

Université Bordeaux 1  
Ecole doctorale mathématique et informatique

HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES  
Mathématiques appliquées

présentée par  
Benoîte de Saporta

Contributions à l'estimation et au contrôle  
de processus stochastiques

préparée chez Inria Bordeaux Sud-Ouest, Équipe CQFD  
et à l'Institut de Mathématiques de Bordeaux

version du 11 mars 2013

Rapporteurs

Oswaldo Luis do Valle COSTA	Rapporteur	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
Jean-François DELMAS	Rapporteur	Ecole Nationale des Ponts et Chaussées
Gilles PAGÈS	Rapporteur	Université Pierre et Maris Curie



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>1 Processus BAR et division cellulaire</b>	<b>7</b>
1.1 Motivation . . . . .	7
1.1.1 Le modèle historique . . . . .	7
1.1.2 Asymétrie de la division cellulaire . . . . .	8
1.1.3 Contribution . . . . .	9
1.2 Modélisation . . . . .	10
1.2.1 Structure des arbres binaires par générations . . . . .	10
1.2.2 Processus d'observation . . . . .	11
1.2.3 Processus BAR . . . . .	13
1.2.4 Hypothèses . . . . .	15
1.3 Principaux résultats . . . . .	16
1.3.1 Construction des estimateurs . . . . .	17
1.3.2 Convergence . . . . .	19
1.3.3 Normalité asymptotique et tests . . . . .	20
1.4 Stratégie de résolution . . . . .	21
1.4.1 Martingales sur un arbre binaire . . . . .	22
1.4.2 Lois des grands nombres pour les processus GW et BAR . . . . .	23
1.4.3 Vitesse de convergence des estimateurs . . . . .	26
1.4.4 Théorème central limite . . . . .	26
1.5 Extensions et application aux données E. coli . . . . .	27
1.5.1 Inférence pour les GW à deux types . . . . .	27
1.5.2 Inférence multi-arbre . . . . .	27
1.5.3 Application à E. coli . . . . .	28
1.6 Conclusion et perspectives . . . . .	30
<b>2 Méthodes numériques et contrôle des PDP</b>	<b>33</b>
2.1 Motivation . . . . .	33
2.1.1 Méthodes numériques pour le contrôle impulsionnel . . . . .	34
2.1.2 Contribution . . . . .	35
2.2 Processus markoviens déterministes par morceaux . . . . .	36
2.2.1 Définition d'un PDP . . . . .	36
2.2.2 Notations . . . . .	37
2.2.3 Hypothèses . . . . .	38
2.3 Arrêt optimal . . . . .	39

2.3.1	Stratégie de résolution . . . . .	39
2.3.2	Schéma d'approximation . . . . .	40
2.3.3	Principaux Résultats . . . . .	43
2.3.4	Comparaison avec la méthode de Costa et Davis . . . . .	46
2.4	Applications . . . . .	47
2.4.1	Implémentation . . . . .	47
2.4.2	Equipement optronique . . . . .	48
2.4.3	Structure soumise à corrosion . . . . .	50
2.4.4	Le cas test du réservoir . . . . .	54
2.5	Arrêt optimal sous observation partielle . . . . .	58
2.5.1	Processus d'observation et filtrage . . . . .	58
2.5.2	Programmation dynamique . . . . .	60
2.5.3	Schéma numérique . . . . .	60
2.6	Contrôle impulsionnel . . . . .	63
2.6.1	Formulation du problème . . . . .	63
2.6.2	Schéma numérique . . . . .	64
2.7	Conclusion et perspectives . . . . .	71
2.7.1	Arrêt optimal . . . . .	71
2.7.2	Observations partielles . . . . .	71
2.7.3	Contrôle impulsionnel . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Méthodes numériques et estimation des PDP</b>	<b>75</b>
3.1	Motivation . . . . .	75
3.1.1	Espérance de fonctionnelles . . . . .	75
3.1.2	Temps de sortie . . . . .	76
3.1.3	Contribution . . . . .	76
3.2	Espérance de fonctionnelles . . . . .	76
3.2.1	Méthode déterministe . . . . .	77
3.2.2	Méthode probabiliste . . . . .	79
3.2.3	Comparaison des deux méthodes . . . . .	80
3.3	Temps de sortie . . . . .	81
3.3.1	Fonction de survie . . . . .	81
3.3.2	Moments . . . . .	83
3.3.3	Application à l'exemple de corrosion . . . . .	83
3.4	Conclusion et perspectives . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Contrats industriels</b>	<b>87</b>
4.1	Astrium Space Transportation . . . . .	87
4.2	DCNS . . . . .	88
4.2.1	Modélisation . . . . .	89
4.2.2	Résultats . . . . .	90
4.3	EDF . . . . .	92
	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>

# Introduction

Mes premiers travaux en thèse à partir de septembre 2001 à l'Université de Rennes 1 ont porté sur les processus auto-régressifs à régime markovien (MS-AR). Il s'agit de processus stochastiques en temps discret. Les processus auto-régressifs linéaires forment la classe la plus simple de séries temporelles où l'observation au temps  $n + 1$  est une transformation affine aléatoire de l'observation au temps  $n$ . Quand la série change de régime au cours du temps, c'est-à-dire quand les coefficients aléatoires de la transformation affine forment une chaîne de Markov, on parle de processus auto-régressif à régime markovien. A l'aide de la théorie du renouvellement et de propriétés des processus de Markov, j'ai étudié la queue de la solution stationnaire des processus MS-AR, ce qui permet de caractériser la fréquence d'occurrence d'événements rares de type dépassement de seuils élevés. Ces travaux ont été publiés dans [dS03, dS05].

Par la suite, j'ai poursuivi mes recherches sur les processus à régime markovien en temps continu. Toujours pendant ma thèse, j'ai commencé par travailler avec mon directeur de thèse Jian-Feng Yao (Université Rennes 1 et University of Hong Kong) sur une extension de mes résultats sur les MS-AR à une classe de processus de diffusion de type Ornstein-Uhlenbeck dont les paramètres changent au cours du temps suivant une dynamique markovienne. Nous avons donné des conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une loi stationnaire à queue lourde [dSY05].

En collaboration avec Christophette Blanchet-Scalliet (Ecole Centrale Lyon), Rajna Gibson (Université de Genève), Etienne Tanré et Denis Talay (TOSCA, Inria Sophia Antipolis Méditerranée), lors de mon post doc chez Inria Sophia Antipolis, je me suis intéressée à un problème de contrôle stochastique issu de la finance faisant intervenir un processus de Black et Scholes à régime markovien. A chaque instant, un agent peut soit investir toute sa fortune dans un actif risqué suivant une dynamique de Black et Scholes à deux régimes (l'un favorable, l'autre défavorable), soit investir toute sa fortune dans un actif non risqué. Toute transaction est soumise à un coût proportionnel à la valeur échangée. L'agent souhaite alors maximiser l'espérance de l'utilité de sa richesse sur un horizon fixé. Nous avons entièrement caractérisé la fonction valeur de ce problème comme unique solution de viscosité d'un jeu d'équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, proposé un schéma d'approximation de cette fonction valeur et d'une stratégie de gestion proche de l'optimalité. Le but de ce travail était de comparer les performances de la stratégie mathématique optimale en présence d'erreurs de calibration des paramètres du modèle avec une stratégie de type moyenne mobile qui ne requiert aucune modélisation sous-jacente [BSGB<sup>+</sup>09].

Depuis septembre 2006, je suis maître de conférences à l'Université Montesquieu Bordeaux IV en mathématiques appliquées. Je suis membre du GREThA (groupe-ment de recherche en économie théorique et appliquée), de l'équipe *Probabilités et Statistique* de l'IMB (Institut de Mathématiques de Bordeaux) et de l'équipe Inria CQFD (contrôle de qualité et fiabilité dynamique). Depuis mon arrivée à Bordeaux, mes travaux de recherche se poursuivent dans deux directions principales : l'une concerne les processus auto-régressifs de bifurcation sur des arbres binaires et l'autre le développement d'outils numériques pour le contrôle des processus markoviens déterministes par morceaux. Il s'agit de processus en temps continu qui changent de régime de façon markovienne au cours du temps. Ce mémoire présente uniquement mes travaux réalisés à Bordeaux depuis 2006.

Le premier chapitre de ce mémoire concerne les processus auto-régressifs de bifurcation. Ce sont des travaux en collaboration avec Bernard Bercu (Université Bordeaux 1 et Inria Aléa), Anne Gégout-Petit (Université Bordeaux Ségalen et Inria CQFD) et Laurence Marsalle (Université Lille 1).

Les chapitres 2 et 3 proposent une boîte à outils numériques pour le contrôle et l'estimation de performances des processus markoviens déterministes par morceaux. Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec François Dufour (Institut Polytechnique de Bordeaux et Inria CQFD). Nous avons co-encadré deux thèses sur ce sujet : celle de Karen Gonzalez (2007-2010) et celle d'Adrien Brandejsky (2009-2012). Huilong Zhang (Université Bordeaux 1 et Inria CQFD) a aussi participé à certaines parties. Ces travaux ont été partiellement financés par l'ANR Fautocoes (Fault tolerant control for embedded systems, ANR-009-SEGI-004) du programme Arpège (2009-2013), et la thèse d'Adrien a été financée par Astrium.

Enfin, le chapitre 4 présente rapidement les contrats industriels auxquels j'ai participé avec Astrium, DCNS et EDF. Quelques nouveaux projets qui sont en train de démarrer sont mentionnés dans la conclusion.

# Chapitre 1

## Processus autorégressifs de bifurcation et division cellulaire

### 1.1 Motivation

Les processus autorégressifs de bifurcation permettent de modéliser des données dépendantes structurées en arbres binaires. Typiquement, il s'agit de données de division cellulaire. En effet, lors de son cycle de vie, une cellule se divise pour donner naissance à deux cellules filles, qui vont se diviser à leur tour et ainsi de suite. Leur arbre généalogique est ainsi un arbre binaire. On mesure une caractéristique sur une cellule et toutes ses descendantes : la durée de vie, la taille avant la division, le taux de croissance, ... tout en gardant les informations sur la généalogie des cellules. Les données ainsi récoltées sont donc bien structurées en arbres binaires, et elles ne sont pas indépendantes à cause des relations de filiation entre cellules issues d'un même ancêtre.

#### 1.1.1 Le modèle historique

Le premier modèle de processus autorégressif de bifurcation (BAR pour *bifurcating autoregressive* en anglais) a été introduit par Cowan et Staudte [CS86] en 1986. Il s'agit d'une extension du modèle autorégressif classique aux arbres binaires puisqu'on retrouve cette structure sur chaque branche de l'arbre généalogique. On numérote le premier ancêtre 1, puis on numérote  $2k$  et  $2k + 1$  les deux filles de la cellule  $k$ , voir la Figure 1.1 pour une illustration de la numérotation d'une généalogie. On note  $X_k$  la caractéristique quantitative de la cellule  $k$ . Le processus BAR est alors défini par

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k}, \\ X_{2k+1} &= a + bX_k + \epsilon_{2k+1}, \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels à estimer et le bruit  $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$  est une suite de gaussiennes bivariées centrées indépendantes et identiquement distribuées telles que  $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}^2] = \mathbb{E}[\epsilon_{2k+1}^2] = \sigma^2$  et  $\mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1}] = \rho$ .

Ce qui intéresse principalement Cowan et Staudte dans ce modèle est la mesure des corrélations entre cellules d'une même population. Si l'on suppose que  $X_1$  est

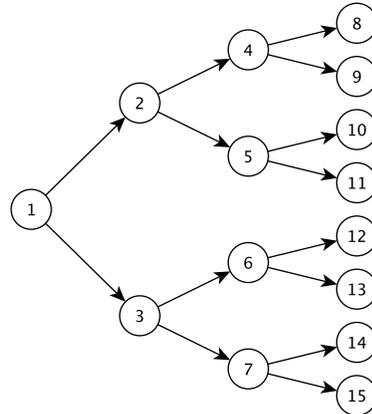


FIGURE 1.1 – Arbre généalogique

une gaussienne d'espérance  $a/(1-b)$  et de variance  $\sigma^2/(1-b^2)$  alors on est en régime stationnaire et en particulier toutes les variables aléatoires  $X_k$  ont même espérance et même variance. On peut alors interpréter le paramètre  $b$  comme la corrélation mère-fille et  $\phi = b^2 + (1-b^2)\rho/\sigma^2$  comme la corrélation entre soeurs. Toutes les autres corrélations s'expriment à l'aide de ces deux paramètres : la corrélation entre cousines est  $b^2\phi$ , celle entre grand-mère et petite fille  $b^2, \dots$ . Le but de la modélisation BAR est d'expliquer la part de ces corrélations qui vient du fait que deux cellules soeurs grandissent dans le même environnement (coefficient  $\rho$  venant du bruit) et la part purement héréditaire (coefficient  $b$ ).

Les premiers articles sur les processus BAR proposent des estimateurs par maximum de vraisemblance pour ces coefficients de corrélation et des calculs de variance asymptotique lorsqu'on observe un seul grand arbre [CS86, Hug96a, Hug96b, HB00] ou bien un grand nombre de petits arbres [HS94, SZH96, BH98, HB99]. Différentes variantes sont également proposées à commencer par la constructions d'estimateurs robustes aux données aberrantes [HS94, Hug96a] et l'étude d'estimateurs des moindres carrés [ZB05a]. Le bruit est toujours supposé indépendant et identiquement distribué, mais pas nécessairement gaussien. Il peut être elliptiquement symétrique [Hug96a], satisfaire seulement à des condition de moments [BZ04, ZB05a], être exponentiel [ZB05b], Weibull [Zha11] ou à densité [HBY09]. Le modèle d'origine a également été étendu à des ordres plus élevés : la caractéristique quantitative d'une cellule peut alors dépendre de sa mère et de sa grand-mère ainsi que de ses ancêtres d'ordre supérieur [HB99, HB00, ZB05a]. Enfin, le modèle est étendu au cas bivarié où l'on s'intéresse à deux caractéristiques pour chaque cellule et leur relation de dépendance [BH98].

### 1.1.2 Asymétrie de la division cellulaire

Une deuxième série d'articles ne s'intéresse plus aux corrélations dans la généalogie, mais à l'éventuelle asymétrie de la division cellulaire. L'origine de ces travaux vient d'une étude du vieillissement de la bactérie *Escherichia coli* [SMPT05]. *E. coli* est une bactérie de forme allongée qui se divise de façon apparemment symétrique

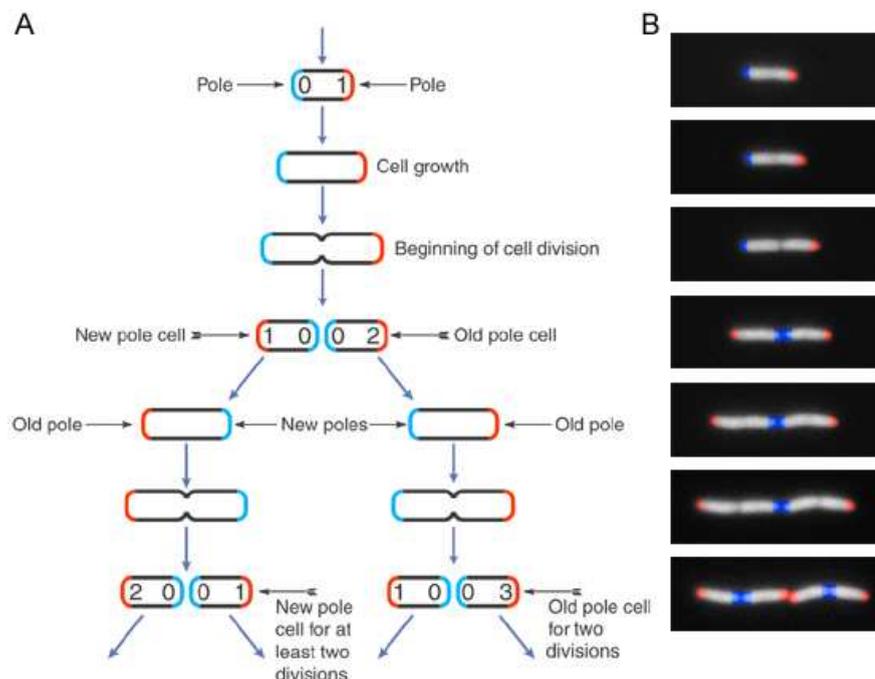


FIGURE 1.2 – Division d’E. coli avec anciens pôles (rouge) et nouveaux pôles (bleu). Figure extraite de [SMPT05]

en son milieu. Lors de cette division, chacune des deux cellules filles hérite d’une ancienne membrane de sa mère à une extrémité ou pôle et crée une nouvelle membrane à l’autre pôle. On peut ainsi donner un âge aux cellules en comptant depuis combien de divisions leur ancien pôle perdure, voir Figure 1.2. L’imagerie permet de détecter quelle cellule a hérité de l’ancien pôle de sa mère et quelle cellule du nouveau. On peut donc définir un nouveau modèle de BAR asymétrique, où cette fois-ci les numéros  $2k$  et  $2k + 1$  ne sont pas attribués arbitrairement aux deux filles de la cellule  $k$ , mais par exemple la fille paire  $2k$  est celle qui a hérité du nouveau pôle tandis que la fille impaire  $2k + 1$  a hérité de l’ancien pôle. Ce modèle a été introduit par Guyon [GBP<sup>+</sup>05, Guy07]

$$\begin{cases} X_{2k} = a + bX_k + \epsilon_{2k}, \\ X_{2k+1} = c + dX_k + \epsilon_{2k+1}. \end{cases}$$

Les deux filles dépendent maintenant de la mère à travers deux jeux de paramètres différents  $(a, b)$  et  $(c, d)$ . Le but est maintenant d’estimer les quatre paramètres  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  pour pouvoir tester la symétrie du modèle. Guyon inscrit ce modèle dans une classe plus générale de chaînes de Markov bifurquantes (voir aussi [ZB05b] définissant un cadre markovien bifurquant pour les BAR). Ce modèle a ensuite été enrichi dans [DM10] pour prendre en compte la mort possible des cellules avant la fin de l’observation.

### 1.1.3 Contribution

Les travaux présentés ici ont été réalisés en collaboration avec Bernard Bercu (Université Bordeaux 1 et Inria Aléa) et Anne Gégout-Petit (Université Bordeaux

Ségalen et INRIA CQFD) [BdSG09], puis avec Anne Gégout-Petit et Laurence Marsalle (Université Lille 1) [dSGP+11, dSGP+12, dSGP+13a, dSGP+13b]. Ils se placent tous dans le cadre du modèle BAR asymétrique.

Dans [BdSG09], nous nous sommes affranchis de l’hypothèse d’indépendance sur la suite des bruits  $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$ . Nous l’avons remplacée par une structure d’accroissements de martingale, avec des hypothèses de moments conditionnels relativement faibles. Nous avons développé des méthodes de martingales pour étudier le comportement asymptotique de nos estimateurs. Les méthodes martingales avaient déjà été utilisées dans le cadre des BAR pour montrer la normalité asymptotique [Hug96a, HB00, HBY09] mais pas pour obtenir des vitesses de convergence fines des estimateurs.

Lorsque nous avons voulu appliquer notre procédure d’estimation aux données de [SMPT05], nous avons été confrontées à deux nouveaux problèmes. D’une part, les généalogies observées ne sont pas complètes (certaines cellules peuvent sortir du champ d’observation), d’autre part elles ne présentent pas plus de 9 générations de cellules chacune, ce qui peut être trop faible pour assurer une bonne puissance des tests de symétrie. Nous avons donc proposé dans [dSGP+11, dSGP+12] un modèle pour les données présentes ou absentes de la généalogie. Dans la lignée de [DM10], il s’agit d’un processus de Galton Watson. Nous lui avons ajouté une dépendance en le type de la cellule mère. Nous avons alors proposé une nouvelle analyse asymptotique des estimateurs en tenant compte de ce schéma particulier d’observation. Pour contourner le problème d’un trop petit nombre de générations observées, nous avons proposé une nouvelle procédure d’estimation prenant en compte plusieurs arbres [dSGP+13b] en nombre fixé. Contrairement à [HS94, SZH96, BH98, HB99], l’asymptotique n’est pas en nombre d’arbres, mais bien en nombre total de cellules observées.

Enfin, nous avons proposé un modèle de BAR à coefficients aléatoires, toujours sous observation partielle du processus et dans un cadre asymétrique. Notre modèle est plus général que ceux proposés par [BH99, BZ04, Bla12a, BB12] car nous autorisons des corrélations dans les sources d’aléa. Notre approche combine les méthodes martingales utilisées dans [BdSG09, dSGP+11, dSGP+12] avec l’approche chaîne de Markov bifurquante de [Guy07, DM10]. Nos résultats sont détaillés dans les sections suivantes.

## 1.2 Modélisation

Nous commençons par introduire quelques notations sur les arbres binaires, puis nous définissons le processus d’observation et les différents processus BAR que nous avons étudiés.

### 1.2.1 Structure des arbres binaires par générations

Les premiers travaux de la littérature sur les processus BAR ne prennent pas complètement en compte la structure d’arbre binaire des données, dans la mesure ou

les observations sont rangées dans un vecteur (gaussien) et l'asymptotique considérée est simplement le nombre de données observées. Nos travaux adoptent un autre point de vue, dans la lignée de [Guy07] : on considère que les données arrivent génération par génération, et notre asymptotique est alors le nombre de générations. Il semble logique en effet de considérer ensemble les cellules d'une même génération qui ont été obtenues à partir de l'ancêtre originel par un même nombre de divisions donc d'itération de notre modèle récursif. Nous introduisons une première série de notations pour classer les données par génération.

Rappelons que l'ancêtre originel est numéroté 1 et que les deux filles de l'individu  $k$  sont numérotées  $2k$  et  $2k + 1$ . Réciproquement, la mère de l'individu  $k$  est  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$  (où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière), sa grand-mère  $\lfloor \frac{k}{4} \rfloor$  et plus généralement son ancêtre à  $\ell$  générations est  $\lfloor \frac{k}{2^\ell} \rfloor$ . Comme nous nous intéressons à des BAR asymétriques, nous supposons également que chaque individu a un *type* (par exemple, correspondant à l'héritage de l'ancien pôle ou du nouveau pôle de la cellule mère pour *E. coli*). Ce type est directement encodé dans la numérotation des individus : nous supposons que les filles paires sont de type 0 et les filles impaires de type 1. Ainsi,  $2k$  est la fille de type 0 de l'individu  $k$  et  $2k + 1$  est sa fille de type 1.

Pour tout  $n \geq 0$ , on appelle  $\mathbb{G}_n$  la  $n$ -ème génération des descendants de l'individu d'origine

$$\mathbb{G}_n = \{2^n, 2^n + 1, \dots, 2^{n+1} - 1\}.$$

En particulier,  $\mathbb{G}_0 = \{1\}$  est la génération du seul ancêtre initial et  $\mathbb{G}_1 = \{2, 3\}$  est la première génération de ses filles. On note

$$\mathbb{T}_n = \bigcup_{\ell=0}^n \mathbb{G}_\ell$$

le sous arbre de tous les individus jusqu'à la génération  $n$  comprise et  $\mathbb{T} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{G}_n = \bigcup_{n \geq 0} \mathbb{T}_n = \mathbb{N}^*$  l'arbre complet, voir Figure 1.3 pour une illustration. Le cardinal de  $\mathbb{G}_n$  est  $|\mathbb{G}_n| = 2^n$  et celui de  $\mathbb{T}_n$  est  $|\mathbb{T}_n| = 2^{n+1} - 1$ .

### 1.2.2 Processus d'observation

Dans les données expérimentales comme celles de [SMPT05], les généalogies observées sont souvent incomplètes car les cellules peuvent sortir du champ d'observation ou se superposer. Il est donc nécessaire de prendre en compte ce phénomène d'observation partielle dans notre procédure d'estimation. Ce processus d'observation doit être compatible avec la structure d'arbre binaire des données, et autoriser une éventuelle asymétrie en fonction du type de la mère et du type des filles. Pour cela, nous proposons de le modéliser par un processus de Galton Watson (GW) à deux types, voir par exemple [Har63] pour une description générale de ces processus.

#### Processus GW à deux types

Le processus d'observation est noté  $(\delta_k)_{k \in \mathbb{T}}$ . Si la cellule  $k$  est observée, on aura  $\delta_k = 1$ , sinon  $\delta_k = 0$ . On le construit récursivement de la façon suivante. On suppose

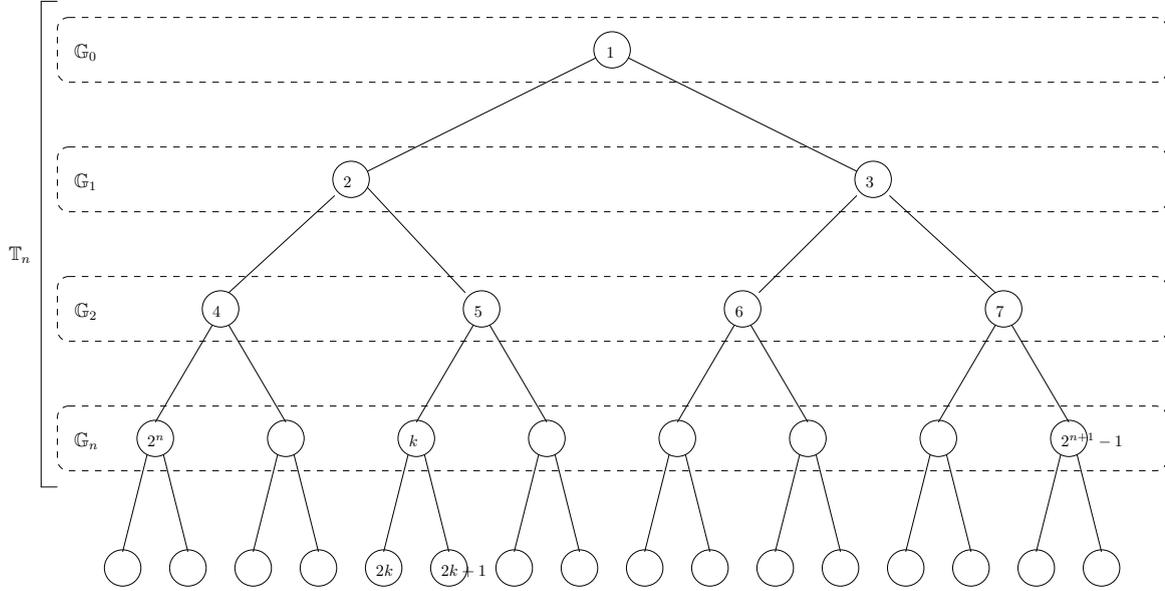


FIGURE 1.3 – Arbre généalogique et générations

que  $\delta_2 = \delta_3 = 1$ <sup>1</sup> et pour tout  $k \geq 4$ , on pose

$$\delta_{2k} = \delta_k \zeta_k^0, \quad \delta_{2k+1} = \delta_k \zeta_k^1,$$

où  $(\zeta_k = (\zeta_k^0, \zeta_k^1))_{k \geq 2}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans  $\{0, 1\}^2$ ,  $\zeta_k^i$  étant le nombre de descendants de type  $i$  de l'individu  $k$ . La loi de  $\zeta_k$  dépend en outre du type de l'individu  $k$ . Pour  $k$  pair (0) et impair (1) respectivement, elle est donnée par les fonctions génératrices

$$\begin{aligned} f^{(0)}(s_0, s_1) &= p^{(0)}(0, 0) + p^{(0)}(1, 0)s_0 + p^{(0)}(0, 1)s_1 + p^{(0)}(1, 1)s_0s_1, \\ f^{(1)}(s_0, s_1) &= p^{(1)}(0, 0) + p^{(1)}(1, 0)s_0 + p^{(1)}(0, 1)s_1 + p^{(1)}(1, 1)s_0s_1, \end{aligned}$$

où  $p^{(i)}(j_0, j_1)$  est ainsi la probabilité qu'un individu de type  $i$  donne naissance à  $j_0$  fille de type 0 et  $j_1$  fille de type 1. Ceci définit complètement la suite  $(\delta_k)_{k \geq 2}$  qui est bien à valeurs dans  $\{0, 1\}$ . De par sa construction multiplicative, cette suite vérifie la propriété suivante, cohérente avec les données expérimentales : si l'individu  $k$  n'est pas observé ( $\delta_k = 0$ ), alors ses deux filles ne sont pas observées non plus ( $\delta_{2k} = \delta_{2k+1} = 0$ , ce qui peut aussi se traduire par  $\delta_{2k+i} = \delta_k \delta_{2k+i}$ ).

