau markovien $Q_m$ on $(\overline{E}_m, \mathcal{B}(\overline{E}_m))$ sélectionne les nouvelles positions après saut

# Deux types de sauts

- temps d'atteinte de la frontière $t^*(m, y)$ deterministe

$$t^*(m, y) = \inf\{t > 0 : \phi_m(y, t) \in \partial E_m\}$$

- loi du premier temps de saut $T_1$

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 > t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\int_0^t \lambda_m\left(\phi_m(y,s)\right) ds} & \text{si} \quad t < t^*(m, y) \\ 0 & \text{si} \quad t \geq t^*(m, y) \end{cases}$$

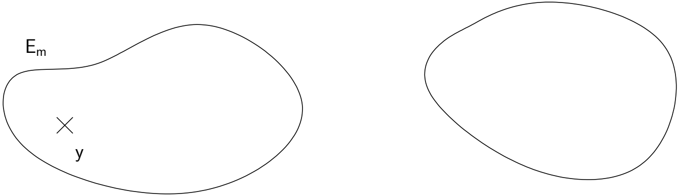
- $T_1$ a une densité sur $[0, t^*(m, y)[$ et un atome en $t^*(m, y)$:

$$\mathbb{P}_{(m,y)}(T_1 = t^*(m, y)) > 0$$

# Construction itérative

## Point de départ

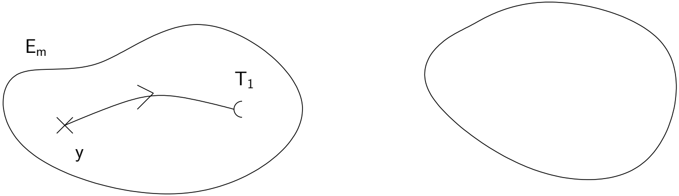
$$X_0 = Z_0 = (m, y)$$



# Construction itérative

$X_t$ suit le flot déterministe jusqu'au premier temps de saut $T_1 = S_1$

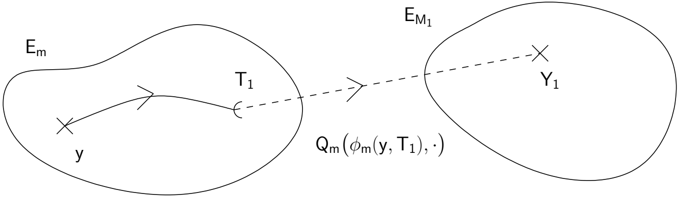
$$X_t = \big(m, \phi_m(y,t)\big), \quad t < T_1$$



# Construction itérative

Position et mode après-saut $Z_1 = (M_1, Y_1)$ tirés suivant la loi

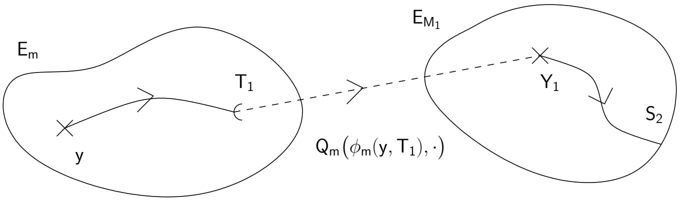
$$Q_m\big(\phi_m(y, T_1), \cdot\big)$$



# Construction itérative

$X_t$ suit le flot déterministe jusqu'au prochain temps de saut $T_2$

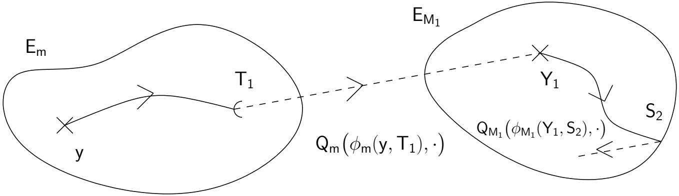
$$X_{T_1+t} = \big(M_1, \phi_{M_1}(Y_1, t)\big), \quad t < S_2 = T_2 - T_1$$



# Construction itérative

Position et mode après-saut $Z_2 = (M_2, Y_2)$ tirés suivant la loi

$$Q_{M_1}(\phi_{M_1}(Y_1, S_2), \cdot) \ldots$$



# Chaîne induite

$Z_n$ position et mode après le saut $n$
$S_n$ durée entre le saut $n$ et le saut $n-1$