On définit les ensembles des individus observés par génération et pour les sous-arbres par

$$\mathbb{G}_n^* = \{k \in \mathbb{G}_n : \delta_k = 1\}, \quad \mathbb{T}_n^* = \{k \in \mathbb{T}_n : \delta_k = 1\}$$

1. En pratique, si la cellule à l'origine de la colonie est bien observée, sa caractéristique quantitative ne l'est pas forcément, car cette cellule n'a pas nécessairement été observée depuis sa naissance, rendant le calcul de son taux de croissance (par exemple) impossible. Faire démarrer le processus d'observation par les cellules 2 et 3 permet aussi d'éviter d'attribuer un type à la cellule mère d'origine.

respectivement. Les cardinaux de ces ensembles sont maintenant des variables aléatoires, ce qui va compliquer notre étude asymptotique des estimateurs. En particulier, il est possible que  $|\mathbb{G}_n^*|$  s'annule à partir d'un certain rang.

Le processus  $(\mathbf{Z}_n)_{n \geq 1}$  comptabilisant les individus de chaque type par génération et défini par  $\mathbf{Z}_n = (Z_n^0, Z_n^1)$  où

$$Z_n^i = \sum_{k \in \mathbb{G}_{n-1}} \delta_{2k+i}$$

est un processus de Galton Watson à deux types (type 0 et type 1) dont le comportement asymptotique est donné par sa matrice de descendance

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{pmatrix},$$

où  $p_{ij}$  est le nombre moyen de descendants de type  $j$  d'un individu de type  $i$  :  $p_{i0} = p^{(i)}(1, 0) + p^{(i)}(1, 1)$  et  $p_{i1} = p^{(i)}(0, 1) + p^{(i)}(1, 1)$ . On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble d'extinction de ce processus

$$\mathcal{E} = \bigcup_{n \geq 1} \{|\mathbb{G}_n^*| = 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \{\mathbf{Z}_n = (0, 0)\},$$

et  $\mathcal{E}^c$  son complémentaire. On se place dans le cas sur-critique pour assurer que l'extinction du processus d'observation n'est pas presque sûre. Tous nos résultats asymptotiques seront conditionnés à cette non-extinction.

### Processus GW simplifié

Pour l'étude des BAR à coefficients aléatoires, nous avons en fait utilisé un modèle d'observation simplifié identique à celui de [DM10] où la loi des variables aléatoires  $\zeta_k = (\zeta_k^0, \zeta_k^1)$  ne dépend plus du type de  $k$ . Leur fonction génératrice s'écrit alors simplement

$$f(s_0, s_1) = p(0, 0) + p(1, 0)s_0 + p(0, 1)s_1 + p(1, 1)s_0s_1,$$

où  $p(j_0, j_1)$  est la probabilité de donner naissance à  $j_0$  fille de type 0 et  $j_1$  fille de type 1. La suite  $(|\mathbb{G}_n^*|)_{n \geq 0}$  est alors un processus GW standard dont le comportement asymptotique est régi par le nombre moyen  $\pi$  de descendants de chaque individu :  $\pi = p(1, 0) + p(0, 1) + 2p(1, 1)$ .

### 1.2.3 Processus BAR

Nous avons étudié trois types de processus BAR asymétriques : le BAR d'ordre  $p$  (sous observation totale) dans [BdSG09], le BAR d'ordre 1 (sous observation partielle) dans [dSGP<sup>+</sup>11, dSGP<sup>+</sup>12, dSGP<sup>+</sup>13b] ainsi qu'un modèle d'ordre 1 à coefficients aléatoires (sous observation partielle) dans [dSGP<sup>+</sup>13a]. Si par un jeu de notations on peut unifier les trois écritures de ces processus, leur traitement statistique respectif garde certaines spécificités incontournables.

### Processus BAR(1)

Commençons définir le processus BAR asymétrique d'ordre 1. On se donne un ancêtre  $X_1$  et une suite de bruits  $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$ . Le processus BAR est défini par

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k}, \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1}. \end{cases} \quad (1.1)$$

### Processus BAR(p)

Le modèle BAR(p) ( $p \geq 1$ ) est défini par la donnée des ancêtres des  $p - 1$  premières générations  $\{X_k, 1 \leq k \leq 2^p - 1\}$  et d'une suite de bruits  $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$ . Il se construit récursivement en suivant la formule

$$\begin{cases} X_{2k} &= u_0 + \sum_{r=1}^p u_r X_{\lfloor \frac{k}{2^{r-1}} \rfloor} + \epsilon_{2k}, \\ X_{2k+1} &= v_0 + \sum_{r=1}^p v_r X_{\lfloor \frac{k}{2^{r-1}} \rfloor} + \epsilon_{2k+1}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Comme pour les processus autorégressifs standards, on peut récrire ce modèle comme un BAR d'ordre 1 multidimensionnel

$$\begin{cases} \mathbb{X}_{2k} &= \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbb{X}_k + \boldsymbol{\epsilon}_{2k}, \\ \mathbb{X}_{2k+1} &= \mathbf{c} + \mathbf{d}\mathbb{X}_k + \boldsymbol{\epsilon}_{2k+1}, \end{cases}$$

où  $\mathbb{X}_k = (X_k, X_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}, \dots, X_{\lfloor \frac{k}{2^{p-1}} \rfloor})^t$ ,  $\mathbf{a} = u_0 \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{c} = v_0 \mathbf{e}_1$ ,  $\boldsymbol{\epsilon}_{2k+i} = \epsilon_{2k+i} \mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^p$  :  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^t$  et  $\mathbf{b}$  et  $\mathbf{d}$  sont les matrices compagnon

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ici la principale difficulté à gérer est le caractère multidimensionnel des différentes variables. Il est important de remarquer que notre choix de notations par génération se prête particulièrement bien au passage multidimensionnel si l'on prend quelques bonnes précautions, voir le paragraphe 1.3.1.

### Processus R-BAR

Enfin, notre processus BAR à coefficients aléatoires est défini par la donnée d'un ancêtre initial  $X_1$ , de deux suites de bruits  $(\varepsilon_{2k}, \varepsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$  et  $(\eta_{2k}, \eta_{2k+1})_{k \geq 1}$  et l'équation récursive

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + (b + \eta_{2k})X_k + \varepsilon_{2k}, \\ X_{2k+1} &= c + (d + \eta_{2k+1})X_k + \varepsilon_{2k+1}. \end{cases} \quad (1.3)$$

On peut également le récrire sous une forme similaire au BAR(1) de la façon suivante :

$$\begin{cases} X_{2k} &= a + bX_k + \epsilon_{2k}, \\ X_{2k+1} &= c + dX_k + \epsilon_{2k+1}, \end{cases}$$

avec  $\epsilon_{2k+i} = \varepsilon_{2k+i} + \eta_{2k+i}X_k$ . Ici on retrouve l'autorégression à l'intérieur du bruit ce qui pose de vrais problèmes et impose un changement d'approche par rapport au traitement du processus BAR standard à coefficients fixes.

### 1.2.4 Hypothèses

Pour conclure ce paragraphe de présentation de nos modèles, nous énonçons les hypothèses sous lesquelles nous nous sommes placées, principalement celles concernant les différentes suites de bruits. Comme énoncé à la section 1.2.2, on suppose tout d'abord que notre processus de Galton Watson à deux types est en régime sur-critique. Ceci se caractérise par la valeur propre dominante  $\pi$  de la matrice de descendance  $\mathbf{P}$  du processus, voir [Har63].

**(H.GW)** *Les coefficients  $p_{ij}$  de la matrice de descendance  $\mathbf{P}$  sont strictement positifs et son rayon spectral  $\pi$  est strictement supérieur à 1.*

On suppose ensuite naturellement que le processus GW qui génère les observations et le processus BAR sont indépendants.

**(H.I)** *Le processus  $(\delta_k)_{k \geq 2}$  est indépendant des suites  $(X_k)_{k \geq 1}$  et  $(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$  (et des suites  $(\varepsilon_{2k}, \varepsilon_{2k+1})_{k \geq 1}$  et  $(\eta_{2k}, \eta_{2k+1})_{k \geq 1}$  le cas échéant).*

Passons maintenant aux hypothèses sur le BAR lui-même. La première est une condition de type stabilité du BAR qui garantit que le processus n'explose pas. Sa formulation est légèrement différente dans les trois cas étudiés, mais l'idée est la même : la récursion doit être globalement contractante, ce qui impose une condition sur le coefficient multiplicatif.

**(H.C)-BAR(1)** *On suppose que  $\max\{|b|, |d|\} < 1$ .*

**(H.C)-BAR(p)** *On suppose que  $\max\{\|\mathbf{b}\|, \|\mathbf{d}\|\} < 1$ .*

**(H.C)-R-BAR** *Il existe  $\kappa \geq 1$  tel que*

$$\frac{p(1,0) + p(1,1)}{\pi} \mathbb{E}[(b + \eta_2)^{4\kappa}] + \frac{p(0,1) + p(1,1)}{\pi} \mathbb{E}[(d + \eta_3)^{4\kappa}] < 1. \quad (1.4)$$

La dernière formulation pour le processus BAR à coefficients aléatoires est à première vue de nature assez différente des deux autres puisqu'elle fait intervenir les coefficients du processus d'observation. On aurait pu la remplacer par l'hypothèse plus forte

$$\mathbb{E}[(b + \eta_2)^{4\kappa}] < 1, \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[(d + \eta_3)^{4\kappa}] < 1.$$

L'hypothèse (1.4) est en fait plus faible que les trois autres, puisque dans un cadre complètement observé avec coefficients fixes ( $\eta = 0$ ) elle deviendrait  $(b^s + d^s)/2 < 1$  pour un certain  $s$ . L'origine de cette formulation sera expliquée au paragraphe 1.4.2, ce qui permettra également de comprendre pourquoi elle est très probablement plus proche de l'optimalité que les autres. L'intérêt principal des deux premières formulations est de pouvoir faire disparaître le caractère asymétrique du processus par une majoration par une constante unique. Dans le cadre des coefficients aléatoires, une telle majoration presque sûre n'est pas raisonnable, d'où un changement d'approche menant à une nouvelle formulation de l'hypothèse de non explosion du BAR.

En ce qui concerne les suites de bruit, nous ne faisons pas d'hypothèse sur leur loi. On se donne d'abord des conditions de moment.

**(H.B1)** *Les variables aléatoires  $X_1$  ( $X_k$ , pour  $k \leq 2^p - 1$  dans le cadre  $\text{BAR}(p)$ )  $\epsilon_k$ ,  $\varepsilon_k$  et  $\eta_k$  ont des moments jusqu'à l'ordre  $4\gamma$  avec  $\gamma \geq 1$ .*

On précise ensuite la structure de dépendance. Pour cela, on introduit la filtration naturelle  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$  processus BAR vu génération par génération

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \in \mathbb{T}_n),$$

ainsi que la filtration du processus observé  $\mathbb{F}^\mathcal{O} = (\mathcal{F}_n^\mathcal{O})_{n \geq 0}$  définie par

$$\mathcal{F}_n^\mathcal{O} = \sigma(\delta_k X_k, k \in \mathbb{G}_n) \vee \sigma(\delta_k, k \in \mathbb{T}).$$

Ici encore, les hypothèses de dépendance du bruit sont différentes pour les cas coefficients fixes et coefficients aléatoires. Pour les coefficients aléatoires, le bruit est indépendant et identiquement distribué. Dans les autres cas, on suppose seulement une indépendance des paires de soeurs d'une même génération conditionnellement aux générations précédentes.

**(H.B2)-BAR(1,p)** *Pour tout  $n \geq 1$ , les vecteurs  $\{(\epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1}), k \in \mathbb{G}_n\}$  sont indépendants conditionnellement à  $\mathcal{F}_n$ .*

**(H.B2)-R-BAR** *Les vecteurs  $(\epsilon_{2k}, \eta_{2k}, \epsilon_{2k+1}, \eta_{2k+1})_{k \geq 1}$  sont indépendants et identiquement distribués. Ils sont également indépendants de  $X_1$ .*

Pour finir, on introduit quelques notations et hypothèses supplémentaires sur les moments du bruit.

**(H.B3)-BAR(1,p)** *Pour tous  $k$  dans  $\mathbb{G}_n$  et  $i$  dans  $\{0, 1\}$ , on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\epsilon_{2k+i} \mid \mathcal{F}_n] &= 0, & \mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}^2 \mid \mathcal{F}_n] &= \sigma^2, & \mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}^4 \mid \mathcal{F}_n] &= \tau^4, \\ \mathbb{E}[\epsilon_{2k}\epsilon_{2k+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \rho, & \mathbb{E}[\epsilon_{2k}^2\epsilon_{2k+1}^2 \mid \mathcal{F}_n] &= \nu^2. \end{aligned}$$

*Si de plus  $\gamma \geq 2$ , on a aussi*

$$\mathbb{E}[\epsilon_{2k+i}^8 \mid \mathcal{F}_n] = \phi^8, \quad \mathbb{E}[\epsilon_{2k}^4\epsilon_{2k+1}^4 \mid \mathcal{F}_n] = \lambda^4.$$

**(H.B3)-R-BAR** *On pose*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varepsilon_2] = \mathbb{E}[\varepsilon_3] &= 0, & \mathbb{E}[\varepsilon_2^2] = \mathbb{E}[\varepsilon_3^2] &= \sigma_\varepsilon^2, & \mathbb{E}[\varepsilon_2\varepsilon_3] &= \rho_\varepsilon, \\ \mathbb{E}[\eta_2] = \mathbb{E}[\eta_3] &= 0, & \mathbb{E}[\eta_2^2] = \mathbb{E}[\eta_3^2] &= \sigma_\eta^2, & \mathbb{E}[\eta_2\eta_3] &= \rho_\eta, \end{aligned}$$

et pour  $(i, j) \in \{0, 1\}$

$$\mathbb{E}[\varepsilon_{2+i}\eta_{2+j}] = \rho_{ij}, \quad \rho = \frac{1}{2}(\rho_{01} + \rho_{10}).$$

En particulier, le processus de bruit sommé de génération en génération  $(\sum_{k \in \mathbb{T}_n} \epsilon_k)_{n \geq 1}$  est une martingale dans les filtrations  $\mathbb{F}$  et  $\mathbb{F}^\mathcal{O}$ .

### 1.3 Principaux résultats

Notre contribution principale est l'étude des propriétés asymptotiques fines d'estimateurs pour les différents paramètres des processus BAR : les paramètres  $\boldsymbol{\theta} = (a, b, c, d)^t$  de l'autorégression ainsi que les moments du bruit qui sont utiles pour la construction de tests.

### 1.3.1 Construction des estimateurs

Dans le cadre partiellement observé, les données dont nous disposons sont les deux suites  $(\delta_k)_{k \geq 1}$  et  $(\delta_k X_k)_{k \geq 1}$ . Rappelons également que l'on considère que les données sont regroupées par génération.

#### Estimation de $\theta$

Pour le coefficient  $\theta = (a, b, c, d)^t$ , nous avons choisi l'estimateur des moindres carrés  $\hat{\theta}_n = (\hat{a}_n, \hat{b}_n, \hat{c}_n, \hat{d}_n)$  défini par

$$\hat{\theta}_n = \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} (\delta_{2k} X_{2k}, \delta_{2k} X_k X_{2k}, \delta_{2k+1} X_{2k+1}, \delta_{2k+1} X_k X_{2k+1})^t, \quad (1.5)$$

où

$$\mathbf{S}_{n-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{n-1}^0 & 0 \\ 0 & \mathbf{S}_{n-1}^1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_{n-1}^i = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k+i} \begin{pmatrix} 1 & X_k \\ X_k & X_k^2 \end{pmatrix}.$$

Dans le cadre BAR(p),  $\theta = (a, \mathbf{b}_1, c, \mathbf{d}_1)^t = (u_0, \dots, u_p, v_0, \dots, v_p)^t$  (où  $\mathbf{b}_1$  est la première ligne de la matrice  $\mathbf{b}$  et de même pour  $\mathbf{d}$ ) est un vecteur de taille  $2(p+1)$  et son estimateur s'écrit exactement comme ci-dessus en remplaçant  $X_k$  par  $\mathbb{X}_k^t$  (et en gardant  $X_{2k}$  et  $X_{2k+1}$ ) dans (1.5) et en prenant

$$\mathbf{S}_{n-1}^i = \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \delta_{2k+i} \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{X}_k^t \\ \mathbb{X}_k & \mathbb{X}_k \mathbb{X}_k^t \end{pmatrix}.$$

Dans toute la suite, les jeux d'écritures qui permettent de passer du BAR(1) au BAR(p) sont du même ordre et ne seront plus précisés, voir [BdSG09] pour les détails.

Dans le cas d'une observation complète du processus, on a  $\mathbf{S}_n^0 = \mathbf{S}_n^1$  pour tout  $n$ . Dans le cas des observations partielles, ces deux matrices ne sont plus nécessairement égales. Il est important de remarquer qu'elles ne correspondent pas simplement à éliminer les données non observées, elles éliminent également les données qui n'ont pas de fille paire ou impaire observée.

#### Estimation des paramètres du bruit

Dans le cas le plus général des coefficients aléatoires, on utilise des estimateurs des moindres carrés modifiés. On commence par définir les résidus empiriques. Pour tout  $k \in \mathbb{G}_n$ , on pose

$$\begin{cases} \hat{\epsilon}_{2k} &= \delta_{2k} (X_{2k} - \hat{a}_n - \hat{b}_n X_k), \\ \hat{\epsilon}_{2k+1} &= \delta_{2k+1} (X_{2k+1} - \hat{c}_n - \hat{d}_n X_k). \end{cases}$$

L'estimateur de  $\sigma = (\sigma_\epsilon^2, \rho_{00}, \rho_{11}, \sigma_\eta^2)^t$  qui minimise

$$\Delta_n(\sigma) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{G}_\ell} (\hat{\epsilon}_{2k}^2 - \mathbb{E}[\epsilon_{2k}^2 | \mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])^2 + (\hat{\epsilon}_{2k+1}^2 - \mathbb{E}[\epsilon_{2k+1}^2 | \mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])^2,$$

est

$$\hat{\sigma}_n = \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_{\varepsilon,n}^2 \\ \hat{\rho}_{00,n} \\ \hat{\rho}_{11,n} \\ \hat{\sigma}_{\eta,n}^2 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{2k}^2 + \hat{\varepsilon}_{2k+1}^2, \\ 2X_k \hat{\varepsilon}_{2k}^2, \\ 2X_k \hat{\varepsilon}_{2k+1}^2, \\ X_k^2 (\hat{\varepsilon}_{2k}^2 + \hat{\varepsilon}_{2k+1}^2) \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{U}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \begin{pmatrix} \delta_{2k} + \delta_{2k+1} & 2\delta_{2k} X_k & 2\delta_{2k+1} X_k & (\delta_{2k} + \delta_{2k+1}) X_k^2 \\ 2\delta_{2k} X_k & 4\delta_{2k} X_k^2 & 0 & 2\delta_{2k} X_k^3 \\ 2\delta_{2k+1} X_k & 0 & 4\delta_{2k+1} X_k^2 & 2\delta_{2k+1} X_k^3 \\ (\delta_{2k} + \delta_{2k+1}) X_k^2 & 2\delta_{2k} X_k^3 & 2\delta_{2k+1} X_k^3 & (\delta_{2k} + \delta_{2k+1}) X_k^4 \end{pmatrix}.$$

Dans le cas des coefficients constants (où  $\sigma_\eta^2 = 0$ ) l'estimateur de  $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2$  est simplement l'estimateur empirique

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{|\mathbb{T}_n^*|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}^*} (\hat{\varepsilon}_{2k}^2 + \hat{\varepsilon}_{2k+1}^2).$$

De même, l'estimateur des moindres carrés modifié de  $\boldsymbol{\rho} = (\rho_\varepsilon, \rho, \rho_\eta)^t$  qui minimise

$$\Delta_n(\boldsymbol{\rho}) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{G}_\ell} (\hat{\varepsilon}_{2k} \hat{\varepsilon}_{2k+1} - \mathbb{E}[\varepsilon_{2k} \varepsilon_{2k+1} | \mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])^2,$$

est

$$\hat{\boldsymbol{\rho}}_n = \begin{pmatrix} \hat{\rho}_{\varepsilon,n} \\ \hat{\rho}_n \\ \hat{\rho}_{\eta,n} \end{pmatrix} = \mathbf{V}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_{2k} \hat{\varepsilon}_{2k+1}, \\ 2X_k \hat{\varepsilon}_{2k} \hat{\varepsilon}_{2k+1}, \\ X_k^2 \hat{\varepsilon}_{2k} \hat{\varepsilon}_{2k+1} \end{pmatrix},$$

avec

$$\mathbf{V}_n = \sum_{k \in \mathbb{T}_n} \delta_{2k} \delta_{2k+1} \begin{pmatrix} 1 & 2X_k & X_k^2 \\ 2X_k & 4X_k^2 & 2X_k^3 \\ X_k^2 & 2X_k^3 & X_k^4 \end{pmatrix}.$$

On ne peut pas identifier  $\rho_{01}$  et  $\rho_{10}$ , donc on n'estime que leur moyenne  $\rho = (\rho_{01} + \rho_{10})/2$ . Dans le cas des coefficients constants, ceci correspond encore à l'estimateur empirique de la covariance

$$\hat{\rho}_n = \frac{1}{|\mathbb{T}_{n-1}^{*01}|} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \hat{\varepsilon}_{2k} \hat{\varepsilon}_{2k+1},$$

où  $\mathbb{T}_n^{*01} = \{k \in \mathbb{T}_n : \delta_{2k} \delta_{2k+1} = 1\}$  est le nombre d'individus jusqu'à la génération  $n$  qui ont exactement deux filles.

On peut construire sur le même modèle des estimateurs des moments d'ordre plus élevé du bruit, voir [dSGP+13b].

### 1.3.2 Convergence

Nos premiers résultats concernent la convergence des estimateurs. Des résultats de ce type existaient déjà dans la littérature sur les processus BAR, en particulier pour le modèle BAR( $p$ ) (les deux autres modèles étant originaux), mais avec des hypothèses beaucoup plus restrictives sur les bruits.

**Théorème 1.1** *Sous les hypothèses (H.GW), (H.I), (H.C) et (H.B1-3) avec  $\gamma \geq 1$  dans le cas BAR( $p$ ) complètement observé et  $\gamma \geq \kappa \geq 2$  dans les autres cas, on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \boldsymbol{\theta} \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \quad p.s.$$

*Si de plus  $\gamma \geq \kappa \geq 4$  dans le cas du modèle R-BAR à coefficients aléatoires (et sans autre hypothèse supplémentaire dans les autres cas), on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n = \boldsymbol{\sigma} \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n = \boldsymbol{\rho} \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \quad p.s.$$

Les différences de moments requis ont deux causes principales. D'une part, lorsqu'on utilise des lois des grands nombres pour martingales de carré intégrable, la présence du processus d'observation aléatoire ( $\delta_k$ ) fait doubler le nombre de moments nécessaires, voir [dSGP<sup>+</sup>11, Lemme 6.1]. D'autre part, pour le processus R-BAR à coefficients aléatoires nous avons choisi une approche par chaîne de Markov bifurquante qui demande intrinsèquement que les quantités d'intérêt aient des moments d'ordre 4. Or il faut contrôler des sommes de  $X_k^q$  avec  $q$  allant jusqu'à 2 pour  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$  et 4 pour  $\widehat{\boldsymbol{\sigma}}_n$  et  $\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n$ .

Les résultats suivants, qui sont les tout premiers de ce type à avoir été publiés donnent en plus une vitesse pour les convergences ci-dessus.

**Théorème 1.2** *Sous les hypothèses (H.GW), (H.I), (H.C) et (H.B1-3) avec  $\gamma \geq 1$  dans le cas BAR( $p$ ) complètement observé,  $\gamma \geq 2$  pour le BAR(1) sous observation partielle et  $\gamma \geq \kappa \geq 4$  pour le R-BAR, on a*

$$\mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \widehat{\boldsymbol{\theta}}_n = \mathcal{O} \left( \frac{\log |\mathbb{T}_{n-1}^*|}{|\mathbb{T}_{n-1}^*|} \right) \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \quad p.s.$$

*On a aussi la loi forte quadratique*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_\ell - \boldsymbol{\theta})^t \mathbf{S} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{S} (\widehat{\boldsymbol{\theta}}_\ell - \boldsymbol{\theta}) = \text{tr}(\boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \quad p.s.$$

où  $\mathbf{S}$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}$  et  $\boldsymbol{\Gamma}$  sont des matrices carrée (de taille  $4 \times 4$  pour les modèles d'ordre 1, de taille  $2(p+1) \times 2(p+1)$  pour le modèle d'ordre  $p$ ) que l'on peut écrire explicitement en fonction des paramètres des modèles (voir [BdSG09, Théorème 5.2], [dSGP<sup>+</sup>11, Théorème 3.2] et [dSGP<sup>+</sup>13a, Théorème 3.2] pour les détails).

Pour l'analogie de ce résultat sur les coefficients du bruit, on introduit de nouvelles notations :

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{U}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \epsilon_{2k}^2 + \epsilon_{2k+1}^2, \\ 2X_k \epsilon_{2k}^2, \\ 2X_k \epsilon_{2k+1}^2, \\ X_k^2 (\epsilon_{2k}^2 + \epsilon_{2k+1}^2) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{V}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} \begin{pmatrix} \epsilon_{2k} \epsilon_{2k+1}, \\ 2X_k \epsilon_{2k} \epsilon_{2k+1}, \\ X_k^2 \epsilon_{2k} \epsilon_{2k+1} \end{pmatrix}.$$

En effet, on va exprimer une vitesse pour  $\widehat{\sigma}_n - \sigma_n$  et  $\widehat{\rho}_n - \rho_n$  plutôt que de comparer directement les estimateurs à leur limite.

**Théorème 1.3** *Sous les hypothèses (H.GW), (H.I), (H.C) et (H.B1-3) avec  $\gamma \geq 1$  dans les cas BAR( $p$ ) complètement observé,  $\gamma \geq 2$  pour le BAR(1) sous observation partielle et  $\gamma \geq \kappa \geq 8$  pour le R-BAR, on a les convergences presque sûres*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \frac{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}{n} (\widehat{\sigma}_n - \sigma_n) &= \ell_\sigma \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \frac{|\mathbb{T}_{n-1}^*|}{n} (\widehat{\rho}_n - \rho_n) &= \ell_\rho \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \end{aligned}$$

où  $\ell_\sigma$  et  $\ell_\rho$  sont des vecteurs que l'on peut écrire explicitement en fonction des paramètres des modèles (voir [BdSG09, Théorème 5.3], [dSGP<sup>+</sup>11, Théorème 3.3] et [dSGP<sup>+</sup>13a, Théorèmes 3.3 et 3.4] pour les détails).

### 1.3.3 Normalité asymptotique et tests

Nous obtenons également des théorèmes de la limite centrale pour tous nos estimateurs. Dans le cas des processus sous observation partielle, ces résultats ne sont valables que conditionnellement à la non extinction du processus. On définit alors une nouvelle probabilité  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}^c}$  par

$$\mathbb{P}_{\mathcal{E}^c}(\cdot) = \frac{\mathbb{P}(\cdot \cap \mathcal{E}^c)}{\mathbb{P}(\mathcal{E}^c)}$$

et on prouve la normalité asymptotique sur l'espace  $(\mathcal{E}^c, \mathbb{P}_{\mathcal{E}^c})$ .

**Théorème 1.4** *Sous les hypothèses (H.GW), (H.I), (H.C) et (H.B1-3) avec  $\gamma \geq 2$  dans les cas BAR( $p$ ) et BAR(1) sous observation partielle et  $\gamma \geq \kappa \geq 8$  pour le R-BAR, on a sur l'espace  $(\mathcal{E}^c, \mathbb{P}_{\mathcal{E}^c})$*

$$|\mathbb{T}_{n-1}^*|^{1/2} (\widehat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_\theta).$$

Si de plus  $\gamma \geq \kappa \geq 16$  dans le cas du modèle R-BAR à coefficients aléatoires (et sans autre hypothèse supplémentaire dans les autres cas), on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{T}_{n-1}^*|^{1/2} (\widehat{\sigma}_n - \sigma) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_\sigma) \\ |\mathbb{T}_{n-1}^*|^{1/2} (\widehat{\rho}_n - \rho) &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma_\rho) \end{aligned}$$

où  $\Gamma_\theta$ ,  $\Gamma_\sigma$  et  $\Gamma_\rho$  sont des matrices explicites (voir [BdSG09, Théorème 5.4], [dSGP<sup>+</sup>11, Théorème 3.4] et [dSGP<sup>+</sup>13a, Théorème 3.5] pour les détails).

A partir de ce résultat, on peut tout naturellement construire des intervalles de confiance (voir [dSGP<sup>+</sup>13b] pour les formes explicites) et des tests de symétrie pour les coefficients du BAR. Nous en proposons deux : un qui compare directement les coefficients des deux soeurs ( $a, b$ ) et ( $c, d$ ), et un qui compare les valeurs stationnaires  $a/(1-b)$  et  $c/(1-d)$  qu'on obtiendrait pour les deux BAR symétriques correspondant aux coefficients ( $a, b$ ) et ( $c, d$ ) respectivement.

**Test**  $(a, b) = (c, d)$ 

- Hypothèse nulle  $\mathbf{H}_0^c : (a, b) = (c, d)$
- Hypothèse alternative  $\mathbf{H}_1^c : (a, b) \neq (c, d)$
- Statistique de test

$$\mathbf{Y}_n^c = |\mathbb{T}_{n-1}^*|(\widehat{a}_n - \widehat{c}_n, \widehat{b}_n - \widehat{d}_n)(\mathbf{Dc}^t \widehat{\Gamma}_{\theta, n-1} \mathbf{Dc})^{-1}(\widehat{a}_n - \widehat{c}_n, \widehat{b}_n - \widehat{d}_n)^t,$$

où

$$\mathbf{Dc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

est le gradient de  $(a, b, c, d) \mapsto (a - c, b - d)^t$  et  $wh\Gamma_{\theta, n}$  est un estimateur empirique de la matrice de variance-covariance asymptotique  $\Gamma_{\theta}$  que l'on peut construire par plug-in à l'aide des estimateurs des moments du bruit, voir [dSGP<sup>+</sup>12, dSGP<sup>+</sup>13b] pour les détails. Sous l'hypothèse nulle,  $\mathbf{Y}_n^c$  converge en loi vers une loi du  $\chi^2$  à deux degrés de liberté.

**Test**  $a/(1 - b) = c/(1 - d)$ 

- Hypothèse nulle  $\mathbf{H}_0^f : a/(1 - b) = c/(1 - d)$
- Hypothèse alternative  $\mathbf{H}_1^f : a/(1 - b) \neq c/(1 - d)$
- Statistique de test

$$\mathbf{Y}_n^f = |\mathbb{T}_{n-1}^*|(\mathbf{Df}^t \widehat{\Gamma}_{\theta, n-1} \mathbf{Df})^{-1}(\widehat{a}_n/(1 - \widehat{b}_n) - \widehat{c}_n/(1 - \widehat{d}_n))^2,$$

où

$$\mathbf{Df} = \left( \frac{1}{1 - b}, \frac{a}{(1 - b)^2}, \frac{-1}{1 - d}, \frac{-c}{(1 - d)^2} \right)^t$$

est le gradient de  $(a, b, c, d) \mapsto (a/(1 - b) - c/(1 - d))$ . Sous l'hypothèse nulle,  $\mathbf{Y}_n^f$  converge en loi vers une loi du  $\chi^2$  à un degré de liberté.

## 1.4 Stratégie de résolution

Pour montrer la convergence de nos estimateurs avec vitesse, nous avons choisi une approche martingale. En effet, on peut écrire

$$\widehat{\theta}_n - \theta = \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{T}_{n-1}} (\epsilon_{2k}, X_k \epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1}, X_k \epsilon_{2k+1})^t = \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{M}_n, \quad (1.6)$$

avec

$$\mathbf{M}_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{k \in \mathbb{G}_{\ell}} (\epsilon_{2k}, X_k \epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1}, X_k \epsilon_{2k+1})^t. \quad (1.7)$$

La suite  $(M_n)$  ainsi définie est une martingale vectorielle pour la filtration  $\mathbb{F}^{\mathcal{O}}$  des générations observées grâce aux hypothèses **(H.I)** et **(H.B3)**. Cependant, on ne peut pas utiliser les résultats connus de [Duf97] sur la convergence des martingales vectorielles de carré intégrable, car le nombre de cellules observées croît de façon exponentielle avec les générations (il est multiplié par 2 à chaque génération si toutes

les cellules sont observées, sinon il est asymptotiquement multiplié par  $\pi$ ). Nous avons donc adapté l'approche de [Duf97] aux martingales définies comme ci-dessus sur des arbres binaires, complets ou non.

### 1.4.1 Martingales sur un arbre binaire

Après avoir adapté plusieurs fois l'approche de [Duf97] à notre contexte particulier dans [BdSG09] et [dSGP<sup>+</sup>11], nous avons finalement démontré un résultat général de convergence de martingales sur un arbre de Galton Watson [dSGP<sup>+</sup>13a, Théorème 5.1].

**Théorème 1.5** *Soit  $(\mathbf{M}_n)$  une  $\mathbb{F}^{\mathcal{O}}$ -martingale vectorielle de dimension  $p$  sur l'arbre de Galton Watson  $\mathbb{T}^*$  :  $\mathbf{M}_n = \sum_{\ell=1}^n \sum_{k \in \mathbb{G}_\ell^*} \mathbf{W}_k$ , avec  $\mathbf{W}_k = (w_k^1, w_k^2, \dots, w_k^p)^t$ . Soit  $\langle \mathbf{M} \rangle_n = \sum_{\ell=0}^{n-1} \Gamma_\ell$  le processus croissant de  $(\mathbf{M}_n)$  i.e.*

$$\Gamma_n = \mathbb{E}[\Delta \mathbf{M}_{n+1} \Delta \mathbf{M}_{n+1}^t \mid \mathcal{F}_n^{\mathcal{O}}].$$

*Soit enfin  $(\Xi_n)$  une suite de matrices symétriques définies positives de taille  $p \times p$ . Si les hypothèses suivantes sont vérifiées*

**(A.1)**  $(\mathbf{M}_n)$  est de carré intégrable ;

**(A.2)**  $|\mathbb{T}_{n-1}^*|^{-1} \langle \mathbf{M} \rangle_n$  converge presque sûrement vers une matrice semi-définie positive  $\Gamma$  sur  $\mathcal{E}^c$  ;

**(A.3)** La  $\mathbb{F}^{\mathcal{O}}$ -martingale matricielle  $(\mathbf{K}_n)$  de taille  $p \times p$  définie par

$$\mathbf{K}_n = \sum_{\ell=1}^n |\mathbb{T}_\ell^*|^{-1} (\Delta \mathbf{M}_{\ell+1} \Delta \mathbf{M}_{\ell+1}^t - \mathbb{E}[\Delta \mathbf{M}_{\ell+1} \Delta \mathbf{M}_{\ell+1}^t \mid \mathcal{F}_\ell^{\mathcal{O}}])$$

*est de carré intégrable et le processus croissant de chacune de ses coordonnées est  $\mathcal{O}(n)$  p.s. sur  $\mathcal{E}^c$  ;*

**(A.4)**  $|\mathbb{T}_n^*|^{-1} \Xi_n$  converge vers une matrice définie positive  $\Xi$  p.s. sur  $\mathcal{E}^c$  ;

*alors  $\mathbf{M}_n^t \Xi_{n-1}^{-1} \mathbf{M}_n = \mathcal{O}(n)$  et  $\|\mathbf{M}_n\|^2 = \mathcal{O}(n\pi^n)$  p.s. Si de plus les coordonnées de  $(\mathbf{M}_n)$  vérifient*

**(A.5)**  $\sup_n \mathbb{E}[(\pi^{-n/2} \sum_{k \in \mathbb{G}_n^*} w_k^i)^4 \mid \mathcal{F}_{n-1}^{\mathcal{O}}] < \infty$  p.s.

*alors pour tout  $\delta > 1/2$ , on a  $\|\mathbf{M}_n\|^2 = o(n^\delta \pi^n)$  p.s. et*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{1}_{\{|\mathbb{G}_n^*| > 0\}} \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n \mathbf{M}_\ell^t \Xi_{\ell-1}^{-1} \mathbf{M}_\ell = \text{tr}(\Gamma \Xi^{-1}) \mathbb{1}_{\mathcal{E}^c} \quad \text{p.s.}$$

Pour pouvoir appliquer ce résultat à notre martingale principale, il faut donc tout d'abord étudier la convergence de son processus croissant et l'ordre de grandeur du crochet de la martingale correspondante  $(K_n)$ . Toutes ces quantités sont de même nature de la forme  $\sum \delta_{2k+i} \epsilon_{2k+i}^q X_k^r$  ou bien  $\sum \delta_{2k} \delta_{2k+1} \epsilon_{2k}^q \epsilon_{2k+1}^r X_k^s$ . Il faut donc commencer par établir des lois des grands nombres pour les suites  $(\delta_{2k+i} \epsilon_{2k+i}^q X_k^r)$  et  $(\delta_{2k} \delta_{2k+1} \epsilon_{2k}^q \epsilon_{2k+1}^r X_k^s)$ . Remarquons que c'est l'hypothèse **(A.3)** ci-dessus qui fait intervenir les moments d'ordre les plus élevés et qui conditionne donc le nombre de moments requis pour le bruit.

### 1.4.2 Lois des grands nombres pour les processus GW et BAR

On peut remarquer que les quantités qui nous intéressent sont également celles qui apparaissent dans nos estimateurs. Établir ces lois des grands nombres permettra donc directement d'obtenir la convergence de nos estimateurs (car, par exemple  $X_{2k} = a + bX_k + \epsilon_{2k}$ ). L'approche martingale n'est vraiment utile que pour établir en plus des vitesses de convergence.

La première remarque importante pour calculer ces lois des grands nombres est de voir qu'on peut facilement remplacer la normalisation par la quantité aléatoire  $|\mathbb{T}_n^*|$  par une normalisation par la constante  $\pi^n$ . En effet, les propriétés des processus GW permettent de passer facilement d'une écriture à l'autre, voir par exemple [dSGP<sup>+</sup>11, Lemme 2.1].

Lorsque les sommes ne font intervenir que des  $\delta_{2k+i}$  et des  $\epsilon_{2k+i}$ , les lois des grands nombres s'obtiennent directement à l'aide des résultats de convergence des martingales scalaires de carré intégrable (avec la filtration  $\mathbb{F}^{\mathcal{O}}$  lorsque le bruit intervient, avec la filtration  $(\mathcal{O}_n = \sigma\{\delta_k, k \in \mathbb{T}_n\})$  lorsqu'il n'y a que des  $\delta_{2k+i}$ ). Le résultat est présenté de façon abstraite générale dans [dSGP<sup>+</sup>11, Lemme 5.1]. Quand le processus BAR intervient, nous avons utilisé deux approches complètement différentes selon que les coefficients sont constants ou aléatoires.

#### BAR à coefficients fixes

Pour les processus BAR à coefficients fixes, l'obtention des lois des grands nombres se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on majore la somme des  $X_k^q$  pour la plus grande valeur de  $q$  qui nous intéresse pour obtenir l'ordre de grandeur de la somme. Dans un second temps, on calcule effectivement la limite de la somme correctement normalisée. La première étape sert à obtenir l'ordre de grandeur du processus croissant d'une nouvelle martingale qui apparaît à la deuxième étape.

Pour la première étape, l'hypothèse **(H.C)** permet de majorer les deux coefficients multiplicatifs  $b$  et  $d$  par une même constante  $\beta < 1$ . Ceci permet d'une certaine façon de *gommer* l'asymétrie du processus. En utilisant cette majoration, des itérations successives de la récursion définissant le processus, des inégalités de Cauchy-Schwartz et un changement d'indice adapté à la structure binaire (voir [BdSG09, p2516]) on obtient les majorations voulues.

Pour la deuxième étape, on exploite à nouveau la structure récursive du processus. On montre que la somme des  $X_k$  jusqu'à une génération donnée s'écrit elle-même récursivement comme une fonction affine de la somme des  $X_k$  jusqu'à la génération précédente. En itérant cette relation de récurrence, on peut récrire la somme cherchée en fonction de quantités dont on connaît déjà les limites ou dont on peut facilement calculer les limites à l'aide de résultats de convergence des martingales scalaires. Essentiellement, pour obtenir **(A.3)** des moments d'ordre 4 suffisent si le processus est parfaitement observé. Sinon il faut des moments d'ordre 8. Les valeurs explicites de toutes les limites qui nous intéressent sont détaillées dans [dSGP<sup>+</sup>13b].

## BAR à coefficients aléatoires

Comme mentionné au paragraphe 1.2.4, dans le cas des coefficients aléatoires on ne peut plus majorer  $b + \eta_{2k}$  et  $d + \eta_{2k+1}$  par une même constante plus petite que 1. La méthode décrite ci-dessus devient donc inutilisable. Pour obtenir nos lois des grands nombres, nous avons utilisé l'interprétation du processus BAR comme une chaîne de Markov bifurquante (BMC ou *bifurcating Markov chain* en anglais) introduite par [Guy07] et étendue par [DM10] au cas d'un arbre de Galton Watson (à un seul type).

Le principal intérêt de l'approche BMC vient du fait qu'on peut relier le comportement asymptotique du processus bifurquant  $(X_k)$  à celui d'une chaîne de Markov simple sous-jacente  $(Y_n)$  ne prenant qu'une valeur par génération et qui suit une lignée tirée au hasard dans l'arbre (lorsque celui-ci est complet ; dans le cas d'un arbre de Galton Watson incomplet, la construction la construction correspond en loi au tirage au hasard d'un individu présent dans chaque génération). Le lien formel entre la BMC et sa chaîne induite est le suivant [DM10, Lemme 2.1]

$$\pi^n \mathbb{E}[f(Y_n)] = \sum_{k \in \mathbb{G}_n} \mathbb{E}[f(X_k) \mathbb{1}_{\{k \in \mathbb{T}^*\}}], \quad (1.8)$$

pour les fonctions  $f$  dans une bonne classe. L'étude des lois des grands nombres pour la BMC se ramène donc à l'étude de l'ergodicité de la chaîne induite. Dans le cas des processus BAR, on est ramené à une étude d'ergodicité pour un processus auto-régressif classique (à coefficients aléatoires i.i.d.).

Dans notre cas de processus BAR à coefficients aléatoires, la chaîne induite est construite de la façon suivante. Pour tout  $n \geq 1$ , on définit la suite  $(A_n, B_n)_{n \geq 1}$  comme une suite de variables aléatoires i.i.d. de même loi que

$$((a + \varepsilon_2, b + \eta_2) \mathbb{1}_{\{\xi=0\}} + (c + \varepsilon_3, d + \eta_3) \mathbb{1}_{\{\xi=1\}}),$$

où  $\xi$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $(p(0, 1) + p(1, 1))/\pi$  indépendante de  $(\varepsilon_2, \eta_2, \varepsilon_3, \eta_3)$ . On pose alors

$$\begin{cases} Y_0 & = X_1 \\ Y_{n+1} & = A_{n+1} + B_{n+1} Y_n, \quad \forall n \geq 0. \end{cases}$$

L'hypothèse **(H.C)-R-BAR** se récrit alors simplement comme  $\mathbb{E}[|B_1|^{4\kappa}] < 1$ . Il est alors facile de montrer que sous cette hypothèse la chaîne induite  $(Y_n)$  admet une unique loi invariante  $\mu$  qui a des moments au moins jusqu'à l'ordre  $4\kappa$ , voir [Bra86]. Des développements similaires dans ma thèse [dS04, dS05] sur les queues et les moments de lois stationnaires permettent de comprendre également que c'est bien une hypothèse de ce type qui a des chances d'être minimale pour obtenir l'ergodicité de la chaîne induite et des moments suffisants de la loi invariante, et donc par conséquent les lois des grands nombres pour le BAR et la convergence simple de nos estimateurs. La principale différence entre notre travail sur les BMC et les résultats de la littérature est que nous avons fait l'hypothèse d'un nombre fini de moments pour les

bruits, contre des moments à tout ordre. Ceci nous empêche d'utiliser directement les résultats de [Guy07, DM10] mais la démarche est essentiellement la même.

Si l'approche BMC permet d'affaiblir l'hypothèse **(H.C)-R-BAR**, elle impose en revanche de renforcer les autres hypothèses. En effet, elle requiert plus de moments sur le bruit car elle repose sur des méthodes  $L^2$  : il faut quatre fois plus de moments ( $\times 2$  pour être de carré intégrable et à nouveau  $\times 2$  à cause de la bifurcation) que le degré de la loi des grands nombres voulue. De plus, pour pouvoir définir la BMC et son noyau de transition, les hypothèses de d'indépendance et d'identité en loi du bruit sont nécessaires, on ne peut plus se contenter d'accroissements de martingales. Enfin, pour pouvoir construire la chaîne induite  $(Y_n)$ , nous avons dû simplifier le processus de Galton Watson des observations et ne plus tenir compte du type de la mère dans la loi de reproduction. L'approche GW à deux type pose problème essentiellement parce que la matrice de descendance  $\mathbf{P}$  du processus divisée par sa valeur propre dominante  $\pi$  n'est pas en général une matrice stochastique.

### BAR à coefficients aléatoires avec GW à deux types

Récemment, nous avons réussi à contourner cette dernière difficulté. Suite à des échanges avec Nathalie Krell (Université Rennes 1), nous avons utilisé une idée qu'elle a introduite dans le cadre des processus de fragmentation [Kre09, DHKR13]. La clé est l'obtention d'une formule analogue à (1.8), dite *many to one formula*, puisqu'elle permet de passer d'un processus complexe sur un arbre à un processus scalaire beaucoup plus simple. Une telle formule n'est pas généralisable telle quelle pour la raison évoquée plus haut qu'on ne peut pas normaliser simplement la matrice de descendance  $\mathbf{P}$  du processus en une matrice de transition. En fait, il faut une normalisation *aléatoire*, et donc rajouter des termes auxiliaires dans la many to one formula, à savoir le type de la cellule et cette normalisation aléatoire.

Plus précisément, on définit la suite  $(Y_n, I_n, \Pi_n)$  sur  $\mathbb{R} \times \{0, 1\} \times ]0, +\infty[$  de la façon suivante. Pour l'initialisation,  $Y_0$  a la même loi que  $X_1$ ,  $I_0$  est un type tiré de façon aléatoire suivant une loi bien choisie et  $\Pi_0 = 1$ . Ensuite, le processus est défini récursivement. Conditionnellement à  $(Y_n, I_n, \Pi_n) = (y, i, m)$ , le type au rang  $n + 1$ ,  $I_{n+1}$  est tiré au hasard suivant la loi de Bernoulli de paramètre  $(p^{(i)}(0, 1) + p^{(i)}(1, 1))/\pi_i$  où  $\pi_i = +p^{(i)}(1, 0) + p^{(i)}(0, 1) + 2p^{(i)}(1, 1)$  est la moyenne de la loi de reproduction d'un individu de type  $i$ ,  $\Pi_{n+1} = m\pi_i$  et  $Y_{n+1}$  est obtenu par l'équation du R-BAR numéro  $\Pi_{n+1}$  à partir de  $y$ . On obtient alors la many to one formula suivante

$$\mathbb{E}_{(x,i,1)}[f(Y_n, I_n, \Pi_n)] = \sum_{k \in G_n} \mathbb{E}_{(x,i)}[f(X_k, i_k, m_k) \mathbb{1}_{\{k \in \mathbb{T}^*\}}],$$

où  $i_k$  est le type de l'individu  $k$  et  $m_k = \prod_{\ell=0}^{n-1} \pi_{i_{\lfloor k/2^\ell \rfloor}}$ .

On peut alors obtenir l'analogie des Théorèmes 18 de [Guy07] et 3.1 de [DM10], et les lois des grands nombres pour le R-BAR couplé à un GW à deux types résultent ainsi de l'ergodicité de la chaîne  $(Y_n, I_n, \Pi_n)$ , qui correspond (pour  $Y_n$ ) à un processus auto-régressif scalaire à coefficients aléatoires  $(A_n, B_n)$  modulés par la chaîne de Markov  $(I_n)$ . Ici encore, des idées de ma thèse [dS04] devraient permettre d'obtenir

l'ergodicité avec des moments suffisants pour la loi invariante sous une condition de la forme

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left( \mathbb{E}[(B_{-n} \cdots B_{-1})^{4\kappa}] \right)^{1/n} < 1,$$

qui peut également être caractérisé par une condition sur le rayon spectral d'une certaine matrice dépendant des paramètres du problème. Ce travail est actuellement en cours de rédaction.

### 1.4.3 Vitesse de convergence des estimateurs

Une fois obtenues les lois de grands nombres, les hypothèses (A.2-3) du théorème 1.5 sont vérifiées. Les hypothèses (A.1) et (A.5) sont faciles à obtenir en mettant suffisamment de moments sur le bruit. Pour obtenir les vitesses de convergence des estimateur il reste à choisir judicieusement la suite  $(\Xi_n)$ . Essentiellement, il faut la choisir comme une version *réduite* du processus croissant de la martingale : on remplace tous les termes de variance du bruit  $(\sigma^2, \sigma_\varepsilon^2, \sigma_\eta^2)$  par 1 et tous les termes de covariance  $(\rho, \rho_{00}, \rho_{11}, \rho_\varepsilon, \rho_\eta)$  par 0.

Pour obtenir la vitesse de convergence de  $\widehat{\theta}_n$ , on utilise a martingale  $(M_n)$  définie en (1.7) et la relation (1.6). Pour la vitesse de convergence de  $(\widehat{\sigma}_n - \sigma_n)$ , on utilise deux fois le théorème 1.5, une fois avec les deux premières coordonnées de  $(M_n)$ , une fois avec les deux dernières (avec des matrices  $\Xi_n$  différentes dans les deux cas). Pour la vitesse de convergence de  $(\widehat{\rho}_n - \rho_n)$ , on ne peut plus appliquer directement théorème 1.5 car les matrices  $\Xi_n$  qui apparaissent naturellement ne sont pas définies positives. Cependant, elles restent symétriques, inversibles, et sont de la forme  $\Xi_n^{-1/2} \Delta_n \Xi_n^{-1/2}$  pour les mêmes matrices  $\Xi_n$  que celles utilisée pour la convergence de  $\widehat{\theta}_n$ , et avec la suite  $\Delta_n$  qui converge vers une matrice symétrique inversible. Dans ce cas, nous avons montré que la loi forte quadratique du théorème 1.5 reste valable [dSGP<sup>+</sup>13a, Corolaire 5.3].

### 1.4.4 Théorème central limite

Pour obtenir la normalité asymptotique de nos estimateurs, trois problèmes se posent. Premièrement, toujours à cause de la croissance exponentielle du nombre de nouvelles données à chaque génération, la condition de Lindebergh n'est pas vérifiée. Ensuite, il n'y a aucun espoir d'obtenir la normalité asymptotique sur l'ensemble d'extinction du processus. Enfin, la quantité par laquelle on veut normaliser  $|\mathbb{T}_n^*|$  est aléatoire.

Pour contourner le premier problème d'explosion du nombre de données par génération, on change de filtration. Au lieu de prendre la filtration des génération on choisit celle des soeurs

$$\mathcal{G}_p^\mathcal{O} = \mathcal{O} \vee \sigma\{X_1, (X_{2k}, X_{2k+1}), 1 \leq k \leq p\}$$

autrement dit  $\mathcal{G}_p^\mathcal{O}$  est la tribu engendrée par le processus d'observation et tous les individus jusqu'aux deux filles de l'individu  $p$ . Grâce à la propriété d'indépendance

conditionnelle des bruits des paires de soeurs dans une même génération, la suite  $(M_p)$  définie par

$$M_p = \sum_{k=1}^p (\epsilon_{2k}, X_k \epsilon_{2k}, \epsilon_{2k+1}, X_k \epsilon_{2k+1})^t.$$

est encore une martingale pour la filtration  $(\mathcal{G}_p^O)$ , et on a la relation  $\widehat{\theta}_n - \theta = \mathbf{S}_{n-1}^{-1} \mathbf{M}_{|\mathbb{T}_{n-1}|}$  qui permet de revenir à notre estimateur.