**Propriété fondamentale**

$(Z_n, S_n)$ est une chaîne de Markov qui contient tout l'aléa du processus :
$X_t$ connu pour tout $t \Longrightarrow (Z_n, S_n)$ connus pour tout $n$
$(Z_n, S_n)$ connus pour tout $n \Longrightarrow X_t$ connu pour tout $t$

# Exemple Astrium

Structure de missile balistique stratégique soumis à corrosion

## Profil d'emploi

Stockage dans 3 environnements différentes avec durées aléatoires

1. atelier
2. sous-marin nucléaire en mission
3. sous-marin en cale sèche

Exigence du sûreté très forte

$\Downarrow$

Maîtriser l'évolution de l'épaisseur

# Dynamique du processus de dégradation

- Succession déterministe des environnements : $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \cdots$
- Temps aléatoire passé dans l'environnement $i$ loi $Exp(\lambda_i)$
- Protection anti-corrosion initiale d'une durée aléatoire suivant une loi de Weibul
- Equation de la perte d'épaisseur dans l'environnement $i$ :

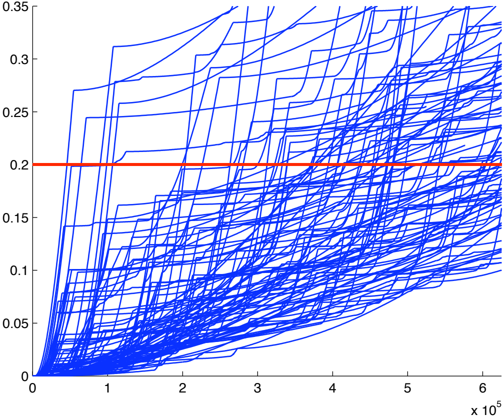
$$d_t = \rho_i \Big( t - \eta_i + \eta_i exp(-t/\eta_i) \Big)$$

- $\rho_i$ taux de corrosion stable aléatoire suivant une loi uniforme dépendant de l'environnement $i$
- $\eta_i$ durée de transition déterministe dans l'environnement $i$.

On dispose de valeurs numériques pour tous les paramètres.

Structure inutilisable si $d_t \geq 0.2mm$

# Exemples de trajectoires simulées



# Méthodes numériques

### Constat

Très peu de méthodes numériques pour les PDP dans la littérature [Costa Davis 88, 89]

### Objectif

Proposer des méthodes numériques

- adaptées aux spécificités des PDP
- avec des preuves (et des vitesses) de convergence
- utilisables en pratique

# Motivation : maintenance préventive

Machine pouvant tomber en panne

## Problème de maintenance

Trouver un équilibre optimal entre

- changer les pièces trop tôt/souvent
- ne rien faire jusqu'à la panne totale

## Problème mathématique

- arrêt optimal
- contrôle impulsionnel

# Problème d'arrêt optimal

- Fonction de performance $g$
- Horizon aléatoire : $N$-ème temps de saut $T_N$ du PDP
- $\mathcal{M}_N$ ensemble des temps d'arrêt $\tau \leq T_N$

## Problème d'arrêt optimal

- calculer la fonction valeur

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

- trouver un temps d'arrêt $\varepsilon$-optimal $\tau^*$ qui atteint $V(x) - \varepsilon$

# Construction itérative

[Gugerli,1986]

## Equation de programmation dynamique

- $v_N(Z_N) = g(Z_N)$
- $v_n(Z_n) = L(v_{n+1}, g)(Z_n)$ pour $n \leq N-1$

$$v_0(Z_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_x[g(X_\tau)]$$

$$\begin{aligned} & L(v_{n+1}, g)(Z_n) \\ & = \sup_{u \leq t^*(Z_n)} \Big\{ \mathbb{E}\Big[ v_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} + g\big(\phi(Z_n, u)\big) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} \;\Big|\; Z_n \Big] \Big\} \\ & \qquad \vee \; \mathbb{E}\Big[ v_{n+1}(Z_{n+1}) \;\Big|\; Z_n \Big] \end{aligned}$$

# Choix de la méthode de discrétisation

[Pagès 98], [Bally, Pagès 03, 05], [Pagès, Pham, Printems 04]...