Pour traiter le problème de l’extinction éventuelle, on réduit notre espace d’étude à l’ensemble de non extinction  $\mathcal{E}^c$ , muni de la probabilité  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}^c}$ . On montre alors un théorème central limite sur  $(\mathcal{E}^c, \mathbb{P}_{\mathcal{E}^c})$ , c’est-à-dire conditionnel à la non extinction. Grâce à l’hypothèse d’indépendance des processus GW et BAR, toutes les propriétés de moments conditionnels du bruit sous  $\mathbb{P}$  restent vraies à l’identique sous  $\mathbb{P}_{\mathcal{E}^c}$ .

Enfin, pour la normalisation aléatoire, nous avons utilisé le Théorème 2.1.9 de [Duf97]. On obtient ainsi la normalité asymptotique de tous nos estimateurs. Des tests et des intervalles de confiance en découlent de façon usuelle.

## 1.5 Extensions et application aux données E. coli

Les idées et la démarche développées ci-dessus nous ont permis d’obtenir deux autres séries de résultats en lien avec les BAR et les GW à deux types.

### 1.5.1 Inférence pour les GW à deux types

Il existe dans la littérature beaucoup de résultats sur l’inférence de processus de Galton-Watson multi-type, voir par exemple [Gut91, MT05]. Les estimateurs des lois de reproduction reposent sur l’observation du nombre d’individus de chaque type à chaque génération, c’est-à-dire l’équivalent de notre suite  $(Z_n)$ . Or dans notre contexte, nous disposons avec les  $(\delta_k)$  d’une information beaucoup plus précise, puisque nous savons à chaque noeud de l’arbre binaire si la cellule correspondante est observée ou non. Nous avons donc proposé dans [dSGP<sup>+</sup>12] de nouveaux estimateurs empiriques des lois de reproduction basés sur l’observation des  $(\delta_k)$ . Les méthodes martingales exposées plus haut permettent d’obtenir le comportements asymptotique fin de ces estimateurs. Il faut noter qu’ici, comme les  $\delta_k$  ne prennent que les valeurs 0 et 1 on a des moments à tout ordre.

### 1.5.2 Inférence multi-arbre

Toujours dans [dSGP<sup>+</sup>12], nous avons réalisé une étude empirique de la puissance des tests d’asymétrie pour le BAR partiellement observé. Cette étude montre que la puissance est relativement faible pour un nombre de générations observées de l’ordre de la dizaine. Or, dans les données de division d’E. coli de [SMPT05], les généalogies observées ont au mieux 9 générations. En revanche, le nombre de généalogies enregistrées est relativement grand (94). Nous avons donc cherché un

moyen d'utiliser toute l'information disponible plutôt que de faire de l'inférence sur une seule généalogie à la fois.

Ainsi, dans [dSGP<sup>+</sup>13b] nous avons introduit des estimateurs *multi-arbres* pour les BAR sous observation partielle. On suppose que le nombre d'arbre est fixé à l'avance, et l'asymptotique est le nombre total de cellules observées sur tous les arbres. Les estimateurs obtenus ne sont pas simplement la moyenne des estimateurs mono-arbre. De plus, nous avons relâché la condition de non extinction, puisqu'au lieu de supposer la non extinction de chacun des arbres, on se contente de supposer qu'au moins un arbre ne s'éteint pas (on se place sur l'union des ensembles de non extinction et non pas leur intersection). Autrement dit, certains arbres peuvent s'éteindre à condition qu'au moins un continue à grandir jusqu'à l'infini. Ce choix nous empêche d'utiliser directement les résultats mono-arbre. En revanche, les mêmes techniques permettent d'obtenir la convergence fine des nouveaux estimateurs.

### 1.5.3 Application à E. coli

Nous avons appliqué notre méthode d'inférence multi-arbre aux données de division cellulaire d'E. coli de [SMPT05]. Le problème biologique consiste à détecter le vieillissement de la bactérie E. coli en testant l'asymétrie de la division entre les cellules ayant hérité de l'ancien pôle de leur mère et les cellules ayant hérité du nouveau pôle.

Les auteurs ont filmé 94 colonies d'E. coli. Ils ont mesuré le taux de croissance de chaque cellule et identifié toutes les filiations en distinguant entre nouveau pôle (type 0) et ancien pôle (type 1). Les 94 jeux de données comprennent 22394 cellules (11189 de type 0 et 11205 de type 1). Le nombre de générations observées va de 4 à 9. Le taux de croissance moyen des cellules de type 0 est 0.0371, celui des cellules de type 1 est 0.0369.

Ces données ont déjà été étudiées dans plusieurs articles [SMPT05, GBP<sup>+</sup>05, Guy07]. Dans [SMPT05], les auteurs ne trouvent pas d'asymétrie significative pour les généalogies prises une à une. En revanche, en étudiant la généalogie obtenue en moyennant tous les arbres et en effectuant des comparaisons entre toutes les paires de cellules soeurs (en les supposant indépendantes) ils concluent que les cellules de type vieux pôle présentent un taux de croissance inférieur, ont des cellules filles de masse plus faible et une probabilité accrue de mort. Cependant dans les généalogies de division cellulaire, les paires de soeurs d'une même génération ne sont pas indépendantes.

Les études suivantes ne proposent de l'inférence que sur un seul arbre. Dans [GBP<sup>+</sup>05], les auteurs introduisent un modèle markovien de bifurcation pour construire les estimateurs, mais ils ne prennent pas en compte non plus la dépendance entre paires de soeurs pour construire des tests. L'hypothèse de symétrie est rejetée ( $p$ -valeur  $< 0.1$ ) pour la moitié des généalogies, une conclusion globale est donc difficile à tirer.

$a$	0.0203 [0.0197; 0.0210]	$c$	0.0195 [0.0188; 0.0201]
$b$	0.4615 [0.4437; 0.4792]	$d$	0.4782 [0.4605; 0.4959]

TABLE 1.1 – Estimations ponctuelles et intervalles de confiance à 95% pour  $\theta = (a, b, c, d)^t$ .

$\sigma^2$	$1.81 \cdot 10^{-5}$ [ $1.12 \cdot 10^{-5}$ ; $2.50 \cdot 10^{-5}$ ]
$\rho$	$0.48 \cdot 10^{-5}$ [ $0.44 \cdot 10^{-5}$ ; $0.52 \cdot 10^{-5}$ ]

TABLE 1.2 – Estimations ponctuelles et intervalles de confiance à 95% pour  $\sigma^2$  et  $\rho$ .

Dans [Guy07], la structure de dépendance des données est rigoureusement prise en compte pour la première fois à travers un modèle de BMC pour la construction des estimateurs et des tests de symétrie. Cependant, le modèle ne prend pas en compte les éventuelles données manquantes dans les arbres généalogiques. Or aucune des généalogies de [SMPT05] n'est complète. Les auteurs fournissent des résultats de tests mais la prise en compte des données manquantes n'est pas du tout explicitée.

Notre méthode multi-arbre pour les BAR couplés à un processus d'observation permet de prendre en compte simultanément la structure de dépendance des données et les données manquantes. Elle permet également d'utiliser toute l'information disponible des 94 généalogies simultanément et donc de pallier le problème de la faible puissance des tests mono-arbre. Nous avons aussi pour la première fois proposé une estimation de la loi du processus GW d'observation sur ces données.

Nos résultats sont les suivants. L'estimation de  $\theta$  avec intervalles de confiance à 95% est donnée dans la Table 1.1. Les intervalles de confiance pour  $b$  et  $d$  montrent que l'hypothèse **(H.C)** est bien vérifiée. La Table 1.2 donne l'estimation de la variance et de la covariance du bruit. Nous avons également proposé un modèle dans [dSGP<sup>+</sup>13b] où les deux composantes du bruit  $\epsilon_{2k}$  et  $\epsilon_{2k+1}$  peuvent avoir des variances différentes, mais le l'hypothèse d'égalité entre les deux n'est pas rejetée (p-valeur= 0.19). Pour les test de symétrie, l'hypothèse  $(a, b) = (c, d)$  est rejetée (p-valeur=  $10^{-5}$ ) et de même pour le test d'égalité des points fixes  $a/(1-b) = c/(1-d)$  ( $a/(1-b)$  estimé à 0.03773,  $c/(1-d)$  estimé à 0.03734, p-valeur=  $2 \cdot 10^{-3}$ ). Nous pouvons donc confirmer rigoureusement une asymétrie statistiquement significative dans la division d'E. coli.

La Table 1.3 donne l'estimation des deux lois de reproduction du processus GW à deux types. La valeur propre dominante de la matrice de descendance est estimée à 1.204 [1.191; 1.217], on a donc bien un processus sur-critique. Les moyennes des deux lois de reproduction sont estimées à 1.2048 pour le type 0 et 1.2032 pour le type 1. L'hypothèse d'égalité de ces moyennes n'est pas rejetée (p-valeur= 0.9). Cependant, on voit dans la Table 1.3 que les intervalles de confiance de  $p^{(0)}(i, j)$  et de  $p^{(1)}(i, j)$  ne s'intersectent pas. L'hypothèse d'égalité des deux lois de reproduction est rejetée (p-valeur=  $2 \cdot 10^{-5}$ ). L'interprétation de cette asymétrie en terme de division d'E. coli n'est pas évidente car les données manquantes sont dues principalement à des

$p^{(0)}(0, 0)$	0.35579 [0.35574; 0.35583]	$p^{(1)}(0, 0)$	0.35611 [0.35606; 0.35616]
$p^{(0)}(1, 0)$	0.03621 [0.03620; 0.03622]	$p^{(1)}(1, 0)$	0.04707 [0.04706; 0.04708]
$p^{(0)}(0, 1)$	0.04740 [0.04739; 0.04741]	$p^{(1)}(0, 1)$	0.03755 [0.03754; 0.03756]
$p^{(0)}(1, 1)$	0.56060 [0.56055; 0.56065]	$p^{(1)}(1, 1)$	0.55928 [0.55923; 0.55933]

TABLE 1.3 – Estimations ponctuelles et intervalles de confiance à 95% pour les lois de reproduction du GW.

difficultés de mesure (cellules hors champs ou qui se superposent) et pas à la mort des cellules (seuls 16 cellules sont mortes sur les 22394 étudiées).

## 1.6 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une série de modèles pour étudier des données de division cellulaire. Ces modèles ont été affinés pour coller au mieux à la nature des données disponibles. Pour chacun de ces modèles paramétriques, nous avons proposé des estimateurs des différents paramètres, et prouvé leurs propriétés fines de convergence. Nous avons démontré pour ce faire de nouveaux théorèmes sur la convergence des martingales et chaînes de Markov bifurquantes sur des arbres de Galton-Watson à deux types. Enfin, nous avons appliqué notre procédure à des données réelles de division de la bactérie *Escherichia coli*.

D'autres équipes ont poussé l'étude de ces modèles dans de nouvelles directions, comme la définition et l'étude de BAR à coefficients entiers [Bla12b], l'étude des déviations [BDG11, BD12, BD13], l'introduction de parasites dans les cellules, avec leur propre loi de reproduction et de répartition lors de la division [Ban08, Ban09]. Ce type de modèle a aussi été développé en temps continu, pour tenir compte du temps passé avant chaque division [BT11, BDMT11, DHKR13].

Du point de vue des biologistes, le phénomène du vieillissement des organismes unicellulaires n'est pas encore complètement compris. On s'attendrait à ce que le taux de croissance des cellules de la lignée qui hérite à chaque fois du vieux pôle diminue au cours du temps comme semble l'indiquer l'étude de [SMPT05] sur les premières générations. Or des expériences récentes [WRP<sup>+</sup>10] montrent qu'au contraire ce taux se stabilise assez vite. Même si cette observation est en accord avec la modélisation BAR qui prévoit effectivement ce comportement (convergence vers  $c/(1-d)$  pour la deuxième équation itérée), elle appelle de nouvelles études mathématiques pour réconcilier cette observation avec celle de [SMPT05] d'une baisse du taux, au moins sur les premières générations. On pourrait par exemple essayer une estimation non paramétrique du lien entre une cellule et ses deux filles, pour valider ou non l'hypothèse linéaire du modèle BAR à partir des données expérimentales.

Une autre piste de recherche est aussi de chercher à expliquer le vieillissement par une stratégie de la cellule mère d'accumulation des *déchets* dans les cellules vieux pôles. On peut imaginer de modéliser l'apparition et la répartition de ces déchets

dans les généalogies de cellules, voir d'optimiser la stratégie de partage des déchets entre cellules filles pour la survie de la colonie.

Les progrès de l'imagerie médicale permettront certainement dans les années à venir de proposer des modèles mathématiques sophistiqués pour étudier ces phénomènes de vieillissement ou autres, et de les confronter à des données réelles. C'est un domaine qui m'intéresse tout particulièrement.



# Chapitre 2

## Méthodes numériques pour le contrôle des processus markoviens déterministes par morceaux

### 2.1 Motivation

Les processus markoviens déterministes par morceaux (PDP pour *Piecewise deterministic Markov processes* en anglais) ont été introduits par Davis [Dav84, Dav93] dans les années 80. Il s'agit d'une vaste classe de processus markoviens non diffusifs qui modélisent des systèmes physiques dont la dynamique peut être perturbée par des événements ponctuels et aléatoires. Ce sont des processus hybrides décrits par deux variables : à la variable euclidienne usuelle représentative de l'état, on adjoint une variable discrète, appelée mode ou régime, à valeurs dans un ensemble dénombrable. La variable euclidienne est représentative des grandeurs physiques du système. Il peut s'agir, par exemple, de la hauteur de liquide dans un réservoir, de la température, de l'épaisseur perdue par corrosion, . . . Le mode traduit quant à lui l'apparition des pannes et des dysfonctionnements ou les conditions extérieures et caractérise ainsi le régime de fonctionnement du système.

D'un point de vue mathématique, la trajectoire d'un tel processus peut se définir de façon très intuitive par itération, voir paragraphe 2.2.1. L'espace d'état est constitué d'une réunion d'ouverts d'espaces métriques. Entre deux sauts, l'état du système suit une trajectoire régie par un flot indexé par le mode qui reste constant. Il existe deux types de sauts pouvant induire des ruptures sur le vecteur d'état et/ou sur le mode.

- Le premier type de saut est de nature *déterministe*. Il est conditionné par le fait que le vecteur d'état tente de franchir la frontière d'un ouvert. Par exemple, la pression dépasse un seuil qui déclenche l'ouverture d'une soupape.
- Le second type de saut est *purement stochastique*. Il suit une loi *poissonienne* dont l'intensité est une fonction non linéaire du mode et de l'état.

Du point de vue de la modélisation, les PDP permettent de prendre en compte de manière dynamique et réaliste les divers types d'interactions pouvant exister entre les

différentes grandeurs physiques du système et son comportement global. Des choix adéquats des différents paramètres du processus permettent de couvrir des domaines applicatifs très divers, comme par exemple en assurance [Dav93, section 33], fiabilité dynamique [DD02, ZDDG08, dSDZ<sup>+</sup>12], neurosciences [PTW10], division cellulaire [DHKR13], trafic internet [CMP10], ou finance [BR11] pour n'en citer que quelques uns. Des exemples concrets sont présentés partie 2.4.

### 2.1.1 Méthodes numériques pour le contrôle impulsif

Je m'intéresse dans ce chapitre au contrôle des PDP. En toute généralité, le contrôle peut être soit *continu* soit *impulsif*. Il est continu si la variable de contrôle agit à tout instant sur la dynamique du processus en modifiant le mouvement déterministe et la probabilité de sauter. On parle de contrôle impulsif quand le contrôleur intervient à des instants spécifiques ponctuels pour déplacer le processus vers un nouveau point de l'espace d'états. Ce chapitre ne concerne que le contrôle impulsif des PDP.

La forme la plus simple de contrôle impulsif s'appelle *arrêt optimal*. Dans ce cas, il y a une seule intervention qui consiste à choisir le meilleur instant (au sens d'un critère de performance donné) pour arrêter le processus. Du point de vue applicatif, en fiabilité dynamique l'arrêt optimal correspond à de la maintenance préventive : on cherche à intervenir pour remettre à neuf le système avant la panne. Ne rien faire ou changer les composants trop souvent peut coûter cher. Il s'agit d'optimiser la maintenance entre ces deux politiques extrêmes. Le contrôle impulsif général correspond à de la maintenance tolérante aux pannes où on choisit des instants pour procéder à des réparations éventuellement partielles du système, voir [Dav93, AJ99].

Malgré la richesse et l'importance de leurs domaines applicatifs, peu d'outils numériques ont été développés pour le contrôle impulsif des PDP. A ma connaissance seuls deux articles de Costa et Davis [CD88, CD89] et un de Costa [Cos91] proposent une méthode de calcul pratique de la performance optimale et d'une stratégie permettant d'approcher l'optimum basée sur les courbes de niveau de la performance optimal approchée. La méthode proposée repose sur une discrétisation du noyau markovien de saut, correspondant à une discrétisation (cartésienne dans leurs exemples) des positions du processus après les sauts. Ils obtiennent la convergence de leur méthode sur tous les compacts de l'espace d'états lorsque le nombre de points de la discrétisation tend vers l'infini, mais n'ont pas de résultats sur la vitesse de convergence de leur méthode.

En revanche, une vaste littérature existe autour des outils numériques pour les processus de diffusion. L'objet de ce travail est de fournir de nouveaux outils numériques pour les PDP et d'étudier de façon théorique et pratique leurs performances. Pour cela, on s'inspire des méthodes existantes pour les processus de diffusion qui reposent sur une méthode de discrétisation des variables aléatoires appelée quantification, voir par exemple [Pag98, BP03, PPP04a, PPP04b, BPP05, PP05, PRS05]. Cependant, de telles méthodes ne peuvent s'appliquer directement aux PDP pour au moins deux raisons. D'une part, il s'agit de processus à sauts. D'autre part, les PDP

ne sont pas diffusifs, leur loi fait intervenir des composantes absolument continues ainsi que des composantes ponctuelles qu'il faut gérer de façon adaptée.

Pour contourner des deux difficultés, nous utilisons principalement une autre spécificité des PDP. Comme pour les processus ponctuels, tout l'aléa d'un PDP est contenu dans une chaîne de Markov en temps discret sous-jacente au processus. Ainsi, toute grandeur d'intérêt faisant intervenir la loi du processus peut se récrire uniquement en fonction de cette chaîne de Markov. Une discrétisation adéquate de cette chaîne devrait donc fournir une approximation numérique de la quantité à calculer. C'est le programme qui sera mis en œuvre dans ce chapitre et le suivant.

### 2.1.2 Contribution

Les travaux présentés ici ont tous été réalisés en collaboration avec François Dufour (Institut Polytechnique de Bordeaux et Inria CQFD) dans le cadre de l'équipe Inria CQFD. En particulier, nous avons co-encadré deux thèses sur ce sujet, celle de Karen Gonzalez (2007-2010) [Gon10] et celle d'Adrien Brandejsky (2009-2012) [Bra12]. Certains travaux ont également été réalisés avec Huilong Zhang (Université de Bordeaux et Inria CQFD). Ces travaux s'inscrivent également dans le cadre de l'ANR Fautocoès (2009-2013).

Dans un premier travail avec Karen Gonzalez [dSDG10], nous avons proposé une méthode numérique d'approximation de la performance optimale et proposé une règle d'arrêt calculable en pratique pour le problème d'arrêt optimal d'un PDP générique. Nous avons étudié la convergence de notre méthode et obtenu des bornes pour la vitesse de convergence. Cette méthode a été implémentée sur un exemple industriel fourni par Astrium [dSDZ<sup>+</sup>12] ainsi que sur un cas-test reconnu de fiabilité dynamique [dSZ13]. Il sont également en cours d'application à la maintenance d'un équipement optronique [BBdS<sup>+</sup>12] dans le cadre de la thèse de Camille Baysse (2010-2013), thèse cifre avec Thales Optronique encadrée par Jérôme Saracco (Institut Polytechnique de Bordeaux et Inria CQFD) et Anne Gégout-Petit (Université de Bordeaux et Inria CQFD). Des discussions sont en cours avec Thales Optronique pour le dépôt d'un brevet.

Ces travaux ont ensuite été étendus dans deux directions. D'une part, avec Adrien Brandejsky [BdSD13], nous avons étudié le problème d'arrêt optimal sous observation partielle. Au lieu de supposer que le processus est parfaitement observé aux instants de sauts, nous supposons que l'observation est bruitée. Nous avons alors obtenu l'équation du filtre et les équations de la programmation dynamique. Nous avons également proposé une méthode d'approximation numérique de ce problème, et nous avons montré sa convergence avec vitesse.

D'autre part, nous avons proposé une première approche numérique du problème de contrôle impulsif général [dSD12]. Nous avons proposé une approximation de la performance optimale, et démontré sa convergence avec vitesse. Ces travaux sont présentés plus en détail dans les sections suivantes.

## 2.2 Processus markoviens déterministes par morceaux

Commençons par définir un PDP et fixer les notations que nous utiliserons dans ce chapitre ainsi que dans le suivant. Pour tout espace métrique  $\mathcal{E}$ , on note  $\mathcal{B}(\mathcal{E})$  sa tribu borélienne,  $B(\mathcal{E})$  l'espace des fonctions à valeurs réelles, bornées et mesurables définies sur  $\mathcal{E}$  et  $BC(\mathcal{E})$  et  $BL(\mathcal{E})$  les sous-espaces des fonctions de  $B(\mathcal{E})$  qui sont continues et lipschitziennes respectivement. On note  $\partial\mathcal{E}$  la frontière de  $\mathcal{E}$ ,  $\bar{\mathcal{E}}$  son adhérence et pour tout sous-ensemble  $A$  de  $\mathcal{E}$ , on note  $A^c$  son complémentaire dans  $\mathcal{E}$ .

### 2.2.1 Définition d'un PDP

Soit  $M$  un ensemble fini correspondant aux différents régimes du PDP. Pour tout  $m \in M$ , le processus évolue dans  $E_m$  un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , avec  $d \geq 1$ , muni de la norme euclidienne notée  $|\cdot|$ . On note  $E$  l'espace d'états du processus

$$E = \{(m, x), m \in M, x \in E_m\},$$

muni de la distance  $|(m, x) - (m', x')| = [x - x']\mathbb{1}_{\{m=m'\}} + \infty\mathbb{1}_{\{m \neq m'\}}$ . Un PDP est défini sur  $E$  par trois caractéristiques locales : le flot  $\Phi$ , l'intensité des sauts  $\lambda$  et le noyau markovien de sauts  $Q$ .

- Pour tout  $m \in M$ , le flot dans le mode  $m$  est  $\Phi_m : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction continue obtenue comme solution d'une équation différentielle ordinaire. En particulier, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ ,  $\Phi_m(\cdot, t)$  est un homéomorphisme et  $t \rightarrow \Phi_m(\cdot, t)$  est un semi-groupe i.e. pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $\Phi_m(x, s+t) = \Phi_m(\Phi_m(x, s), t)$ .
- Pour tout  $m \in M$ , l'intensité de saut dans le mode  $m$  est  $\lambda_m : \bar{E}_m \rightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction mesurable. On suppose de plus que

$$\forall (m, x) \in E, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } \int_0^\epsilon \lambda_m(\Phi_m(x, t)) dt < +\infty,$$

pour s'assurer qu'il n'y a pas de saut instantané.

- Pour tout  $m \in M$ , le noyau de transition dans le mode  $m$  est  $Q_m$  un noyau markovien sur  $(\bar{E}_m, \mathcal{B}(\bar{E}_m))$  qui a la propriété suivante pour tout  $x$  dans  $E_m$

$$Q_m(x, \{(m, x)\}^c) = 1.$$

Cette condition garantit que chaque saut modifie au moins une des deux composantes (discrète ou continue) du processus.

A partir de ces caractéristiques locales, Davis [Dav93, page 57] montre qu'il existe un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}, (\mathbb{P}_z)_{z \in E})$  sur lequel est défini un processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  qu'on peut construire de façon récursive. Le processus part de la position  $x_0$  dans le mode  $m_0$ . Le premier instant de saut est déterminé comme suit. Pour tout point  $(m, x)$  de l'espace d'états  $E$ , on définit le temps de sortie déterministe de  $E$ , ou temps d'atteinte de la frontière de  $E$  par

$$t_m^*(x) = \inf\{t > 0 \text{ tel que } \Phi_m(x, t) \in \partial E_m\},$$

avec la convention usuelle  $\inf \emptyset = +\infty$ . Soit alors  $T_1$  une variable aléatoire positive de loi donnée par

$$\mathbb{P}_{(m_0, x_0)}(T_1 > t) = \begin{cases} e^{-\Lambda_{m_0}(x_0, t)} & \text{si } 0 \leq t < t_{m_0}^*(x_0), \\ 0 & \text{si } t \geq t_{m_0}^*(x_0), \end{cases}$$

où l'intensité de saut cumulée  $\Lambda_m$  est définie pour tous  $(m, x)$  dans  $E$  et  $t \geq 0$  par

$$\Lambda_m(x, t) = \int_0^t \lambda_m(\Phi_m(x, s)) ds.$$

On tire alors une variable aléatoire  $Z_1$  à valeurs dans  $E$  selon la loi  $Q_{m_0}(\Phi_{m_0}(x_0, T_1), \cdot)$ . La trajectoire de  $X_t$  pour  $t \leq T_1$  est donnée par

$$X_t = \begin{cases} (m_0, \Phi_{m_0}(x, t)) & \text{si } t < T_1, \\ Z_1 & \text{si } t = T_1. \end{cases}$$

Partant du point  $X_{T_1} = Z_1$ , on choisit alors d'une façon similaire la durée  $S_2 = T_2 - T_1$  entre le premier instant de saut  $T_1$  et l'instant de saut suivant  $T_2$ , ainsi que les mode et position  $Z_2$  après le deuxième saut et ainsi de suite. Davis montre [Dav93, section 25] que le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  ainsi obtenu est un processus de Markov fort. Ce processus est continu à droite avec des limites à gauche et saute aux instants  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  (avec  $T_0 = 0$ ).

### 2.2.2 Notations

Pour simplifier les notations, dans toute la suite on notera pour tous  $z = (m, x)$  dans l'espace d'états  $E$  et  $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \Phi(z, t) &= \Phi_m(x, t), & \lambda(z, t) &= \lambda_m(x, t), & Q(z, \cdot) &= Q_m(x, \cdot), \\ t^*(z) &= t_m^*(x), & \Lambda(z, t) &= \Lambda_m(x, t). \end{aligned}$$

Pour des fonctions appliquées au processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , la notion de régularité globale sur  $E$  est parfois trop contraignante. En fait, on a besoin seulement de régularité le long des trajectoires possibles du processus, c'est-à-dire de régularité le long du flot  $\Phi$ . Soit  $BC_\Phi(E)$  le sous espaces des fonctions de  $B(E)$  qui sont continues le long du flot  $\Phi$  avec limite finie à la frontière, c'est-à-dire les fonctions  $w \in B(E)$  telles que pour tout  $z$  dans  $E$ ,  $w(\Phi(z, \cdot))$  est continue sur  $[0, t^*(z)[$  avec une limite finie lorsque  $t$  temps vers  $t^*(z)$  si  $t^*(z) < \infty$ , notée  $w(\Phi(z, t^*(z)))$ . On définit également  $BL_\Phi(E)$  le sous espaces des fonctions de  $BC_\Phi(E)$  qui sont lipschitziennes le long du flot au sens suivant

- il existe  $[w]_1 \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tous  $(z, z') \in E^2$  et  $u \in [0, t^*(z) \wedge t^*(z')]$ , on a

$$|w(\Phi(z, u)) - w(\Phi(z', u))| \leq [w]_1 |z - z'|,$$

- il existe  $[w]_2 \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tous  $z \in E$ , et  $(u, u') \in [0, t^*(z)]^2$ , on a

$$|w(\Phi(z, u)) - w(\Phi(z, u'))| \leq [w]_2 |u - u'|,$$

– il existe  $[w]_* \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tous  $(z, z') \in E^2$ , on a

$$|w(\Phi(z, t^*(z))) - w(\Phi(z', t^*(z')))| \leq [w]_* |z - z'|.$$

Dans la suite, pour toute fonction  $w$  de  $B(E)$  on note  $C_w$  sa borne supérieure

$$C_w = \sup_{z \in E} |w(z)|,$$

et pour toute fonction  $w$  de  $BL(E)$  ou  $BL(\bar{E})$  on note  $[w]$  sa constante de Lipschitz

$$[w] = \sup_{z \neq z' \in E} \frac{|w(z) - w(z')|}{|z - z'|}.$$

Remarquons que  $BL_\Phi(E)$  est un sous-ensemble de  $BL(E)$  et toute fonction  $w$  de  $BL_\Phi(E)$  vérifie  $[w] \leq [w]_1$ .

### 2.2.3 Hypothèses

La première hypothèse est classique, voir [Dav93, section 24]. Elle assure en particulier que le PDP n'explose pas (pas d'accumulation de sauts) et que la suite des temps de saut tend vers l'infini.

**(H.1)** Pour tous  $z \in E$  et  $t \geq 0$ , on a  $\mathbb{E}_z \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}} \right] < \infty$ .

Les hypothèses suivantes sont plus spécifiques à notre méthode de discrétisation. Elles sont nécessaires pour obtenir des vitesses de convergence pour nos approximations. Elles imposent essentiellement que les caractéristiques locales du PDP soient bornées et de régularité Lipschitz (éventuellement le long du flot).

**(H.2)** L'intensité de saut  $\lambda$  est bornée et il existe  $[\lambda]_1 \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tous  $(z, z') \in E^2$  et  $u \in [0, t^*(z) \wedge t^*(z')]$ ,

$$|\lambda(\Phi(z, u)) - \lambda(\Phi(z', u))| \leq [\lambda]_1 |z - z'|.$$

**(H.3)** Le temps d'atteinte de la frontière  $t^*$  est dans  $BL(E)$ .

**(H.4)** Le noyau markovien  $Q$  est Lipschitz au sens suivant : il existe  $[Q] \in \mathbb{R}_+$  tel que pour toute fonction  $w$  de  $BL_\Phi(E)$ , les deux conditions suivantes sont satisfaites

– pour tous  $(z, z') \in E^2$  et  $u \in [0, t^*(z) \wedge t^*(z')]$ , on a

$$|Qw(\Phi(z, u)) - Qw(\Phi(z', u))| \leq [Q] [w]_1 |z - z'|,$$

– pour tous  $(z, z') \in E^2$ , on a

$$|Qw(\Phi(z, t^*(z))) - Qw(\Phi(z', t^*(z')))| \leq [Q] [w]_* |z - z'|.$$

## 2.3 Arrêt optimal

Le premier problème qui nous intéresse est l'approximation numérique du problème d'arrêt optimal pour un PDP. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on note  $\mathcal{M}_n$  l'ensemble des temps d'arrêts pour la filtration  $(\mathcal{F}_t)$  qui sont inférieurs au  $n$ -ème temps de saut  $T_n$  du processus. On se fixe un horizon de calcul  $N$ . Soit  $g$  une fonction de  $BL_\Phi(E)$  appelée *fonction de gain*. La *performance* associée au temps d'arrêt  $\tau$  dans  $\mathcal{M}_N$  est

$$\mathbb{E}_z[g(X_\tau)].$$

Le problème d'arrêt optimal consiste à trouver la performance maximale sur  $\mathcal{M}_N$  ainsi qu'un temps d'arrêt qui réalise ce maximum, s'il en existe. Sinon on cherche un temps d'arrêt dont la performance est arbitrairement proche de l'optimum. On parle alors de temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal. La performance maximale s'appelle la *fonction valeur* du problème d'arrêt optimal

$$v(z) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}_z[g(X_\tau)] = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N} \mathbb{E}[g(X_\tau) \mid X_0 = z].$$

Notre premier travail dans [dSDG10] est la construction d'une approximation de  $v(z)$  ainsi que d'un temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal calculable en pratique.

Le choix d'un horizon en temps de saut du processus est dicté par l'utilisation de la chaîne induite. Le cas d'un horizon de temps fixe  $T$  a été discuté dans [BdSD12b] dans un cas similaire. Il s'agit essentiellement d'utiliser le processus augmenté du temps  $(X_t, t)$  qui est encore un PDP, mais dont les caractéristiques locales ne sont plus les mêmes et ne vérifient pas automatiquement les mêmes hypothèses de régularité, voir la section 3.2.2. On définit alors l'espace d'états en temps comme étant  $[0, T[$  avec un saut à la frontière vers un état cimetière lorsque  $t = T$ . On s'assure ensuite empiriquement qu'on peut fixer un nombre de sauts  $N$  tel que la probabilité d'avoir  $(T \geq T_N)$  soit suffisamment petite voire nulle. Voir la partie 2.4 pour des exemples concrets.

### 2.3.1 Stratégie de résolution

On peut montrer que la fonction valeur du problème d'arrêt optimal pour les PDP peut se construire en itérant un opérateur de programmation dynamique, voir [Gug86] et l'équation (2.1). Cet opérateur fait intervenir des espérances conditionnelles qui sont compliquées à calculer et surtout à itérer numériquement. Notre méthode de discrétisation est inspirée de [BP03, PPP04a] qui traitent de problèmes similaires pour les processus de diffusion. Leur stratégie est la suivante.

- On commence par discrétiser la diffusion, par exemple avec un schéma d'Euler pour obtenir une chaîne de Markov en temps discret (à espace d'états continu). On montre que la fonction valeur du problème d'arrêt optimal pour cette chaîne discrète est proche de la fonction valeur du problème d'origine.
- On propose une approximation à espace d'états fini de la chaîne de Markov. On remplace les occurrences de la chaîne par son approximation discrète dans les opérateurs de programmation dynamique, qui sont alors faciles à itérer

numériquement car ils deviennent de simples sommes pondérées. On obtient également une borne sur l'erreur commise sur la fonction valeur.

La méthode choisie pour discrétiser la chaîne de Markov à espace d'états continu s'appelle *quantification*. Etant donnée une variable aléatoire  $X$  à support continu, cette méthode consiste à trouver une grille finie  $\Gamma$  et projeter  $X$  au plus proche voisin sur cette grille pour obtenir une variable aléatoire  $\hat{X}$  à support fini. La grille  $\Gamma$  est choisie de façon à minimiser l'erreur en norme  $L_2$  entre  $X$  et  $\hat{X}$ . Cette méthode permet d'évaluer facilement des différences de la forme  $f(X) - f(\hat{X})$  en norme  $L_2$ , dès que la fonction  $f$  est lipschitzienne. De plus, on peut montrer que l'erreur commise tend vers 0 lorsque le nombre de points dans la grille  $\Gamma$  tend vers l'infini, voir par exemple [Pag98, BP03, PPP04a, PPP04b, BPP05, PP05] et les références qui y sont mentionnées. On peut également quantifier une chaîne de Markov et obtenir les matrices de transition entre les grilles successives.

Les PDP ont certaines spécificités qui empêchent l'application directe des techniques utilisées pour les processus de diffusion. D'une part, ce sont des processus à sauts, et ces sauts ont une double nature, soit poissonnienne soit ponctuelle en présence de frontières, lorsque le flot tente de sortir de l'espace d'états. L'existence de ces sauts à la frontière implique que la loi du processus possède aussi cette double nature absolument continue avec des masses de Dirac. En particulier, même en imposant de fortes conditions de régularité sur la fonction coût  $g$  et sur les caractéristiques locales du PDP, l'opérateur de programmation dynamique fait intervenir des fonctions indicatrices qui ne sont donc pas lipschitziennes, voir Eq. (2.1).

D'autre part, comme pour les processus ponctuels classiques, tout l'aléa d'un PDP est contenu dans sa chaîne induite  $(Z_n, S_n)_{n \geq 0}$ , définie par les modes et positions après saut et les durées inter-saut

$$(Z_0, S_0) = (X_0, 0), \quad (Z_n, S_n) = (X_{T_n}, T_n - T_{n-1}) \quad \forall n \geq 1.$$

En effet, si on connaît le processus  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ , on connaît ses temps de saut et ses positions après saut. Réciproquement, si on connaît les positions après saut et les durées entre les sauts, on peut reconstituer les temps de sauts et la trajectoire déterministe du processus entre les sauts. Par ailleurs, le processus  $(Z_n, S_n)_{n \geq 0}$  est une chaîne de Markov à valeurs dans  $E \times \mathbb{R}_+$ , et la loi de  $(Z_{n+1}, S_{n+1})$  ne dépend en fait que de  $Z_n$ . Cette propriété est très importante pour les applications numériques car contrairement aux processus de diffusion, il n'y a donc pas besoin d'une étape préliminaire de discrétisation pour obtenir une chaîne de Markov en temps discret.

### 2.3.2 Schéma d'approximation

Gugerli a montré dans [Gug86] que les équations de la programmation dynamique sont les suivantes pour la fonction valeur du problème d'arrêt optimal pour les PDP

$$\begin{cases} v_N = g, \\ v_n = L(v_{n+1}, g) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

avec  $v_0 = v$  la fonction valeur du problème, et  $L$  l'opérateur de programmation dynamique défini par

$$L(w, h)(z) = \sup_{0 \leq u \leq t^*(z)} J(w, h)(z, u) \vee Kw(z),$$

où  $a \vee b = \max\{a, b\}$  et

$$\begin{aligned} J(w, h)(z, u) &= \mathbb{E}[h(\Phi(Z_n, u))\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} + w(Z_{n+1})\mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} \mid Z_n = z], \\ Kw(z) &= \mathbb{E}[w(Z_{n+1}) \mid Z_n = z], \end{aligned} \quad (2.1)$$

pour toutes fonctions  $w$  dans  $B(E)$ ,  $h$  dans  $B(\bar{E})$  et tous  $z$  dans  $E$  et  $u \geq 0$ . Comme attendu, cette expression ne fait intervenir que la chaîne induite  $(Z_n, S_n)$ .

Essentiellement, les équations de la programmation dynamique découlent de la propriété de Markov et de la structure spécifique des temps d'arrêts pour les PDP. Sur l'intervalle de temps avant le premier saut, la performance optimale est obtenue en prenant la meilleure des deux options suivantes : ne rien faire jusqu'au prochain saut (opérateur  $K$ ) ou bien choisir l'instant donnant la performance maximale sur la portion déterministe de la trajectoire entre 0 et le temps d'atteinte de la frontière  $t^*(z)$  (opérateur  $\sup J$ ). Les indicatrices dans l'opérateur  $J$  rendent compte du fait qu'un saut aléatoire peut intervenir avant de toucher la frontière.

### Approximation de la fonction valeur

Les opérateurs discrédités que nous proposons ne sont pas définis sur tout l'espace d'états, mais seulement sur les grilles de quantification, ce qui permet leur itération aisée. Ceci est possible car les équations de programmation dynamique qui portent sur les fonctions  $v_n$  peuvent se récrire comme une récursion sur les variables aléatoires  $V_n = v_n(Z_n)$ . En effet, on a  $V_N = g(Z_N)$  et pour tout  $0 \leq n \leq N - 1$

$$V_n = \sup_{0 \leq u \leq t^*(Z_n)} \left( \mathbb{E}[g(\Phi(Z_n, u))\mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u\}} + V_{n+1}\mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}} \mid Z_n] \right) \vee \mathbb{E}[V_{n+1} \mid Z_n].$$

C'est donc en fait ces variables aléatoires que nous discrétisons. Nous obtenons alors une approximation de  $V_0(Z_0)$  autrement dit de  $v(X_0)$  la fonction valeur au point de départ (supposé déterministe) du processus.

Nous proposons une méthode de discrétisation des opérateurs en deux étapes. La première consiste à remplacer la maximisation continue sur l'intervalle  $[0, t^*(z)]$  dans l'opérateur  $L$  par une maximisation sur une grille finie. Ceci revient à discrétiser les trajectoires déterministes du processus entre les sauts. Pour tout  $z$  dans  $E$ , on se fixe un pas de discrétisation  $0 < \Delta(z) < t^*(z)$ , et on appelle  $G(z)$  l'ensemble des points de la forme  $i\Delta(z)$  pour les entiers  $i$  positifs tels que  $i\Delta(z) \leq t^*(z) - \Delta(z)$ . Le fait d'exclure un voisinage de  $t^*(z)$  est une nécessité technique due à la présence des fonctions indicatrices et des sauts à la frontière, voir section 2.3.3. Nous aurions pu garder la maximisation continue et la résoudre numériquement, mais le fait de choisir une grille permet de calculer explicitement l'erreur commise en fonction du pas de discrétisation  $\Delta(z)$ .

La deuxième étape consiste à quantifier la chaîne de Markov  $(Z_n, S_n)$  jusqu'à l'horizon  $N$  pour obtenir une suite de variables aléatoires à support fini  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$ . On appelle  $\Gamma_n$  le support de  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)$ , ou  $n$ -ème grille de quantification, et  $\Gamma_n^Z$  le support de  $\widehat{Z}_n$ . On remplace alors toutes les occurrences de  $(Z_n, S_n)$  dans les opérateurs de programmation dynamique par leur approximation quantifiée

$$\begin{aligned}\widehat{J}_n(w, h)(z, u) &= \mathbb{E}[h(\Phi(\widehat{Z}_n, u))\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \geq u\}} \mid \widehat{Z}_n = z] + \mathbb{E}[w(\widehat{Z}_{n+1})\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}} \mid \widehat{Z}_n = z], \\ \widehat{K}_n w(z) &= \mathbb{E}[w(\widehat{Z}_{n+1}) \mid \widehat{Z}_n = z], \\ \widehat{L}_n(w, h)(z) &= \max_{u \in G(z)} \widehat{J}_n(w, h)(z, u) \vee \widehat{K}_n w(z),\end{aligned}$$

pour toutes fonctions  $w$  dans  $B(\Gamma_{n+1}^Z)$ ,  $h$  dans  $B(\overline{E})$  et tous  $z$  dans  $\Gamma_n^Z$  et  $u$  dans la grille  $G(z)$ . En général, l'approximation quantifiée d'une chaîne de Markov n'est plus une chaîne de Markov. Si on peut modifier les matrices de transition pour garder la structure markovienne, en revanche la chaîne obtenue ne sera pas homogène. On obtient donc une discrétisation différente à chaque pas de temps pour les opérateurs.

Par itération, on obtient une approximation des fonctions  $v_n$  sur les grilles de quantification,

$$\begin{cases} \widehat{v}_N = g, \\ \widehat{v}_n = \widehat{L}_n(\widehat{v}_{n+1}, g) \text{ pour } 0 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

puis des variables aléatoires  $V_n$  en posant  $\widehat{V}_n = \widehat{v}_n(\widehat{Z}_n)$ , soit  $\widehat{V}_N = g(\widehat{Z}_N)$  et pour tout  $0 \leq n \leq N-1$

$$\widehat{V}_n = \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \left( \mathbb{E}[g(\Phi(\widehat{Z}_n, u))\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} \geq u\}} + \widehat{V}_{n+1}\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}} \mid \widehat{Z}_n] \right) \vee \mathbb{E}[\widehat{V}_{n+1} \mid \widehat{Z}_n].$$

### Règle d'arrêt

A partir du temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal construit par Gugerli dans [Gug86], nous proposons également une règle d'arrêt calculable en pratique. Elle a en outre l'avantage de n'utiliser que des quantités déjà calculées pour l'approximation de la fonction valeur. Essentiellement, il s'agit de garder en mémoire qui a gagné la maximisation entre les opérateurs  $\max \widehat{J}_n$  et  $\widehat{K}_n$ . Toujours à cause des sauts à la frontière, notre méthode ne revient cependant pas à remplacer directement les variables aléatoires  $(Z_n, S_n)$  par leur approximation quantifiée dans la construction de Gugerli.

Plus précisément, pour construire notre règle d'arrêt, on commence par définir la projection  $p_n$  au plus proche voisin sur la  $n$ -ème grille de quantification. Autrement dit, on a  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n) = p_n(Z_n, S_n)$  et plus généralement, pour tous  $(z, s)$  dans  $E \times \mathbb{R}_+$  on pose  $(\widehat{z}_n, \widehat{s}_n) = p_n(z, s)$ . Il faut noter que la projection dépend des deux coordonnées  $z$  et  $s$ . Pour tout  $0 \leq n \leq N-1$ , on définit maintenant le premier instant qui maximise  $\widehat{J}_n(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{z}_n, \cdot)$  dans la grille  $G(\widehat{z}_n)$

$$s_n^*(z, s) = \min \left\{ t \in G(\widehat{z}_n) \mid \widehat{J}_n(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{z}_n, t) = \max_{u \in G(\widehat{z}_n)} \widehat{J}_n(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{z}_n, u) \right\}.$$

On définit alors une nouvelle suite de fonctions à valeurs positives qui sont construites en fonction du maximum entre  $\widehat{K}_n$  et  $\widehat{J}_n$

$$r_{n,\beta}(z, s) = \begin{cases} t^*(z) & \text{si } \widehat{K}_n \widehat{v}_{n+1}(\widehat{z}_n) > \max_{u \in G(\widehat{z}_n)} \widehat{J}_n(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{z}_n, u), \\ s_n^*(z, s) \mathbb{1}_{\{s_n^*(z, s) < t^*(z)\}} + (t^*(z) - \beta) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le vrai temps d'atteinte de la frontière  $t^*(z)$  et non pas une approximation car cette règle d'arrêt sera appliquée sur les vraies trajectoires du processus et non sur des trajectoires approchées. On a donc besoin à la fois de la vraie valeur de  $(z, s)$  et de son approximation quantifiée pour pouvoir utiliser les calculs de la fonction valeur, et parce que les opérateurs approchés ne sont définis que sur les grilles de quantification et pas sur tout l'espace. L'utilisation du seuil  $\beta$  permet de garantir que  $r_{n,\beta}(z, s) = t^*(z)$  si et seulement si l'opérateur  $\widehat{K}_n$  a gagné la maximisation. C'est une condition technique qui permet de borner l'erreur commise, voir la fin de la section 2.3.3. En effet, il se pourrait que  $s_n^*(z, s)$  soit supérieur ou égal à  $t^*(z)$  puisqu'on sait seulement que  $s_n^*(z, s) < t^*(\widehat{z})$  mais on ne sait pas si  $t^*(\widehat{z})$  est plus grand ou plus petit que  $t^*(z)$ .

Enfin, à partir de ces fonctions on définit une nouvelle suite de variables aléatoires qui va correspondre à des instants d'arrêt potentiels du système

$$\begin{cases} \widehat{R}_{0,\beta} &= \widehat{r}_{0,\beta}(Z_0, S_0), \\ \widehat{R}_{n,\beta} &= \widehat{r}_{n,\beta}(Z_n, S_n) \mathbb{1}_{\{\widehat{R}_{n-1,\beta} \geq S_{n-1}\}} \end{cases}$$

et on définit notre règle d'arrêt  $\widehat{\tau}$  par

$$\widehat{\tau} = \sum_{n=0}^{N-1} \widehat{R}_{n,\beta} \wedge S_{n+1},$$

où  $a \wedge b = \min\{a, b\}$ . Autrement dit, une fois les calculs d'approximation de la fonction valeur effectués et étant donné le point de départ  $Z_0$  du processus (on a  $S_0 = 0$ ), on calcule une première date  $\widehat{R}_{0,\beta}$  en projetant  $(Z_0, S_0)$  dans la grille de quantification correspondant au 0-ème saut. Si cette date arrive avant le premier temps de saut, c'est la date d'arrêt qu'on choisit, sinon, on relance un calcul à partir de la nouvelle position après le premier saut et de la durée jusqu'au premier saut. Cette nouvelle date  $T_1 + \widehat{R}_{1,\beta}$  est calculée avec la grille de quantification au saut 1. Si cette nouvelle date arrive avant le deuxième saut, c'est notre date d'arrêt, sinon, on relance un nouveau calcul, et ainsi de suite jusqu'au dernier instant de saut  $T_N$  où on s'arrête sans autre condition si on y arrive.

### 2.3.3 Principaux Résultats

Notre premier résultat donne la convergence de notre méthode avec une borne pour la vitesse exprimée en fonction des erreurs de quantification. Supposons que  $Z_n$  et  $S_n$  ont des moments au moins jusqu'à l'ordre 2. On a alors le résultat suivant.

**Théorème 2.1** *Sous les hypothèses (H.1-4) et pour tout  $0 \leq n \leq N-1$ , supposons que les pas de discrétisation  $\Delta(z)$ , pour  $z$  dans la  $\Gamma_n^Z$  vérifient*

$$\min_{z \in \Gamma_n^Z} \{\Delta(z)\} > (2C_\lambda)^{-1/2} ([t^*] \|\widehat{Z}_n - Z_n\|_2 + \|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_2)^{1/2}.$$

Alors l'erreur de discrétisation pour  $V_n$  est majorée par

$$\begin{aligned} \|V_n - \widehat{V}_n\|_2 &\leq \|V_{n+1} - \widehat{V}_{n+1}\|_2 + \alpha \|\Delta(\widehat{Z}_n)\|_2 + \beta_n \|\widehat{Z}_n - Z_n\|_2 \\ &\quad + 2[v_{n+1}] \|\widehat{Z}_{n+1} - Z_{n+1}\|_2 + \gamma ([t^*] \|\widehat{Z}_n - Z_n\|_2 + \|\widehat{S}_{n+1} - S_{n+1}\|_2)^{1/2}, \end{aligned}$$

avec des constantes explicites en fonction des paramètres du problème

$$\begin{aligned} \alpha &= [g]_2 + 2C_g C_\lambda, \\ \beta_n &= [v_n] + [v_{n+1}]_1 (C_{t^*} C_\lambda [Q]) + C_g (2C_\lambda [t^*] + C_{t^*} [\lambda]_1 (2 + C_{t^*} C_\lambda)) \\ &\quad + ([g]_1 + [g]_2 [t^*]) \vee ([v_{n+1}]_* [Q]), \\ \gamma &= 4C_g (2C_\lambda)^{1/2}. \end{aligned}$$

Par récurrence, ce résultat montre donc la convergence de notre méthode lorsque l'erreur de quantification tend vers 0, c'est-à-dire lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification tend vers l'infini.

Ce résultat repose sur les propriétés de la quantification d'une part, et sur le fait que les opérateurs  $J$ ,  $K$  et  $L$  préservent la régularité Lipschitz et envoient  $BL_\Phi(E)$  dans lui-même. Ainsi, dès que  $g$  est dans  $BL_\Phi(E)$ , toutes les fonctions valeurs  $v_n$  y sont aussi, et on peut calculer explicitement toutes les constantes de Lipschitz. La preuve du théorème 2.1 se fait en décomposant l'erreur en quatre termes

$$\begin{aligned} &\|V_n - \widehat{V}_n\|_2 \\ &\leq \left\| \sup_{u \leq t^*(Z_n)} J(v_{n+1}, g)(Z_n, u) \vee K v_{n+1}(Z_n) - \sup_{u \leq t^*(\widehat{Z}_n)} J(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee K v_{n+1}(\widehat{Z}_n) \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \sup_{u \leq t^*(\widehat{Z}_n)} J(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee K v_{n+1}(\widehat{Z}_n) - \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} J(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee K v_{n+1}(\widehat{Z}_n) \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} J(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee K v_{n+1}(\widehat{Z}_n) - \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \widehat{J}_n(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee \widehat{K}_n v_{n+1}(\widehat{Z}_n) \right\|_2 \\ &\quad + \left\| \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \widehat{J}_n(v_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee \widehat{K}_n v_{n+1}(\widehat{Z}_n) - \max_{u \in G(\widehat{Z}_n)} \widehat{J}_n(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, u) \vee \widehat{K}_n \widehat{v}_{n+1}(\widehat{Z}_n) \right\|_2. \end{aligned}$$

Le premier et le dernier termes sont majorés en utilisant la régularité Lipschitz de  $v_n$ . Le deuxième terme est majoré en utilisant la régularité en temps de  $J(v_{n+1}, g)$ . C'est dans le troisième terme qu'intervient la différence en norme  $L_2$  des fonctions indicatrices  $\mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u\}}$  et  $\mathbb{1}_{\{\widehat{S}_{n+1} < u\}}$ . Cette différence ne peut pas être rendue presque sûrement arbitrairement petite. En revanche, on peut montrer que l'événement où les deux indicatrices diffèrent est de probabilité suffisamment petite, à condition que le point  $u$  soit dans le support de la partie absolument continue de la loi de  $S_{n+1}$ . C'est pour cela que nous avons construit les grilles de discrétisation en temps en excluant un voisinage des temps d'atteinte de la frontière. C'est aussi ce qui impose

la condition reliant le pas de discrétisation  $\Delta(z)$  à l'erreur de quantification dans l'énoncé du théorème. Pour majorer ce troisième terme d'erreur, on a également besoin des propriétés de la quantification. En particulier du fait que  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)$  est obtenu comme projection de  $(Z_n, S_n)$ , et donc que  $\sigma(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)$  la tribu engendrée par  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)$  est une sous-tribu de  $\sigma(Z_n, S_n)$ .

Notre deuxième résultat concerne notre règle d'arrêt  $\widehat{\tau}$ . Tout d'abord, il s'agit d'un temps d'arrêt pour la filtration de départ  $(\mathcal{F}_t)$ , ce qui est un résultat très fort, sans analogue pour les processus de diffusion. Ensuite, nous montrons que c'est bien un temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal en calculant la différence entre la performance lorsqu'on s'arrête en  $\widehat{\tau}$  et la performance optimale. Comme pour le premier résultat, on calcule une différence entre variables aléatoires. Pour tout  $0 \leq n \leq N-1$ , on pose

$$\begin{aligned}\bar{v}_n(z) &= \mathbf{E}[g(X_{\widehat{\tau}_n}) | Z_n = z], \\ \bar{V}_n &= \bar{v}_n(Z_n),\end{aligned}$$

où  $\widehat{\tau}_n = \sum_{k=n}^{N-1} R_{k,\beta} \wedge S_{k+1}$ , de sorte que  $\widehat{\tau} = \widehat{\tau}_0$ . On obtient le résultat suivant.