## Quantification d'une variable aléatoire $X \in L^p(\mathbb{R}^d)$

Approcher $X$ par $\widehat{X}$ à support fini pour miniser $\|X - \widehat{X}\|_p$

- grille finie pondérée $\Gamma$ avec $|\Gamma| = K$
- $\widehat{X} = p_\Gamma(X)$ projection au plus proche voisin

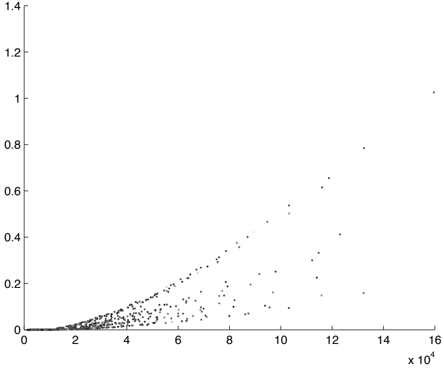
## Propriétés asymptotiques

Si $E[|X|^{p+\eta}] < +\infty$ alors

$$\lim_{K \to \infty} \min_{|\Gamma| \leq K} \|X - \widehat{X}^\Gamma\|_p \simeq K^{-1/d}$$

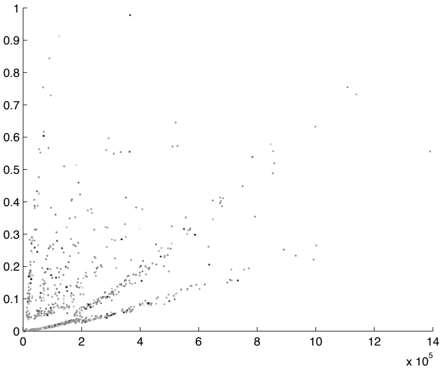
# Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 2 après le 1er saut



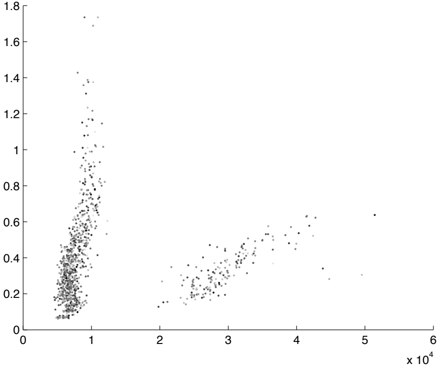
# Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 3 après le 2ème saut



# Grilles pour le processus de corrosion

Dans l'ambiance 1 après le 15ème saut



# Discrétisation

## Approximation de la fonction valeur

- $\widehat{v}_N(\widehat{Z}_N) = g(\widehat{Z}_N)$
- $\widehat{v}_n(\widehat{Z}_n) = \widehat{L}_d(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n)$ pour $n \leq N-1$

$$\begin{aligned}
&\widehat{L}_d(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n) \\
&= \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \Big\{ \mathbb{E}\Big[ v(\widehat{Z}_{n+1}) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}} + g\big(\phi(\widehat{Z}_n, u)\big) \mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \geq u\}} \mid \widehat{Z}_n \Big] \Big\} \\
&\qquad \vee \mathbb{E}\Big[ v(\widehat{Z}_{n+1}) \mid \widehat{Z}_n \Big]
\end{aligned}$$

# Vitesse de convergence

**Théorème**

Hypothèses de régularité Lipschitz sur $\phi$, $\lambda$, $Q$, $t^*$ et $g$

$$|v_0(x) - \widehat{v}_0(x)| \leq C\sqrt{EQ}$$

$C$ constante explicite,
$EQ$ erreur de quantification

$\sqrt{\cdot}$ due aux indicatrices

# Temps d'arrêt optimal

## Règle d'arrêt calculable $\hat{\tau}$

- construction itérative explicite
- pas de calculs supplémentaires
- vrai temps d'arrêt pour la filtration du processus $(X_t)$

## Théorème

Mêmes hypothèses

$$|v_0(x) - \mathbb{E}_x[g(X_{\hat{\tau}})]| \leq C_1 EV + C_2 \sqrt{EQ}$$

$C_1$, $C_2$ constantes explicites
$EV$ erreur de la fonction valeur
$EQ$ erreur de quantification