**Théorème 2.2** *Sous les hypothèses (H.1-4) et pour tout  $0 \leq n \leq N-1$ , supposons que les paramètres de discrétisation sont fixés de sorte qu'il existe  $0 < a < 1$  vérifiant*

$$\frac{\beta}{a} = (2C_\lambda)^{-1/2} \left( \frac{[t^*]}{1-a} \|\widehat{Z}_n - Z_n\|_2 + \|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_2 \right)^{1/2} < \min_{z \in \Gamma_n^Z} \{\Delta(z)\}$$

pour tout  $z$  dans  $\Gamma_n^Z$ . Alors on a pour  $n = N-1$

$$\begin{aligned}\|\bar{V}_{N-1} - V_{N-1}\|_2 &\leq \|\widehat{V}_{N-1} - V_{N-1}\|_2 + 3[g] \|Z_N - \widehat{Z}_N\|_2 + a_{N-1} \|Z_{N-1} - \widehat{Z}_{N-1}\|_2 \\ &\quad + 4C_g(2C_\lambda)^{1/2} \left( \frac{[t^*]}{1-a} \|\widehat{Z}_{N-1} - Z_{N-1}\|_2 + \|S_N - \widehat{S}_N\|_2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

et pour  $0 \leq n \leq N-2$

$$\begin{aligned}\|\bar{V}_n - V_n\|_2 &\leq \|\bar{V}_{n+1} - V_{n+1}\|_2 + \|\widehat{V}_{n+1} - V_{n+1}\|_2 + \|\widehat{V}_n - V_n\|_2 \\ &\quad + 2[v_{n+1}] \|Z_{n+1} - \widehat{Z}_{n+1}\|_2 + a_n \|Z_n - \widehat{Z}_n\|_2 \\ &\quad + 4C_g(2C_\lambda)^{1/2} \left( \frac{[t^*]}{1-a} \|\widehat{Z}_n - Z_n\|_2 + \|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_2 \right)^{1/2},\end{aligned}$$

avec dans les deux cas

$$a_n = 2[v_{n+1}]_1 C_{t^*} C_\lambda [Q] + 2C_g C_{t^*} [\lambda]_1 (2 + C_{t^*} C_\lambda) + (4C_g C_\lambda [t^*] + 2[v_{n+1}]_* [Q]) \vee (3[g]_1).$$

Ici encore, par récurrence on obtient que l'erreur peut être rendue aussi petite que voulu lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification tend vers l'infini, et donc que  $\widehat{\tau}$  est bien un temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal.

Ce résultat se démontre en commençant par établir (à l'aide de la propriété de Markov) une relation de récurrence type programmation dynamique entre les

fonctions  $\bar{v}_n$  qui se traduit une fois de plus en une relation de récurrence entre les variables aléatoires  $\bar{V}_n$

$$\begin{aligned} \bar{v}_n(Z_n) &= \mathbb{E}[g(X_{r_{n,\beta}(Z_n, S_n)}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} > r_{n,\beta}(Z_n, S_n)\}} | Z_n] + \mathbb{E}[\bar{v}_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \leq r_{n,\beta}(Z_n, S_n)\}} | Z_n] \\ &= \mathbb{1}_{\{r_{n,\beta}(Z_n, S_n) \geq t^*(Z_n)\}} K \bar{v}_{n+1}(Z_n) + \mathbb{1}_{\{r_{n,\beta}(Z_n, S_n) < t^*(Z_n)\}} J(\bar{v}_{n+1}, g)(Z_n, r_{n,\beta}(Z_n, S_n)). \end{aligned}$$

Ensuite, on remarque que par définition, on a

$$\{r_{n,\beta}(Z_n, S_n) \geq t^*(Z_n)\} = \left\{ \widehat{K}_n \widehat{v}_{n+1}(\widehat{Z}_n) > \max_{s \in G(\widehat{Z}_n)} \widehat{J}_n(\widehat{v}_{n+1}, g)(\widehat{Z}_n, s) \right\},$$

ce qui permet de comparer facilement  $\bar{V}_n$  et  $\widehat{V}_n$ .

### 2.3.4 Comparaison avec la méthode de Costa et Davis

Notre méthode numérique présente un certain nombre de similarités avec celle de Costa et Davis développée dans [CD88, CD89]. En effet, les deux méthodes reposent sur le remplacement de  $Z_n$  par une version discrétisée dans les équations de programmation dynamique, cette version discrétisée correspondant à une projection au plus proche voisin dans une grille donnée.

Là où les méthodes diffèrent est dans la construction de cette grille. Pour Costa et Davis, elle est construite arbitrairement. C'est une discrétisation cartésienne régulière de l'espace d'états dans les exemples qu'ils traitent. Elle ne dépend pas du temps, et donc s'applique de préférence pour les PDP qui restent confinés dans une même zone de l'espace. En revanche dans notre approche, à la place d'une unique grille on a une série de grilles indexée par le temps, pour tenir compte du fait que le PDP peut visiter des zones différentes de l'espace d'états au cours du temps (voir l'exemple de la section 2.4.3 et la Figure 2.4 pour un exemple concret). De plus, ces grilles ne sont pas arbitraires mais optimisées par la méthode de quantification. Ces grilles multiples et optimisées sont bien sûr plus longues à obtenir, mais elles nous permettent d'avoir des bornes pour la vitesse de convergence, contrairement à [CD88, CD89].

Comme la grille de discrétisation de Costa et Davis est unique, ils peuvent obtenir une approximation en tout point pour la fonction valeur, et donc connaître ses courbes de niveaux. Ceci leur permet de construire une règle d'arrêt basée sur les niveaux de la fonction valeur, et définir des régions de continuation et d'arrêt dans l'espace d'états du processus. Avec notre méthode, les grilles de quantification dépendent du point de départ du processus. En théorie, il faut donc relancer tous les calculs de grilles pour chaque point en lequel on veut approcher la fonction valeur. En pratique, on peut aussi partir d'une grille uniforme sur tous les points de départ voulus. Il est cependant plus compliqué d'obtenir les ensembles de niveau de la fonction valeur. Aussi notre règle d'arrêt est-elle différente. Elle ne repose pas sur les lignes de niveau de la fonction valeur, mais sur des seuils en temps actualisées à chaque saut. Il n'est donc pas nécessaire de connaître la position du processus à chaque instant pour savoir si on doit s'arrêter ou non. Il suffit de l'observer aux instants de sauts.

## 2.4 Applications

Notre méthode d'approximation a été mise en œuvre sur plusieurs exemples de problèmes de maintenance issus de l'industrie. Avant de les détailler, je donne quelques indications générales sur l'implémentation de la méthode.

### 2.4.1 Implémentation

La première étape pour l'implémentation pratique de notre méthode consiste à créer un simulateur numérique du processus à contrôler. Il se trouve que dans les exemples que nous avons traités, le flot a une expression explicite. Si ce n'est pas le cas, il faut un schéma numérique d'intégration des équations différentielles définissant le flot. Il n'existe que très peu de travaux mesurant l'impact de cette approximation sur la simulation d'un PDP, voir par exemple [Rie13] pour un cas très particulier de PDP venant des neurosciences. Pour simuler les temps de saut qui dépendent de l'état du système, on utilise l'algorithme de rejet décrit dans [CT97, Proposition 1.21]. Pour un processus industriel, il faut donc commencer par le modéliser par un PDP et expliciter les différents paramètres par estimation ou avis d'expert selon les cas.

Avec ce simulateur de trajectoires, on construit les grilles de quantifications en utilisant l'algorithme CLVQ (*Competitive Learning Vector Quantization*), voir par exemple [BP03]. On crée les grilles initiales par simulation, avec les nombres de points souhaités. Ensuite on affine ces grilles en simulant une nouvelle trajectoire. On cherche le plus proche voisin à chaque instant dans les anciennes grilles, et on déplace ces points à l'aide d'un gradient stochastique. En répétant cette procédure, on espère obtenir des grilles de quantification proches des grilles minimisant la norme  $L_2$  de l'erreur. Il existe des preuves partielles de convergence de cet algorithme, voir [BP97, Pag98]. On obtient également par simulations de Monte Carlo les poids de chaque point dans les grilles, ainsi que les matrices de transition entre les grilles successives. Ces simulations de Monte Carlo peuvent également donner une approximation de l'erreur de quantification. L'étape de quantification est très coûteuse en temps, surtout lorsque la dimension du processus à quantifier est grande, que l'horizon de calcul est grand, et qu'on souhaite un grand nombre de points dans chaque grille. Cependant, le calcul des grilles peut-être réalisé hors ligne une fois pour toutes.

Une fois les grilles calculées, on choisit le pas de discrétisation en temps  $\Delta$ . Dans le plupart des applications,  $\Delta$  est le même pour tous les points de toutes les grilles. Il suffit donc de calculer  $t^*(z)$  pour tous les  $z$  dans les grilles, et de caler  $\Delta$  à partir du minimum des  $t^*(z)$  pour avoir un nombre minimal de points dans chacune des grilles en temps. Il n'est pas nécessaire de garder en mémoire les grilles en temps. En effet, avec les valeurs de  $\Delta$  et  $t^*$  elles sont très faciles à reconstituer.

L'étape suivante consiste à lancer l'optimisation proprement dite et calculer les  $\widehat{V}_n$  à chaque pas de temps. On garde également en mémoire pour chaque point de la grille qui a gagné la maximisation entre  $\max \widehat{J}_n$  et  $\widehat{K}_n$ . On obtient ainsi une approximation de la fonction valeur. On peut calculer la performance de notre règle d'arrêt par

simulations de Monte Carlo. Pour chaque nouvelle trajectoire tirée, on calcule la valeur de  $R_{n,\beta}$  à chaque nouveau saut et on décide de s'arrêter ou non selon que cette valeur est plus petite ou plus grande que le temps  $S_{n+1}$  jusqu'au prochain saut. On peut ainsi comparer la performance obtenue avec  $\hat{\tau}$  à la performance optimale approchée.

### 2.4.2 Equipement optronique

Notre méthode a été mise en œuvre par Camille Baysse dans sa thèse [BBdS<sup>+</sup>12, BBGP<sup>+</sup>13]. Dans le cadre de l'optimisation de la fiabilité, Thales Optronique intègre désormais dans ses équipements, des systèmes d'observation de leur état de santé. Chacun des équipements suivis possède donc un journal de bord qui fournit différentes informations à chaque mise en marche : nombre d'utilisations, temps de fonctionnement cumulé de l'équipement, température initiale et temps de mise en froid noté  $Tmf$ . Ce temps de mise en froid est le temps de passage du système d'une température initiale (en général la température ambiante) à une température très basse. Cet abaissement de la température est nécessaire au fonctionnement de l'équipement et se fait à chaque mise en marche. Pour les experts, une augmentation du  $Tmf$  traduit une détérioration du système. Selon cette hypothèse, le suivi de l'évolution du  $Tmf$  peut permettre de déterminer l'état du système et de déclencher une maintenance pour prévenir la panne.

La dynamique du système de mise en froid est décrite par un PDP particulièrement simple, qui tient également compte du temps courant (qui influe sur les taux de panne). Le système a 3 modes possibles  $M = \{1, 2, 3\}$ . Le mode 1 correspond au fonctionnement normal, le mode 2 à un état dégradé ( $Tmf$  augmenté) et le mode 3 à la panne totale. La variable continue est le temps cumulé de fonctionnement depuis la première mise en service. Le temps représente ainsi une mesure de l'âge du système. L'équipement est en état stable  $m = 1$  au début de l'étude. Les transitions possibles sont les suivantes, voir Figure 2.1

- S'il passe directement dans l'état de panne ( $m = 3$ ), la cause de cette panne directe est électronique ou due à un problème de roulement à billes. Les taux instantanés de survenue de ces pannes sont respectivement  $\lambda_1$  et  $\lambda_3(t)$ .
- S'il passe dans l'état dégradé ( $m = 2$ ), c'est suite à une usure du système de mise à froid. Le taux de survenue de la dégradation est noté  $\lambda_0(t)$ .
- De l'état dégradé  $m = 2$ , la transition vers l'état de panne  $m = 3$  due à une cause électronique ou de roulement à billes est toujours possible. A ces deux causes s'ajoute la panne de l'appareil de mise en froid de taux  $\lambda_2$ .
- Lorsque l'appareil est dans l'état de panne ou l'état dégradé, il ne peut revenir dans l'état stable.

Selon les avis d'experts, les taux de panne  $\lambda_0(t)$  et  $\lambda_3(t)$  dépendent de l'âge  $t$  du système, contrairement aux autres taux qui sont fixes. Les caractéristiques locales du PDP sont donc les suivantes. Pour tout  $z = (m, t)$  dans l'espace d'états  $E = \{1, 2, 3\} \times \mathbb{R}_+$ , et tout  $s \geq 0$  on a

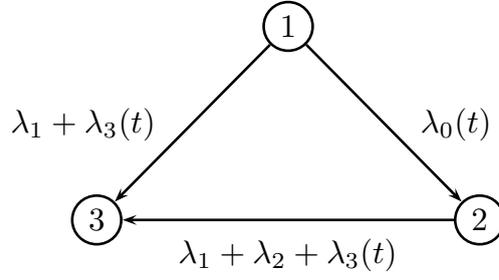


FIGURE 2.1 – Transitions entre les différents états de l'équipement optronique.

$$\begin{aligned}
 \Phi(z, s) &= (m, t + s), \\
 \lambda(z) &= (\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t))\mathbb{1}_{\{m=1\}} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3(t))\mathbb{1}_{\{m=2\}}, \\
 Q(z, \{(m', t')\}) &= \mathbb{1}_{\{t=t'\}} \left( \frac{\lambda_0(t)\mathbb{1}_{\{m=1, m'=2\}} + (\lambda_1 + \lambda_3(t))\mathbb{1}_{\{m=1, m'=3\}}}{\lambda_0(t) + \lambda_1 + \lambda_3(t)} + \mathbb{1}_{\{m=2, m'=3\}} \right).
 \end{aligned}$$

Les valeurs des paramètres sont fournies par avis d'expert et confidentielles, mais  $\lambda_0(t)$  et  $\lambda_3(t)$  vérifient bien les conditions de régularité requises.

Dans ce modèle, le temps déterministe d'atteinte de la frontière de l'espace d'états est  $t^*(z) = +\infty$  pour tout  $z$  dans  $E$ . Ceci n'est cependant pas restrictif. En effet, on cherche à optimiser sur un horizon  $t_f = 10\,000$  heures. On peut donc sans restriction tuer le processus (le placer dans un état cimetièr) lorsqu'il atteint ce seuil et considérer l'espace d'états  $E = \{1, 2, 3\} \times [0, 10\,000[$ . On a alors  $t^*(m, t) = 10\,000 - t$  qui vérifie bien l'hypothèse **(H.3)**. Les autres hypothèses sont clairement vérifiées. Comme le processus a au maximum deux sauts avant d'atteindre la panne totale ou l'état cimetièr, l'horizon de calcul est naturellement  $T_2$ .

La fonction de gain  $g$  est construite de sorte à pénaliser une non intervention avant la panne totale, mais également à favoriser l'utilisation la plus longue possible du système avant une intervention. On choisit donc

$$g(m, t) = t\mathbb{1}_{\{m \neq 3\}}.$$

Les résultats obtenus sont résumés dans la Table 2.1 pour 1000 points dans les grilles de quantification,  $10^7$  réplifications de Monte Carlo pour la colonne sans maintenance, et  $10^7$  réplifications de Monte Carlo des trajectoires stoppées pour la colonne avec maintenance. Il n'y a pas de valeur théorique pour comparer, mais on peut constater que les performances du système sont nettement améliorées avec notre stratégie de maintenance. Certains temps moyens de panne étant très courts, on choisit de ne pas effectuer de maintenance systématiquement avant, car ceci conduirait à une performance moyenne plus faible, puisque le fonction de coût est multiple du temps de fonctionnement. Le fait qu'on optimise en moyenne et que l'observation du temps courant ne fournisse pas d'information sur l'état du système explique que certains tirages donnent quand même une performance nulle.

	sans maintenance	avec maintenance
performance moyenne	519	2280
tirages à performance nulle	94.81%	51.44%
Etat 1 → Etat 2	39.47%	31.40%
Etat 1 → Etat 3		
panne électronique	39.33%	34.20%
panne du roulement à billes	16.10%	10.85%
panne de la machine à froid	0	0
$t_f$ atteint dans l'état 1	5.10%	0
Etat 1 → maintenance	0	23.55%
Etat 2 → Etat 3		
panne électronique	0.93%	0.20%
panne du roulement à billes	0.50%	0.08%
panne de la machine à froid	98.35%	20.08%
$t_f$ atteint dans l'état 2	0.22%	0
Etat 2 → maintenance	0	79.64%

TABLE 2.1 – Comparaison des performances avec et sans maintenance.

D'autres travaux sont en cours avec une fonction de gain tenant compte de la différence entre le prix de réparation de l'équipement selon le type de panne et le prix d'une maintenance préventive.

### 2.4.3 Structure soumise à corrosion

Un deuxième exemple industriel nous a été fourni par Charles Elegbede d'As-trium dans le cadre de l'ANR Fautocoes. Il s'agit d'optimiser la maintenance d'une structure métallique en aluminium soumise à corrosion. Il s'agit d'une petite structure qui sert de support à des éléments critiques à l'intérieur d'un missile balistique stratégique. En temps de paix, le missile est stocké dans un sous marin nucléaire lanceur d'engin et inspecté avec une périodicité donnée. Ces engins sont potentiellement faits pour avoir des durées de stockage importantes. L'exigence de sûreté sur cette structure est très forte. Les contraintes mécaniques qui s'exercent sur la structure dépendent de son épaisseur. Une perte d'épaisseur entraîne des sur-contraintes et donc des risques de rupture. Il est donc crucial de maîtriser l'évolution de l'épaisseur de la structure dans le temps, et d'intervenir avant la rupture.

La structure en aluminium séjourne successivement dans trois ambiances ou environnements : l'atelier (ambiance 1), le sous-marin en opération (ambiance 2) et le sous-marin en cale sèche (ambiance 3). La succession des ambiances est déterministe (1, 2, 3, 1 et ainsi de suite), mais le temps passé dans chaque ambiance est aléatoire suivant une loi exponentielle dont le paramètre  $\lambda_m$  dépend de l'ambiance  $m$ . Ces environnements sont plus ou moins corrosifs pour la structure. Typiquement, les environnements 1 et 3 sont les plus corrosifs, mais le temps passé dans l'environnement 2 est plus long en moyenne.

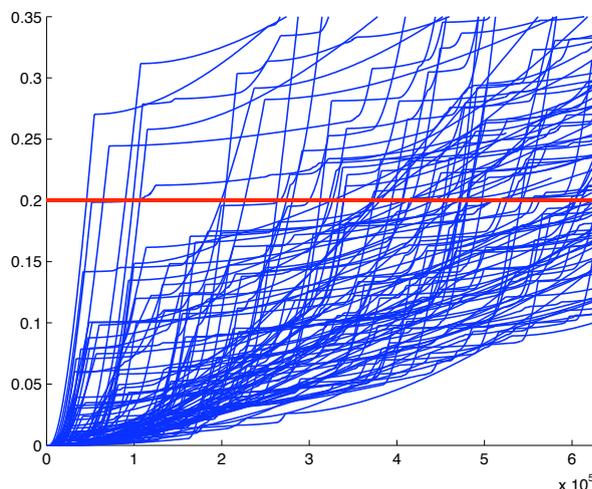


FIGURE 2.2 – 100 trajectoires de la perte d'épaisseur en fonction du temps

La structure est revêtue d'une protection anti-corrosion qui agit pendant une durée aléatoire qui suit une loi de Weibull. Une fois la protection entamée, elle n'agit plus et la perte d'épaisseur par corrosion démarre. La dynamique de la perte d'épaisseur  $d_t$  en fonction du temps passé dans l'ambiance  $m$  est alors donnée par

$$d_t = \rho_t \left( t - (\gamma_t + \eta_m) + \eta_m \exp \left( - \frac{t - \gamma_t}{\eta_m} \right) \right) \mathbb{1}_{\{t \geq \gamma_t\}},$$

où  $\gamma_t$  est la durée restante de la protection anti-corrosion à l'instant  $t$ ,  $\eta_m$  est une durée de transition déterministe qui dépend de l'ambiance et  $\rho_t$  est le taux de corrosion stable à l'instant  $t$ . C'est une grandeur qui est constante entre deux changements d'environnement, mais qui est tirée de façon aléatoire à chaque changement d'environnement (suivant une loi uniforme dont les paramètres dépendent de l'environnement) pour rendre compte des incertitudes sur le caractère plus ou moins corrosif de chaque ambiance.

La valeur des différents paramètres est donnée dans [dSDZ+12, dSDZ+10], ainsi que les caractéristiques locales du PDP correspondant. L'ensemble des modes est de cardinal 6 : on prend en compte les trois ambiances et le fait que la protection anti-corrosion agit encore ou non. La composante euclidienne de ce PDP doit prendre en compte toutes les quantités aléatoires. Elle est donc de dimension 2 avec les variables  $(\rho_t, \gamma_t)$  lorsque la protection anti-corrosion agit et les variables  $(\rho_t, d_t)$  lorsqu'elle n'agit plus.

Ici, l'horizon naturel de calcul n'est ni un temps de saut du processus, ni un temps fixe. Il correspond au seuil critique de 0.2mm qu'on ne veut pas dépasser. Une fois encore, pour obtenir des  $t^*$  bornés on tue le processus lorsqu'il atteint ce seuil critique. L'horizon de calcul est fixé de façon empirique par simulations de Monte Carlo à  $N = 25$  sauts. En effet, après 25 sauts presque toutes les trajectoires ont dépassé le seuil. Des exemples de trajectoires illustrant la forte dispersion du phénomène étudié sont donnés dans la Figure 2.2.

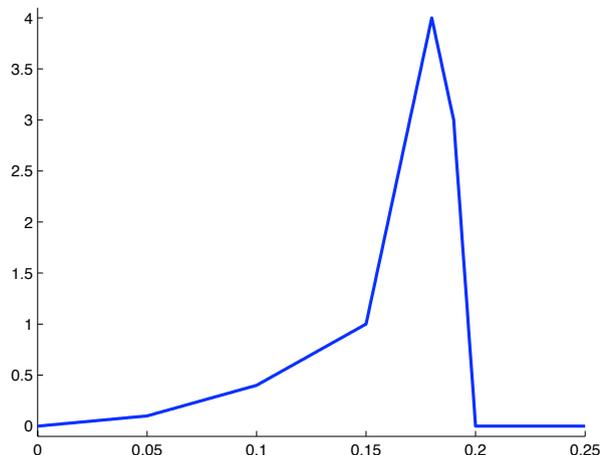


FIGURE 2.3 – Fonction de gain en fonction de la perte d'épaisseur

La fonction de gain  $g$  est choisie de façon à fortement pénaliser les interventions après le seuil critique (performance nulle), et à pénaliser également les interventions trop précoces. Elle ne dépend que de la perte d'épaisseur et est représentée Figure 2.3. Son maximum 4 est atteint pour une perte d'épaisseur de 0.18mm. Comme la perte d'épaisseur est continue et monotone, la fonction valeur de ce problème vaut exactement 4 et un temps d'arrêt optimal est le temps d'atteinte du seuil 0.18mm. Ceci va donc nous permettre de comparer les performances de notre algorithme avec les vraies valeurs.

Dans ce modèle, les différentes variables du problème ont des échelles radicalement différentes : de l'ordre de  $10^{-6}$  pour  $\rho$  et de  $10^5$  pour le temps passé dans l'ambiance 2. Ceci pose un problème dans l'algorithme CLVQ classique pour la quantification, car la recherche du plus proche voisin et les calculs de gradient se font en norme euclidienne, ce qui favorise les variables de grande valeur. Ce défaut est corrigé par une renormalisation des variables. Nous avons donc utilisé une norme euclidienne pondérée pour quantifier la chaîne de Markov associée à notre processus de dégradation. La Figure 2.4 montre quelques projections des grilles de quantifications à 2000 points que nous avons utilisées. Les instants sont choisis de façon à illustrer le caractère irrégulier et aléatoire de ces grilles qui sont construites sur mesure pour approcher au mieux la loi de notre processus de dégradation.

La Table 2.2 donne notre approximation de la fonction valeur ainsi que la performance moyenne de notre règle d'arrêt en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification. Ceci illustre bien la convergence lorsque ce nombre de points augmente. Nous avons également tracé (Figure 2.5) un histogramme de la loi de notre règle d'arrêt ainsi qu'un histogramme de la loi du temps d'atteinte de 0.18mm qui est un temps d'arrêt optimal pour notre problème. Les deux histogrammes sont très proches, alors que notre règle d'arrêt n'utilise absolument pas le seuil de 0.18mm, elle est complètement générale. C'est un point fort en faveur de notre méthode.

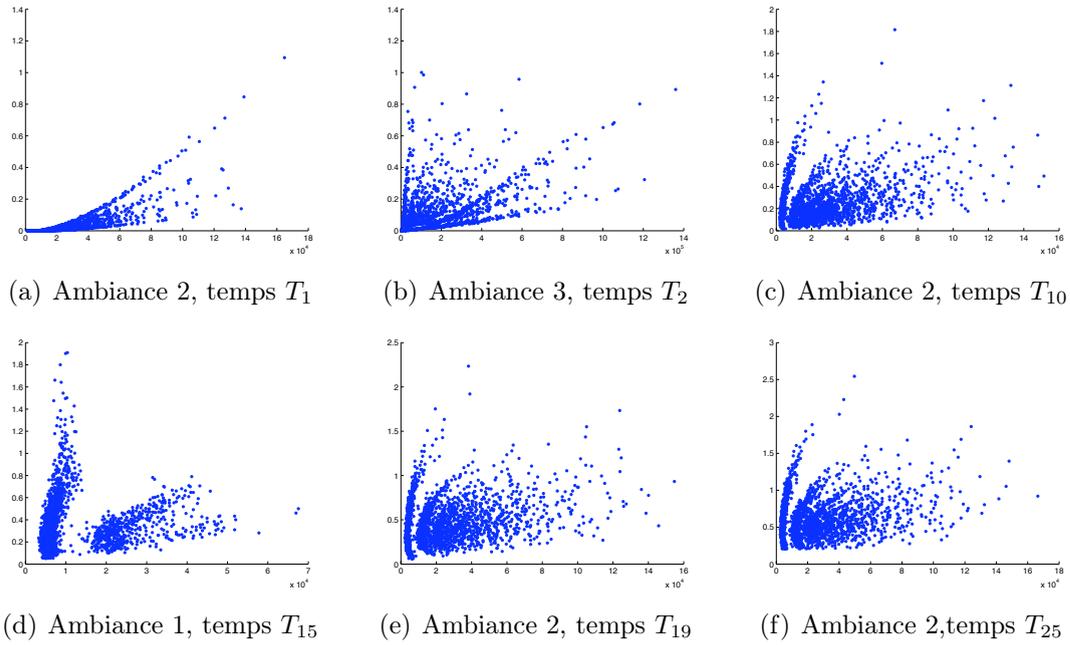


FIGURE 2.4 – Grilles de quantification (perte d'épaisseur et durée inter-sauts) pour le processus de corrosion.

Nombre de points dans les grilles de quantification	Approximation de la fonction valeur	Performance de la règle d'arrêt
10	2.48	0.94
50	2.70	1.84
100	2.94	2.10
200	3.09	2.63
500	3.39	3.15
1000	3.56	3.43
2000	3.70	3.60
5000	3.82	3.73
8000	3.86	3.75

TABLE 2.2 – Approximation de la fonction valeur.

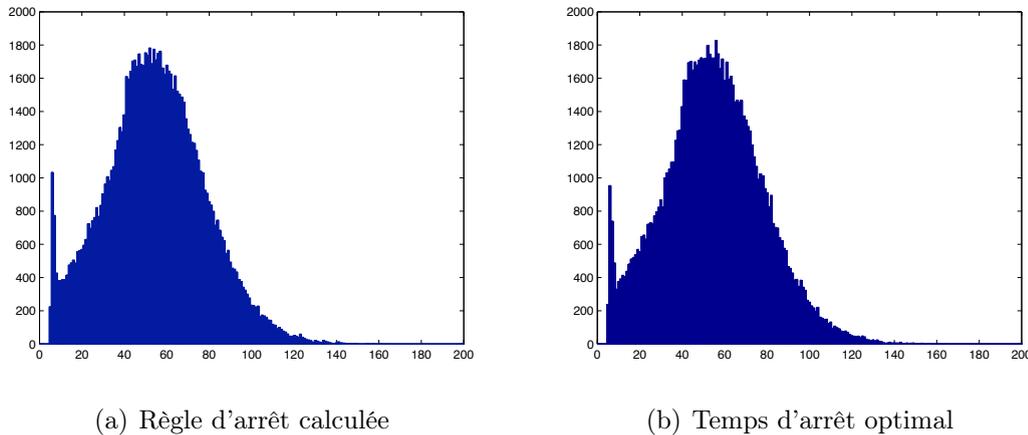


FIGURE 2.5 – Histogrammes de la règle d'arrêt et du temps d'arrêt optimal (100 000 simulations).

#### 2.4.4 Le cas test du réservoir

Le dernier exemple concerne un cas test de l'industrie gazière. Il s'agit d'un modèle de réservoir chauffé dont les vannes d'alimentation et de sortie de liquide peuvent tomber en panne. C'est un cas représentatif des problèmes de fiabilité dynamique, voir [Dev97]. Ce modèle a été introduit par [Ald87] sans la température, et par [Mar94] pour le modèle complet. Le premier défi concernant ce modèle est d'arriver à le simuler, la principale difficulté venant du fait que les variables discrètes et continues interagissent les unes sur les autres en une boucle fermée, contrairement aux deux exemples précédents. Ce problème est toujours partiellement d'actualité [Siu94, MZ95, MZ96, Coj96, TA96, DCST97, SACH06, LMZR10, LMK11], même si un simulateur exact basé sur une modélisation par les PDP a été proposé dans [ZDDG08].

Le réservoir (Figure 2.6) contient un liquide dont le niveau est régulé par trois unités : deux pompes d'arrivée de liquide (unités 1 et 2) et une vanne de sortie (unité 3) régulées par un bloc de contrôle. Une source thermique chauffe le liquide à l'intérieur du réservoir. Les grandeurs continues sont la hauteur  $h$  du liquide dans le réservoir et sa température  $\theta$ . Chacune des trois unités peut être dans les quatre états suivants : ouverte (ON), fermée (OFF), bloquée ouverte (Stuck ON) ou bloquée fermée (Stuck OFF). Une fois qu'une unité est bloquée, elle ne peut plus changer d'état. Les transitions possibles sont représentées sur la Figure 2.7. L'intensité de saut  $\lambda^i$  pour l'unité  $i$  dépend de la température  $\lambda^i = a(\theta)l^i$  avec

$$a(\theta) = \frac{b_1 \exp(b_c(\theta - 20)) + b_2 \exp(-b_d(\theta - 20))}{b_1 + b_2},$$

voir Figure 2.8 et [dSDZ12, dSZ13] pour les valeurs des différents paramètres. La forme de cette fonction est choisie pour engendrer un fort faux de panne lorsque la température augmente. Un bloc de contrôle peut également agir sur les unités pour maintenir le niveau de liquide dans le domaine acceptable ( $6\text{m} \leq h \leq 8\text{m}$ ). Si la hauteur de liquide descend en dessous de 6m, les unités sont placées respectivement

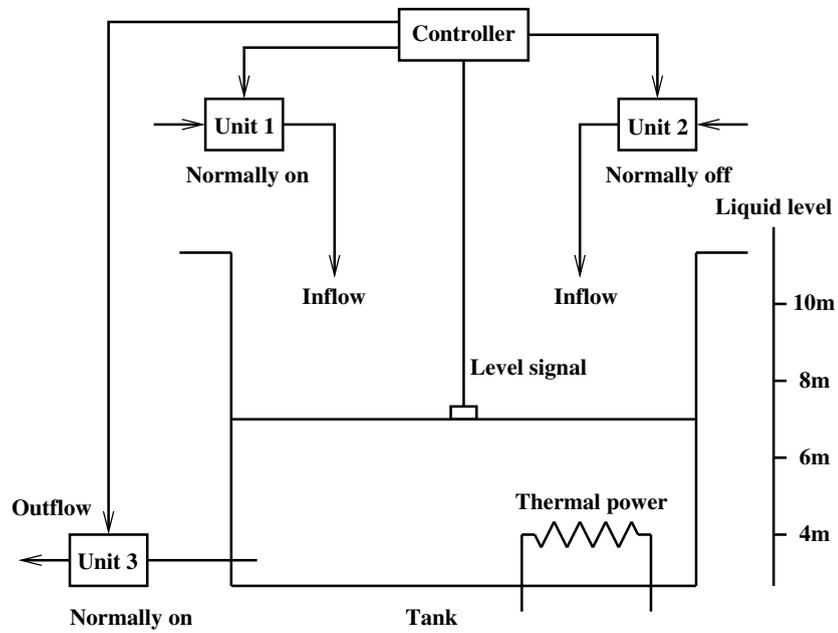


FIGURE 2.6 – Le réservoir chauffé

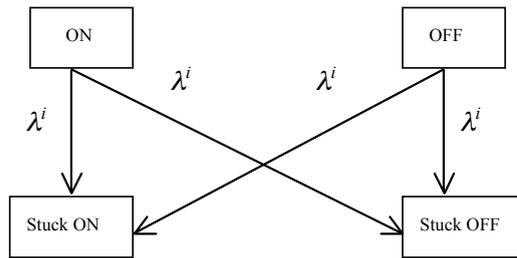


FIGURE 2.7 – Transitions pour l'unité  $i$

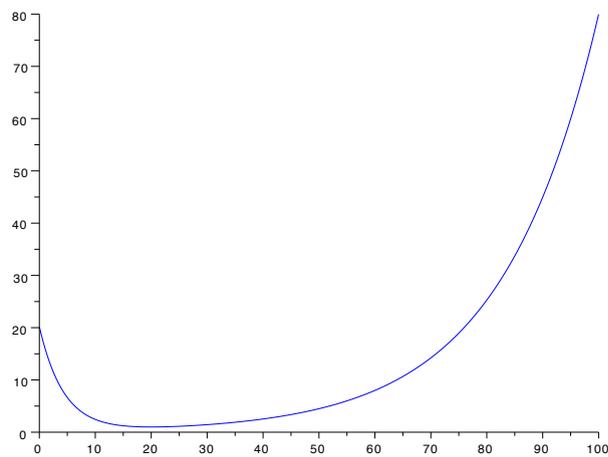


FIGURE 2.8 –  $a(\theta)$  en fonction de  $\theta$

en position ON, ON et OFF (si elles ne sont pas bloquées) pour remplir le réservoir. Au contraire, si le niveau dépasse 8m, elles sont placées en position OFF, OFF et ON pour le vider. Pour limiter le nombre de sauts du processus, nous avons également supposé que le bloc de contrôle peut lui-même tomber en panne (ce qui n'est pas le cas dans le modèle d'origine). A chaque sollicitation, le bloc de contrôle réussit son action avec probabilité  $p = 0.8$ , indépendamment des succès précédents. Une fois qu'il a échoué, il reste définitivement en mode échec. Le bloc de contrôle a donc deux états possible, succès 1 ou échec 0.

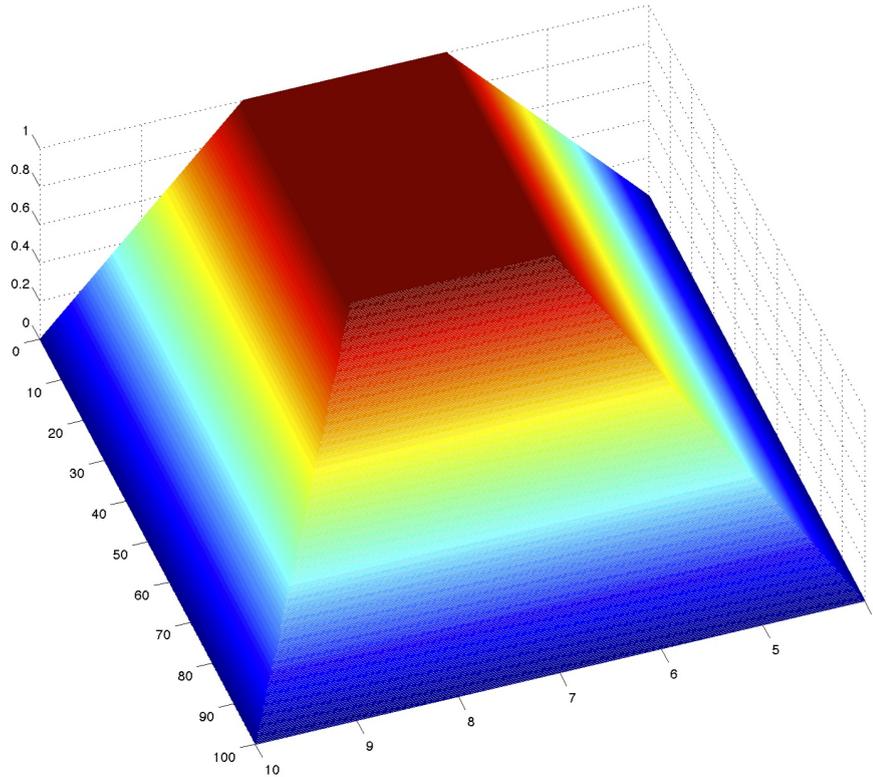
L'évolution de la hauteur  $h$  dépend naturellement de la position des unités, et celle de la température  $\theta$  dépend des unités et de la hauteur

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial t} &= (\nu_1 + \nu_2 - \nu_3)G, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= ((\nu_1 + \nu_2)G(\theta_{in} - \theta) + K)h^{-1},\end{aligned}$$

où  $\nu_i = 1$  si l'unité  $i$  set en position ouverte ON ou Stuck ON et  $\nu_i = 0$  sinon. A l'instant initial, le bloc de contrôle est en fonctionnement (état 1) et les unités en position respective ON, OFF et ON, de sorte que le niveau de liquide est constant  $h = 7\text{m}$  ainsi que la température  $\theta = 30.9261^\circ\text{C}$ . Le système est en équilibre jusqu'à la première panne. Le système s'arrête définitivement si l'un des événements redoutés est atteint : assèchement ( $h < 4\text{m}$ ), débordement ( $h > 10\text{m}$ ) ou surchauffe ( $\theta > 100^\circ\text{C}$ ). Voir [ZDDG08, dSDZ12, dSZ13] pour la modélisation par PDP, et [Gon10] pour le détail des caractéristiques locales du PDP (en l'absence de pannes du bloc contrôle).

Pour le problème de maintenance du réservoir, on souhaite intervenir avant la panne totale, mais favoriser le plus longtemps possible le bon fonctionnement dans la zone acceptable. Nous avons donc à nouveau rajouté le temps courant au processus, et considéré un horizon de calcul de 1000 heures, toujours en tuant le processus au-delà de ce seuil. La fonction de gain est de la forme  $g(h, \theta, t) = f(h, \theta)t^\alpha$  avec la fonction  $f$  représentée à la Figure 2.9. Elle est maximale (égale à 1) dans la zone de bon fonctionnement et nulle sur les événements redoutés. Dans cet exemple, on ne sait pas calculer la fonction valeur théorique ni un temps d'arrêt optimal.

Les difficultés rencontrées lors de l'implémentation sont de nature différente de celles rencontrées pour le modèle de corrosion. L'une d'entre elles est purement technique et due au fait que nous avons interfacé un code de simulation de trajectoires en  $C$  avec le CLVQ et l'optimisation en matlab, ce qui a causé certaines erreurs d'arrondi. D'autre part, une difficulté importante ici est le nombre de modes du système (128 en théorie, mais en réalité au maximum 30 modes simultanément possibles à un instant de saut donné), et surtout l'existence de modes relativement rares. Si on veut qu'ils apparaissent dans les grilles de quantification, il faut forcer leur présence à l'étape d'initialisation (car on en projette jamais un mode sur un autre), et ne pas utiliser de grilles avec un nombre trop faible de points pour ne pas trop surpondérer ces modes. Une étude préalable fine des probabilités de chaque mode à chaque temps de saut a été réalisée avec  $3 \cdot 10^9$  simulations de Monte Carlo.

FIGURE 2.9 – Graphe de  $f$  en fonction de  $h$  et  $\theta$ 

Nombre de points dans les grilles de quantification	Approximation de la fonction valeur	Performance de la règle d'arrêt
200	334.34	305.55
300	333.04	319.45
400	332.95	322.20
800	330.43	323.63
1000	330.87	324.04

TABLE 2.3 – Approximation de la fonction valeur.

	sans maintenance	avec maintenance
performance moyenne	211.80	330.87
gain nul	80.33%	0.02%
$6 \leq h \leq 8$	28.25%	90.02%
$\theta \leq 50^\circ C$	80.33%	95.09%
$h = 4$	16.65%	0%
$h = 10$	54.55%	0%
$\theta = 100$	9.13%	0.02%

TABLE 2.4 – Comparaison des performances avec et sans maintenance.

Les résultats de nos calculs sont donnés dans la Table 2.3. On voit encore la convergence de la méthode lorsque le nombre de points dans les grilles augmente. Comme on ne peut pas comparer ces résultats à une valeur théorique, nous avons comparé simplement les performances de notre politique de maintenance avec celle qui consiste à ne rien faire jusqu'à la panne pour  $10^5$  trajectoires simulées. Les résultats sont donnés dans la Table 2.4 et illustrent le gain obtenu par notre méthode. En particulier, les événements redoutés sont presque systématiquement évités. Ils sont en effet faciles à prévoir par l'observation de la hauteur et de la température, contrairement au cas de l'équipement optronique.

## 2.5 Arrêt optimal sous observation partielle

Lors de présentations des résultats ci-dessus dans des conférences ou séminaires en présence d'industriels, une question est souvent revenue. Pour mettre en œuvre notre méthode, il faut une observation parfaite du processus aux instants de saut. Or souvent les mesures sont entachées d'erreur. Comment procéder dans ce cas ? En réponse à cette question, nous avons étendu les résultats précédents au cas où le processus est seulement partiellement observé [BdSD13]. Dans la lignée de [PRS05], nous avons en fait traité un cas particulier plus simple où les temps de saut sont observés, et les positions après saut ne peuvent prendre qu'un nombre fini de valeurs dans un ensemble  $E_0 = \{z_1, \dots, z_q\}$ , avec  $0 < t^*(z_1) \leq t^*(z_2) \leq \dots \leq t^*(z_q) < \infty$ . On pose  $t^*(z_i) = t_i^*$ .

### 2.5.1 Processus d'observation et filtrage

Nous supposons donc que les instants de saut sont parfaitement observés, mais les modes et positions après saut sont observés à travers un bruit. Plus précisément, le processus d'observations  $(Y_n)_{n \geq 0}$  est défini par  $Y_0 = Z_0 \in E_0$  (déterministe) et pour  $n \geq 1$ ,

$$Y_n = \varphi(Z_n) + W_n,$$

où  $\varphi$  est une fonction de  $E_0$  dans  $\mathbb{R}^d$  et le *bruit*  $(W_n)_{n \geq 1}$  est une suite de variables aléatoires à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , indépendantes et identiquement distribuées de densité bornée  $f_W$ , indépendantes de  $(Z_n, S_n)_{n \geq 0}$ . Pour pouvoir définir les temps d'arrêts

adaptés à la filtration des observations, on introduit une version en temps continu du processus d'observations

$$Y_t = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{\{[T_j, T_{j+1})\}}(t) Y_j.$$

Le processus  $(Y_t)$  contient donc l'information donnée par les  $Y_n$  ainsi que les durées inter-sauts  $S_n$ . Soit alors  $\mathcal{F}^Y = (\mathcal{F}_t^Y)_{t \geq 0}$  la filtration continue engendrée par le processus d'observations complétée par les ensembles de mesure nulle, et  $\mathcal{M}_N^Y$  l'ensemble des  $\mathcal{F}^Y$ -temps d'arrêt majorés par  $T_N$ .

On introduit ensuite le processus de filtrage qui donne la meilleure approximation (au sens de l'espérance conditionnelle) des positions après-saut compte tenu des observations disponibles à chaque instant. Le processus de filtrage  $(\Pi_n)_{n \geq 0}$  à valeurs dans l'ensemble  $M_1(E_0)$  des probabilités sur  $E_0$  est alors défini par

$$\Pi_n(\{z_i\}) = \Pi_n^i = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{Z_n = z_i\}} | \mathcal{F}_{T_n}^Y],$$

pour tous  $1 \leq i \leq q$  et  $n \geq 0$ . Remarquons que cette étape fait passer des positions après-saut (inconnues) à valeurs dans  $E_0$  à un processus connu, mais plus compliqué à valeurs dans l'ensemble des mesures de probabilités sur  $E_0$ .

On s'intéresse maintenant au problème d'arrêt optimal suivant

$$v(\pi) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_N^Y} \mathbb{E}[g(X_\tau) | \Pi_0 = \pi],$$

où  $g$  est une fonction bornée lipschitzienne en temps le long du flot. On n'a plus besoin du caractère Lipschitz en espace car les variables aléatoires  $Z_n$  sont à valeurs dans  $E_0$  fini. Pour la même raison, les hypothèses sur les caractéristiques du PDP sont affaiblies.

**(H.2')** L'intensité de saut  $\lambda$  est bornée.

**(H.3')** Le temps d'atteinte de la frontière  $t^*$  borné sur  $E_0$ .

**(H.4')** Le noyau markovien  $Q$  vérifie  $Q(z, E_0) = 1$  pour tout  $z$  dans  $E$ .

Comme dans la littérature classique sur les problèmes d'arrêt optimal sous observation partielle, notre stratégie est en deux étapes. D'abord, on réécrit le problème d'arrêt optimal sous observation partielle comme un nouveau problème complètement observé pour le processus de filtrage. Ensuite, on résout ce nouveau problème en obtenant les équations de la programmation dynamique puis en les discrétisant.

Une étape préliminaire consiste à étudier le processus de filtrage, et en particulier montrer qu'on peut le construire récursivement à partir du processus d'observation  $(Y_n, S_n)$ , condition indispensable à la mise en œuvre pratique de la méthode et à la construction des grilles de quantification. Il s'agit d'un résultat original pour un PDP général (voir [AHN92] pour le filtrage des processus ponctuels qui peuvent être vus comme une sous-classe des PDP). La formule de récurrence (voir [BdSD13, Prop. 3.4]) fait à nouveau apparaître le caractère hybride du processus, avec des composantes continues et des composantes ponctuelles. On établit également que les processus  $(\Pi_n)$ ,  $(\Pi_n, S_n)$  et  $(\Pi_n, S_n, Y_n)$  ont la propriété de Markov pour la filtration des observations  $\mathcal{F}^Y$ .

## 2.5.2 Programmation dynamique

A partir des propriétés du filtre et de la structure particulière des  $\mathcal{F}^Y$ -temps d'arrêt, on obtient la reformulation de notre problème d'arrêt optimal sous observation partielle en un problème complètement observé faisant intervenir la chaîne  $(\Pi_n, S_n)$  [BdSD13, Prop. 4.2]. Ici encore, on obtient une formulation non standard qui mêle la chaîne  $(\Pi_n, S_n)$  en temps discret et des aspects venant du temps continu puisqu'on maximise sur les temps d'arrêt par rapport à une filtration continue. La formulation obtenue ressemble à celle des PDP obtenue dans [Gug86], mais ne correspond pas à cette classe de processus car la chaîne  $(\Pi_n, S_n)$  n'est pas la chaîne induite d'un PDP. Il faut donc établir de nouvelles équations de la programmation dynamique pour ce processus. On propose également la construction d'un temps d'arrêt  $\epsilon$ -optimal, en s'inspirant de [Gug86]. Par certains aspects, les opérateurs qui apparaissent maintenant sont plus compliqués que ceux de l'arrêt optimal classique car ils font intervenir la formule de récurrence du filtre  $\Pi_n = \Psi(\Pi_{n-1}, Y_n, S_n)$ , par d'autres aspects ils sont plus simples car les  $Z_n$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

On obtient le résultat suivant [BdSD13, Th 4.5], qui se démontre en utilisant la structure spécifique des temps d'arrêt pour la filtration des observations  $\mathcal{F}^Y$  ainsi que la propriété de Markov.

**Théorème 2.3** *Soit  $J$ ,  $K$  et  $L$  les opérateurs définis par*

$$\begin{aligned} J(v, h)(\pi, u) &= \mathbb{E}[v(\Pi_1)\mathbb{1}_{\{S_1 \leq u\}} + \sum_{i=1}^q h \circ \Phi(z_i, u)\Pi_0^i \mathbb{1}_{\{u < t_i^*\}} \mathbb{1}_{\{S_1 > u\}} | \Pi_0 = \pi], \\ Kv(\pi) &= J(v, h)(\pi, t_q^*), \\ L(v, h)(\pi) &= \sup_{0 \leq u \leq t_q^*} J(v, h)(\pi, u) \vee Kv(\pi), \end{aligned}$$

pour tous  $v$  dans  $B(M_1(E_0))$ ,  $h$  dans  $B(E)$ ,  $\pi$  dans  $M_1(E_0)$  et  $u \geq 0$ . Alors la fonction valeur  $v$  du problème d'arrêt optimal sous observation partielle est égale à  $v_0$  avec

$$\begin{cases} v_N &= \sum_{i=1}^q g(z_i)\pi^i, \\ v_n &= L(v_{n+1}, g) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1. \end{cases}$$

## 2.5.3 Schéma numérique

On propose alors une discrétisation des équations de la programmation dynamique basée sur les mêmes idées que pour le problème d'arrêt optimal complètement observé. Elle repose sur la discrétisation par quantification de la chaîne  $(\Pi_n, S_n)$ . C'est entre autre pour cette étape qu'il est important que le filtre soit de dimension finie, et donc que les positions après saut  $Z_n$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. On construit également une règle d'arrêt calculable qui est encore un vrai temps d'arrêt pour la filtration des observations.

Pour la discrétisation en temps, on fait en sorte que la grille ne contienne aucun des voisinages des  $t_i^*$ . On commence par fixer un pas  $\Delta$  qui vérifie

$$\Delta < \frac{1}{2} \min \{|t_i^* - t_j^*| \text{ pour } 0 \leq i, j, \leq q \text{ tels que } t_i^* \neq t_j^*\}.$$

Ici, ce pas n'a pas besoin de dépendre de  $z$  puisque les  $Z_n$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Ensuite, pour tout  $1 \leq m \leq q$  tel que  $t_m^* < t_{m-1}^*$  on pose

$$Gr_m(\Delta) = \{t_m^* + i\Delta, 1 \leq i \leq i_m\} \cup \{t_{m+1}^* - \Delta\},$$

avec  $i_m$  le maximum des entiers tels que  $t_m^* + i\Delta \leq t_{m+1}^* - \Delta$ . On note  $Gr(\Delta) = \cup_m Gr_m(\Delta)$ , de sorte que tout point de la grille est à distance au moins  $\Delta$  des  $t_i^*$ . Avec des notations analogues à celles de la partie 2.3, on appelle  $\widehat{v}_n$  l'approximation quantifiée de  $v_n$  et on pose  $V_n = v_n(\Pi_n)$  et  $\widehat{V}_n = \widehat{v}_n(\widehat{\Pi}_n)$ . On a le résultat de convergence suivant.

**Théorème 2.4** *Sous les hypothèses (H.1), (H.2'-4') et pour tout  $0 \leq n \leq N - 1$ , supposons que le pas de discrétisation  $\Delta$  vérifie*

$$\Delta > (2C_\lambda)^{-1/2} \|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_2^{1/2}.$$

Alors l'erreur de discrétisation pour  $V_n$  est majorée par

$$\begin{aligned} \|V_n - \widehat{V}_n\|_2 &\leq \|V_{n+1} - \widehat{V}_{n+1}\|_2 + a\Delta + b\|S_{n+1} - \widehat{S}_{n+1}\|_2^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + c_n\|\Pi_n - \widehat{\Pi}_n\|_2 + 2[v_{n+1}]\|\Pi_{n+1} - \widehat{\Pi}_{n+1}\|_2, \end{aligned}$$

avec des constantes explicites en fonction des paramètres du problème

$$a = [g]_2 + 2C_g C_\lambda, \quad b = 2C_g (2C_\lambda)^{\frac{1}{2}}, \quad c_n = [v_n] + 4C_g + 2[v_{n+1}].$$

La preuve est analogue à celle du Théorème 2.1. On obtient également l'analogue du Théorème 2.2 pour notre règle d'arrêt.

### Exemple

Pour l'instant, cette méthode n'a été testée que sur un petit exemple académique. Soit  $E = [0, 1[$  l'espace d'états et  $\partial E = \{1\}$  sa frontière. Le flot est défini par  $\Phi(x, t) = x + t$ , l'intensité de saut par  $\lambda(x) = 3x$ , et  $Q(x, \cdot)$  correspond à une loi discrète sur  $\{1/4, 1/2\}$  qui charge les points en fonction de la position du processus  $Q(x, \cdot) = x\delta_{1/4}(\cdot) + (1 - x)\delta_{1/2}(\cdot)$ . Comme le processus part de 0, on a  $E_0 = \{0, 1/4, 1/2\}$ . Le processus se déplace donc à vitesse 1 vers la frontière, et plus il s'approche de la frontière plus sa probabilité de sauter est grande. Un exemple de trajectoire est donné Figure 2.10 pour un horizon de 10 sauts. Le processus d'observation est défini par  $Y_n = Z_n + W_n$  avec  $W_n \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2)$ . Les croix roses représentent les observations  $Y_n$ . La Table 2.5 donne les valeurs calculées du filtre.

On choisit une fonction de gain  $g(x) = x$  de sorte que la performance est maximale lorsque le processus est proche de 1, mais il a alors une forte probabilité de sauter sur une valeur plus défavorable. Ici encore, il n'y a pas de valeur théorique accessible pour la fonction valeur. On peut cependant comparer les performances avec un majorant naturel  $\mathbb{E}[\sup X_t] = 0.997$ . Les résultats sont donnés dans la Table 2.6. On constate à nouveau que la performance s'améliore lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification augmente.