Autre approximation de la fonction valeur par Monte Carlo

# Politique de maintenance pour le modèle de corrosion

Une seule intervention avant la rupture ⇒ remise à neuf de la structure

### Optimisation de la maintenance : équilibre entre

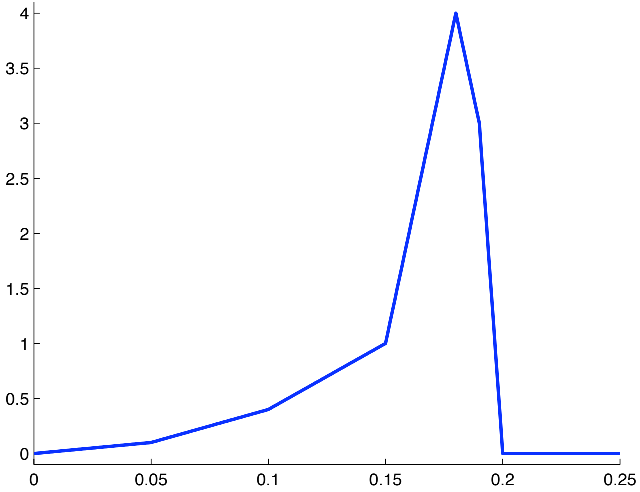
- une maintenance trop précoce coûteux
- une maintenance trop tardive dangereux

### Optimisation des marges

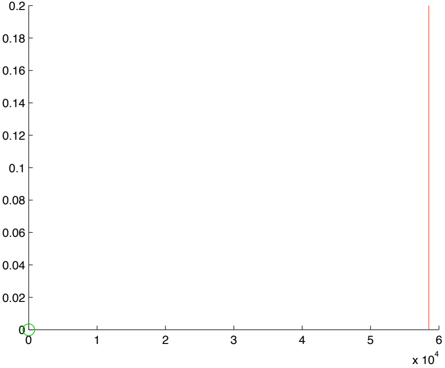
En phase de conception

- consolider les marges de dimensionnement par rapport aux spécifications
- assurer à 95% qu'aucune maintenance ne sera nécessaire avant la date objective contractuelle

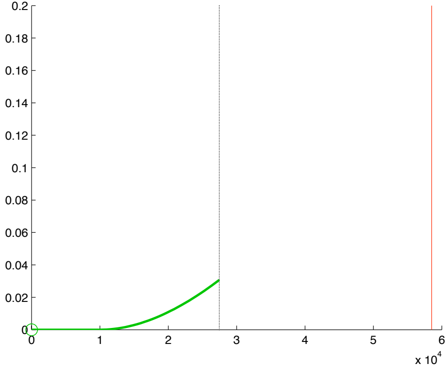
# Fonction de performance



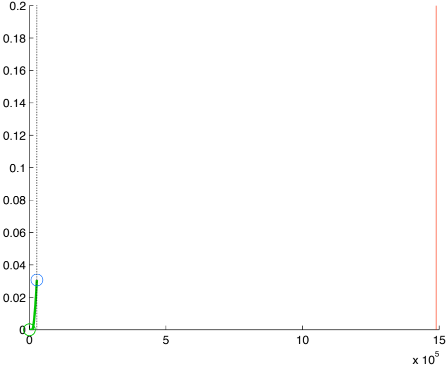
# Règle d'arrêt itérative



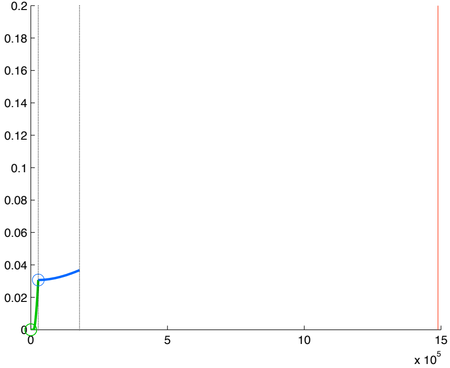
# Règle d'arrêt itérative



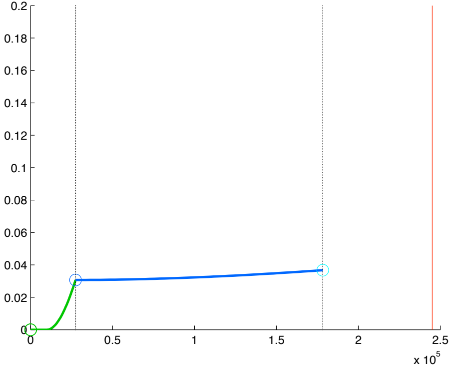
# Règle d'arrêt itérative



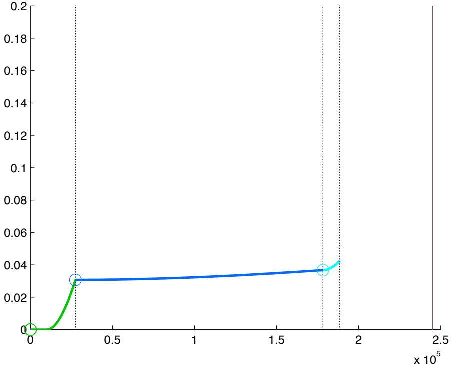
# Règle d'arrêt itérative



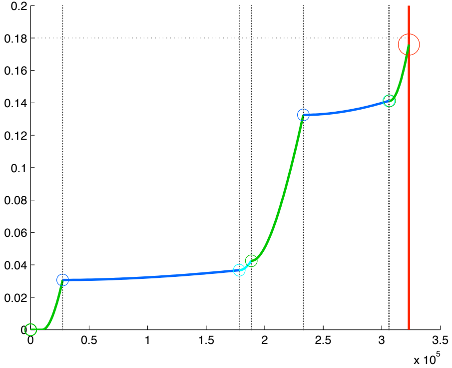
# Règle d'arrêt itérative



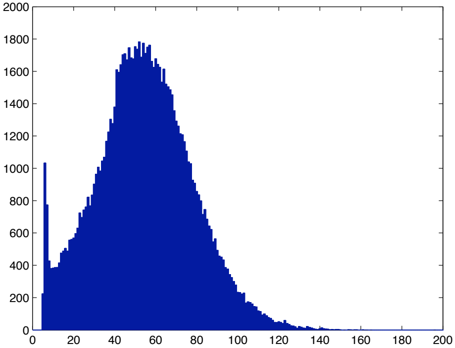
# Règle d'arrêt itérative



# Règle d'arrêt itérative



# Optimisation des marges




| Seuil | Probabilité |
|---|---|
| 5 ans | 0.0002 |
| 10 ans | 0.0304 |
| 15 ans | 0.0524 |
| 20 ans | 0.0793 |
| 40 ans | 0.2647 |
| 60 ans | 0.6048 |
| 80 ans | 0.8670 |
| 100 ans | 0.9691 |
| 150 ans | 0.9997 |

# Calcul de la fonction valeur

## Résultats numériques (vraie valeur : 4)

| Nombre de points dans les grilles de quantification | Fonction valeur approchée | Fonction valeur par Monte Carlo |
|---|---|---|
| 10 | 2.48 | 0.94 |
| 50 | 2.70 | 1.84 |
| 100 | 2.94 | 2.10 |
| 200 | 3.09 | 2.63 |
| 500 | 3.39 | 3.15 |
| 1000 | 3.56 | 3.43 |
| 2000 | 3.70 | 3.60 |
| 5000 | 3.82 | 3.73 |
| 8000 | 3.86 | 3.75 |

# Stratégie numérique générale

**Propriété**

Toute quantité concernant la loi du processus peut s'exprimer uniquement à l'aide de la suite $(Z_n, S_n)$

- trouver une expression (récursive) du problème en fonction de la suite $(Z_n, S_n)$
- discrétiser $(Z_n, S_n)$ pour obtenir une approximation numérique

# Autres résultats

- arrêt optimal sur un cas test de réservoir (128 modes)
- arrêt optimal sous observation partielle
- contrôle impulsionnel

# Autres résultats

- arrêt optimal sur un cas test de réservoir (128 modes)
- arrêt optimal sous observation partielle
- contrôle impulsionnel

- espérance de fonctionnelles de $X_t$ dépendant du temps
- distribution et moment de temps de sortie

# Conclusion et perspectives

## Avantages et inconvénients des méthodes numériques

- méthode utilisable en pratique
- temps de calcul on line/off line
- dimension

## Perspectives

- stratégie optimale pour le contrôle impulsionnel
- méthodes numériques pour les MDP
- pré-calcul d'équations différentielles matricielles