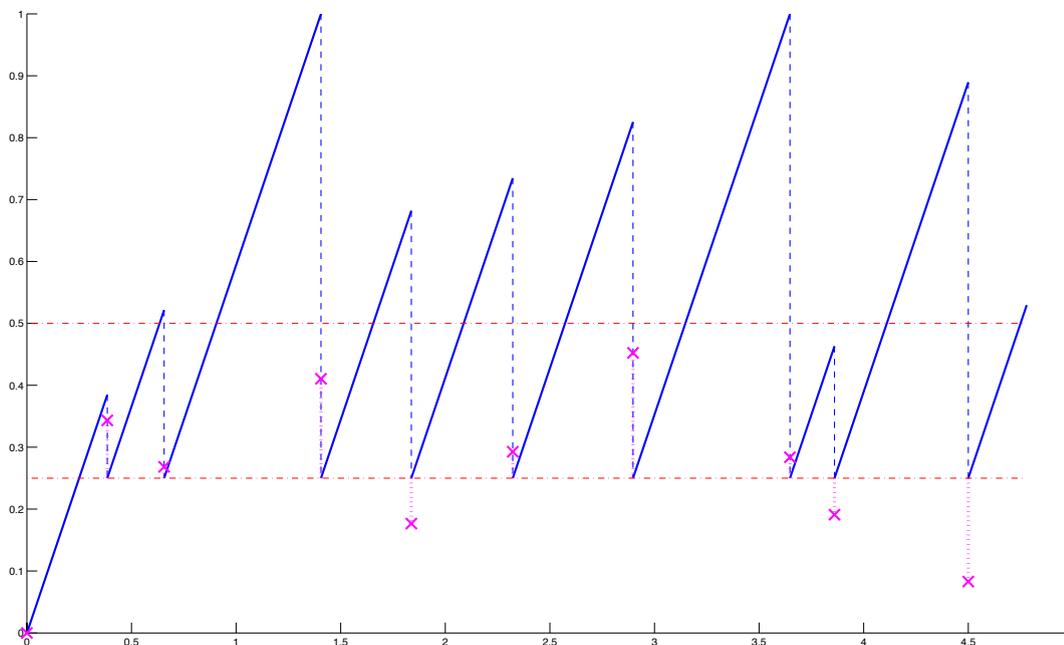


FIGURE 2.10 – Exemple de trajectoire avec observations

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Z_n$	0	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
$Y_n$	0	0.34	0.27	0.41	0.18	0.29	0.45	0.28	0.19	0.08	0.26
$\Pi_n$	1	0.00	0.03	0.00	0.21	0.01	0.00	0.02	0.16	0.74	0.03
	0	0.67	0.91	0.29	0.78	0.87	0.13	0.89	0.83	0.26	0.92
	0	0.31	0.06	0.71	0.01	0.11	0.87	0.09	0.01	0.00	0.05

TABLE 2.5 – Valeurs du processus de filtrage.

Nombre de points dans les grilles de quantification	Fonction valeur approchée	Performance de la règle d'arrêt
50	0.924	0.932
100	0.926	0.938
200	0.931	0.940
500	0.934	0.942

TABLE 2.6 – Fonction valeur en fonction du nombre de points dans les grilles de quantification

## 2.6 Contrôle impulsionnel

L'étape naturelle qui suit celle de l'arrêt optimal est le contrôle impulsionnel plus général. Il s'agit d'un problème beaucoup plus difficile, car il faut d'une certaine façon itérer des problèmes d'arrêt optimal couplés, mais également choisir la nouvelle valeur du processus après chaque intervention. Ce nouveau degré de liberté pose des problèmes numériques, car on ne peut plus transformer les équations de la programmation dynamique sur les fonctions valeur en équations récursives pour des variables aléatoires. Il faut donc adopter une stratégie légèrement différente de celle de l'arrêt optimal.

### 2.6.1 Formulation du problème

La formulation mathématique précise du problème de contrôle impulsionnel pour les PDP demande une construction spécifique sur l'espace canonique pour pouvoir définir les trajectoires tuées et redémarrées au moment des interventions, voir [CD89]. Cette construction ne sera pas détaillée ici.

Informellement, on appelle *stratégie*  $\mathcal{S} = (\tau_n, \zeta_n)_{n \geq 1}$  une suite de temps d'arrêts  $(\tau_n)$  et de variables aléatoires non anticipatives  $(\zeta_n)$  à valeurs dans l'espace d'états  $E$  et définies sur un espace mesurable  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ . Les temps  $\tau_n$  correspondent aux instants d'intervention du contrôleur, et les variables aléatoires  $\zeta_n$  correspondent au nouveau point de départ du processus après intervention. Autrement dit, entre les temps  $\tau_n$  et  $\tau_{n+1}$ , le système suit la trajectoire du PDP  $(X_t)$  partant de  $\zeta_n$ . Si une intervention a lieu lorsque le processus est dans l'état  $z \in E$ , l'ensemble des points *admissibles* d'où le contrôleur peut faire redémarrer le processus est noté  $\mathbb{U} \subset E$ . On supposera que cet ensemble  $\mathbb{U}$  est fini et ne dépend pas de  $z$ . On appelle  $u$  son cardinal

$$\mathbb{U} = \{z_i, 1 \leq i \leq u\}.$$

La stratégie  $\mathcal{S}$  induit une famille de mesures de probabilité  $(\mathbb{P}_z^{\mathcal{S}}, z \in E)$  sur  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ . On appelle  $\mathbb{S}$  l'ensemble des stratégies  $\mathcal{S}$  qui vérifient  $\tau_\infty = \infty$   $\mathbb{P}_z^{\mathcal{S}}$ -presque sûrement pour tout  $z$  dans  $E$ .

On définit enfin le coût  $\mathcal{J}^{\mathcal{S}}$  associé à la stratégie  $\mathcal{S}$  avec facteur d'oubli  $\alpha$ , lorsque le processus part de  $z \in E$  par

$$\mathcal{J}^{\mathcal{S}}(z) = \mathbb{E}_z^{\mathcal{S}} \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(Y_s) ds + \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha \tau_n} c(Y_{\tau_n}, Y_{\tau_n^+}) \right],$$

où  $(Y_t)$  désigne le processus avec les interventions. La fonction  $f$  correspond au coût instantané, et la fonction  $c(z, z')$  au coût d'intervention ponctuel de déplacement de l'état  $z$  à l'état  $z'$ . On suppose que  $f$  est une fonction positive,  $c(\cdot, z)$  est dans  $BL(\partial E)$  pour tout  $z$  dans l'espace de contrôles  $\mathbb{U}$ ,  $0 < c_0 < c(z, z') < C_c$  pour tous  $(z, z') \in E \times \mathbb{U}$  et que le coût de deux interventions simultanées est toujours plus élevé que le coup d'une seule intervention :  $c(z, z') + c(z', z'') \geq c(z, z'')$ , pour tous

$z \in E$  et  $(z', z'') \in \mathbb{U}^2$ . La fonction valeur pour ce problème de contrôle impulsif à horizon infini avec facteur d'oubli est alors

$$\mathcal{V}(z) = \inf_{S \in \mathbb{S}} \mathcal{J}^S(z) = \inf_{S \in \mathbb{S}} \mathbb{E}_z^S \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(Y_s) ds + \sum_{n=1}^\infty e^{-\alpha \tau_n} c(Y_{\tau_n}, Y_{\tau_n}^+) \right].$$

## 2.6.2 Schéma numérique

Comme pour l'arrêt optimal classique, notre schéma numérique est basé sur une écriture des équations de programmation dynamique à l'aide de la chaîne induite  $(Z_n, s_n)$ , puis une discrétisation par quantification de cette chaîne.

### Programmation dynamique

Pour ce problème de contrôle impulsif, les équations de programmation dynamique ont été obtenues dans [CD89]. Pour tous  $z$  dans  $E$ ,  $u \geq 0$  et  $(v, w)$  dans  $BL_\Phi(E)^2$  on définit les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} F(z, u) &= \int_0^{u \wedge t^*(z)} e^{-\alpha s - \Lambda(z, s)} f(\Phi(z, s)) ds, \\ J(v, w)(z, u) &= \mathbb{E} \left[ F(Z_n, u) + e^{-\alpha S_{n+1}} w(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u \wedge t^*(Z_n)\}} + \right. \\ &\quad \left. e^{-\alpha u \wedge t^*(Z_n)} v(\Phi(Z_n, u \wedge t^*(Z_n))) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u \wedge t^*(Z_n)\}} \mid Z_n = z \right], \\ Kw(z) &= \mathbb{E} \left[ F(Z_n, t^*(Z_n)) + e^{-\alpha S_{n+1}} w(Z_{n+1}) \mid Z_n = z \right], \\ Mw(z) &= \min_{z' \in \mathbb{U}} \{c(z, z') + w(z')\}, \\ L(v, w)(z) &= \inf_{u \leq t^*(z)} J(v, w)(z, u) \wedge Kw(z), \\ \mathcal{L}w(z) &= L(Mw, w)(z). \end{aligned}$$

Ici, les espérances sont prises par rapport au processus d'origine  $(X_t)$ . Les différences avec les opérateurs de la programmation dynamique pour l'arrêt optimal sont les suivantes. On a transformé les maximisations en minimisation car on cherche maintenant à calculer un coût minimal. La présence du facteur d'oubli induit les termes en  $e^{-\alpha}$ . Un nouveau terme apparaît : l'intégrale du coût instantané. Et surtout, un nouvel opérateur  $M$  entre en jeu. C'est celui qui permet de choisir la meilleure nouvelle position après l'intervention.

La fonction valeur se construit alors par itération de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . Cette fois-ci, l'itération est infinie car le problème d'optimisation est à horizon infini. En conséquence, on a de la souplesse pour l'initialisation. Soit  $h$  le coût de la stratégie *ne rien faire*, ou *zéro impulsion*

$$h(z) = \mathbb{E}_z \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha s} f(X_s) ds \right],$$

et  $g$  une fonction de  $BL_\Phi(E)$  qui domine  $h$  :  $g(z) \geq h(z)$  pour tout  $z$  dans  $E$ . On construit alors la fonction coût récursivement comme suit

$$\begin{cases} \mathcal{V}_0^g &= g, \\ \mathcal{V}_{n+1}^g &= \mathcal{L}(\mathcal{V}_n^g) \text{ pour } n \geq 1, \end{cases}$$

alors  $\mathcal{V} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{V}_n^g$ . Si on choisit  $g = h$ , alors  $\mathcal{V}_n^h$  est la fonction coût correspondant au problème où on autorise seulement  $n$  sauts ou impulsions. Même si cette quantité est interprétable donc intéressante à calculer numériquement, en pratique cela demande la connaissance de la fonction  $h$  pour tous les points de toutes les grilles de quantification (voir paragraphe 2.6.2), ce qui peut être numériquement compliqué à obtenir (voir la partie 3.2 pour des pistes de solution). En revanche, le choix d'une fonction  $g$  étant peu contraint, on peut par exemple choisir une constante qui majore  $h$ . Comme  $f$  est supposée bornée par  $C_f$ , un choix possible est donc  $g = C_f/\alpha$ .

### Horizon de calcul

Un nouveau problème qui se pose également est celui du choix de l'horizon de calcul puisque les équations de programmation dynamique donnent une récurrence infinie. En toute généralité, trouver un entier  $N$  tel que  $|\mathcal{V}_N^g - \mathcal{V}|$  est petit est un problème très difficile. En pratique, on peut lancer le calcul pour plusieurs choix de l'horizon  $N$  et trouver empiriquement une valeur raisonnable, voir paragraphe 2.6.2. La méthode décrite ici est en fait une méthode d'approximation de  $\mathcal{V}_N^g$  pour un horizon  $N$  fixé.

### Difficultés de la récursion

Une fois l'horizon  $N$  fixé, on change la numérotation des fonctions pour se rapprocher des notations de l'arrêt optimal. On pose  $v(z) = \mathcal{V}_N^g(z)$  et le système à discrétiser devient

$$\begin{cases} v_N &= g, \\ v_n &= \mathcal{L}(v_{n+1}) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N-1, \end{cases}$$

On a alors  $v_0 = v(z) = \mathcal{V}_N^g(z)$ . Comme annoncé plus haut, ce système de récurrence sur des fonctions ne peut plus se traduire en une récurrence sur des variables aléatoires. En effet, on a

$$\begin{aligned} v_n(Z_n) &= \inf_{u \leq t^*(z)} \left\{ \mathbb{E} \left[ F(Z_n, u) + e^{-\alpha S_{n+1}} v_{n+1}(Z_{n+1}) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} < u \wedge t^*(Z_n)\}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{-\alpha u \wedge t^*(Z_n)} M v_{n+1}(\Phi(Z_n, u \wedge t^*(Z_n))) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} \geq u \wedge t^*(Z_n)\}} \mid Z_n = z \right\} \\ &\quad \wedge \mathbb{E} \left[ F(Z_n, t^*(Z_n)) + e^{-\alpha S_{n+1}} v_{n+1}(Z_{n+1}) \mid Z_n = z \right]. \end{aligned}$$

En effet, le terme en  $M v_{n+1}$  fait intervenir les  $v_{n+1}(z')$  pour  $z'$  dans l'ensemble de contrôle  $\mathbb{U}$  qui ne sont pas des points de la forme  $v_{n+1}(Z_{n+1})$ . Cependant, nous avons choisi  $\mathbb{U}$  fini. Dont il suffit de faire un pré-calcul des valeurs des fonction  $v_n$  sur l'ensemble  $\mathbb{U}$ . Ceci peut se faire avec la récurrence suivante

$$\begin{cases} v_N(Z_{N-n}^i) &= g(Z_{N-n}^i), \\ v_{n+k}(Z_k^i) &= \mathcal{L}(v_{n+k+1})(Z_k^i) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-n-1, \end{cases}$$

où  $(Z_n^i, S_n^i)$  est la chaîne induite avec point de départ  $(Z_0^i, S_0^i) = (z_i, 0)$ . On obtient alors pour  $k = 0$  la valeur de  $v_n(z_i)$ .

Il y a encore une difficulté cachée dans les équations de programmation dynamique. En effet, pour calculer  $v_n(z_i)$ , il faut connaître tous les  $v_{n+k}(Z_k^i)$  avec  $1 \leq k \leq N - n$ . Or, pour calculer  $v_{n+1}(z_i)$  on a déjà calculé les  $v_{n+1+k}(Z_k^i)$  pour  $1 \leq k \leq N - n - 1$ , mais ces valeurs ne peuvent pas être réutilisées pour le calcul suivant à cause du décalage d'indice. Les calculs doivent donc être intégralement recommencés à chaque itération, ce qui mène à un schéma triangulaire assez lent à faire tourner, voir Figure 2.11 pour une illustration.

### Discrétisation

Comme les grilles de quantification dépendent du point de départ du processus, on propose une méthode en deux étapes, qui utilise plusieurs séries de grilles de quantification.

- Une première série de grilles est construite à l'aide des chaînes  $(Z_n^i, S_n^i)$  ayant pour point de départ les points de l'ensemble de contrôle  $\mathbb{U}$  :  $Z_0^i = z_i$ , pour tout  $1 \leq i \leq u$ . On appelle  $(\widehat{Z}_n^i, \widehat{S}_n^i)_{0 \leq n \leq N}$  l'approximation quantifiée de  $(Z_n^i, S_n^i)$ .
- Une deuxième série de grilles est utilisée pour calculer la fonction valeur au point  $z$ . On appelle  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)_{0 \leq n \leq N}$  l'approximation quantifiée de  $(Z_n, S_n)$  avec  $Z_0 = z$ .

Nous avons alors autant de versions discrétisées des opérateurs :  $\widehat{L}_n^i$  sur le support de  $(\widehat{Z}_n^i, \widehat{S}_n^i)$  et  $\widehat{L}_n$  sur celui de  $(\widehat{Z}_n, \widehat{S}_n)$ , avec des notations similaires à celles des parties précédentes, voir [dSD12] pour les détails.

A l'aide de la première série de grilles, on construit une approximation  $\widetilde{v}_n(z^i)$  de  $v_n(z^i)$  pour tous  $1 \leq n \leq N$  et  $1 \leq i \leq u$  de la façon suivante :  $\widetilde{v}_N(z^i) = g(z^i)$  et pour  $n \leq N - 1$ ,  $\widetilde{v}_n(z^i) = \widehat{v}_n^{i,n}(z^i)$  est construit récursivement par

$$\begin{cases} \widehat{v}_N^{i,n}(\widehat{Z}_{N-n}^i) &= g(\widehat{Z}_{N-n}^i), \\ \widehat{v}_{n+k}^{i,n}(\widehat{Z}_k^i) &= \widehat{L}_k^i(M\widetilde{v}_{n+k+1}, \widehat{v}_{n+k+1})(\widehat{Z}_k^i) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N - n - 1. \end{cases}$$

Cette approximation est utilisée pour les calculs avec l'opérateur  $M$ . On utilise ensuite l'autre série de grilles pour calculer une approximation  $\widehat{v}_n(\widehat{Z}_n)$  de  $v_n(Z_n)$  pour tout  $0 \leq n \leq N$

$$\begin{cases} \widehat{v}_N(\widehat{Z}_N) &= g(\widehat{Z}_N), \\ \widehat{v}_n(\widehat{Z}_n) &= \widehat{L}_n(M\widetilde{v}_{n+1}, \widehat{v}_{n+1})(\widehat{Z}_n) \quad \text{pour } 0 \leq n \leq N - 1. \end{cases}$$

La procédure est schématisée sur la Figure 2.11. Sous les hypothèses (H.1-4), on obtient encore la convergence de la méthode, voir [dSD12, Théorèmes 5.11 et 5.23].

### Exemple

Cette méthode a été implémentée sur un exemple académique simple. Soit  $E = [0, 1[$  l'espace d'états et  $\partial E = \{1\}$  sa frontière. Le flot est défini par  $\Phi(x, t) = x + t$ , l'intensité de saut par  $\lambda(x) = 3x$ , et  $Q(x, \cdot)$  correspond à la loi uniforme sur  $[0, 1/2]$ . Le processus se déplace donc à vitesse 1 vers la frontière, et plus il s'approche de la frontière plus sa probabilité de sauter est grande. Deux exemples de trajectoires sont

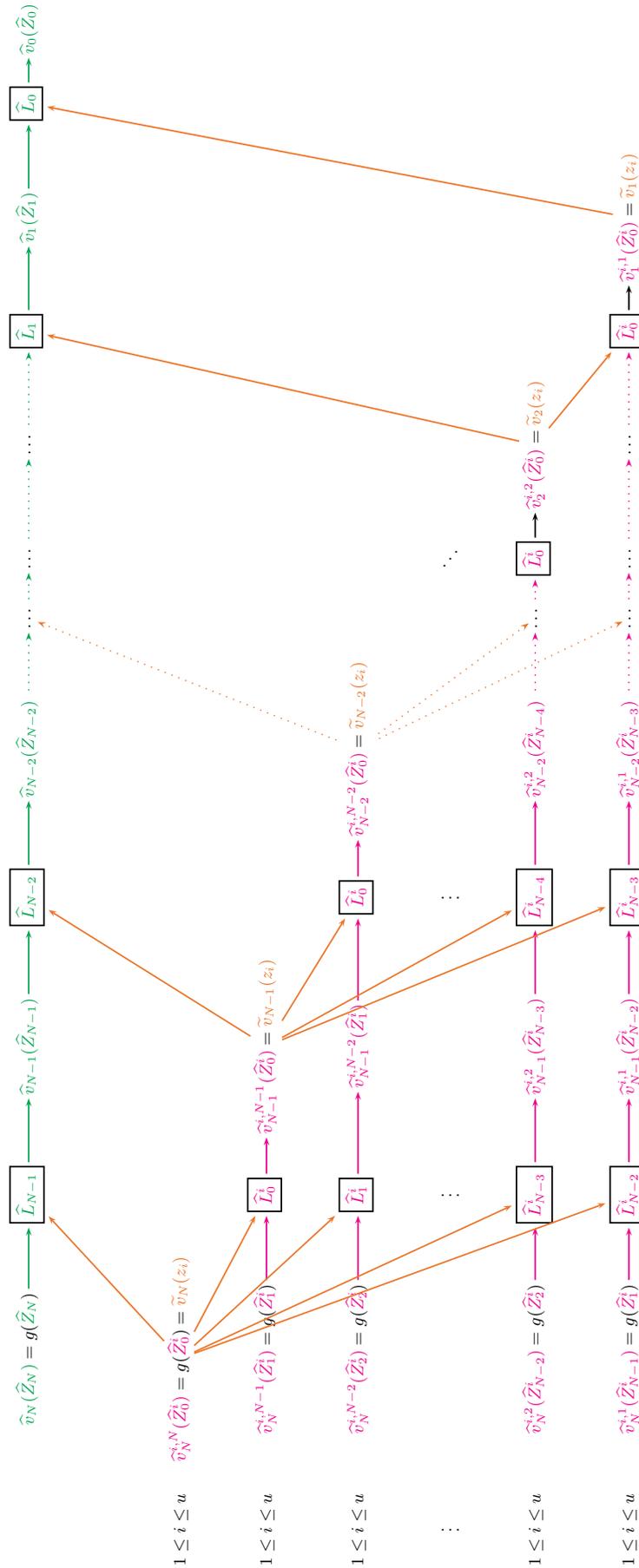


FIGURE 2.11 – Schéma d'approximation

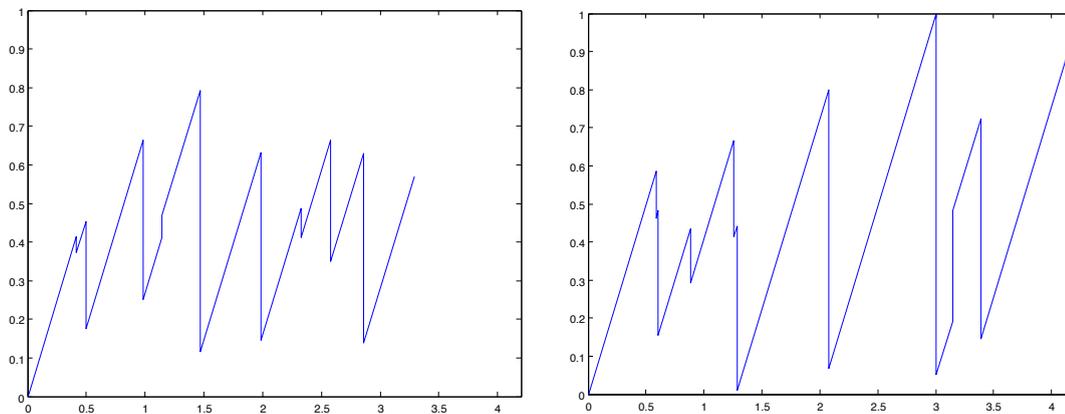


FIGURE 2.12 – Exemples de trajectoires.

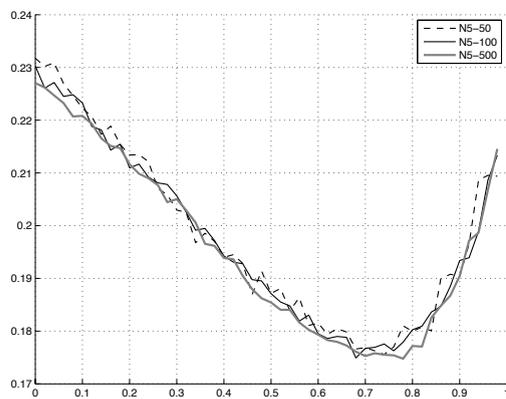
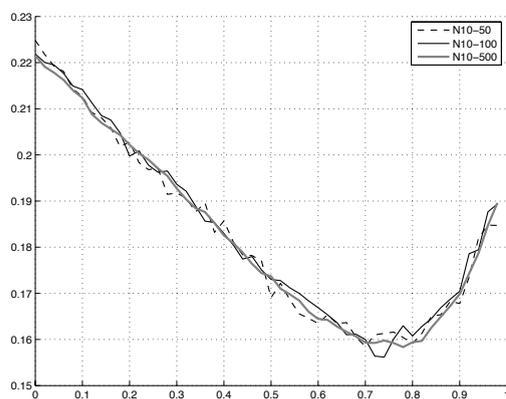
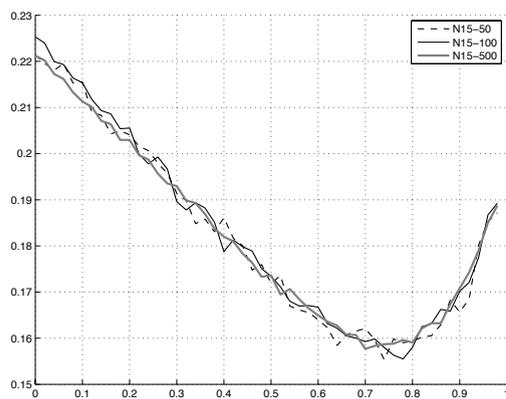
donnés Figure 2.12 pour un horizon de 10 sauts. Le coût instantané est  $f(x) = 1 - x$  et le coût des interventions est constant et vaut  $c_0 = 0.08$ . La meilleure performance est donc obtenue quand la valeur du processus est proche de 1, mais alors la probabilité de sauter vers une valeur plus défavorable est grande. Le facteur d'oubli est fixé à 2. Cette valeur élevée permet d'avoir un horizon de calcul relativement faible. L'espace des contrôles est une discrétisation de l'espace d'états

$$\mathbb{U} = \left\{ \frac{k}{50}, 0 \leq k \leq 49 \right\}.$$

Dans ce cas particulier où la grille de contrôle est une discrétisation de tout l'espace d'états, une seule série de grilles de quantification est suffisante pour l'implémentation de notre méthode, avec un point de départ  $Z_0$  qui suit une loi uniforme sur  $\mathbb{U}$ . En revanche, la structure triangulaire de l'algorithme reste inchangée, et une fois les grilles construites, il n'y a pas moins de calculs à effectuer.

Nous avons fait tourner notre algorithme avec plusieurs valeurs pour l'horizon de calcul : 5, 10 et 15 temps de saut. La lourdeur de l'algorithme ne permet pas d'aller beaucoup plus loin. Les figures 2.13, 2.14 et 2.15 donnent les résultats obtenus pour la fonction valeur, pour 50, 100 et 500 points dans les grilles de quantification, et pour chacun des points de  $\mathbb{U}$  comme valeur initiale du processus. On peut constater que la fonction valeur approchée à l'horizon  $N = 10$  prend des valeurs significativement plus petites que celle pour l'horizon  $N = 5$ . En revanche, l'ordre de grandeur est le même que pour l'horizon  $N = 15$ , voir Figure 2.16. Comme il s'agit d'un problème de minimisation, plus l'horizon (donc le nombre d'interventions possibles) est grand, plus la fonction valeur est petite. Ceci suggère donc que le choix d'un horizon  $N = 5$  n'est pas approprié pour approcher la fonction valeur correspondant à l'horizon infini. En revanche, le choix de  $N = 10$  est suffisant.

Les erreurs théoriques pour les différents horizons sont données dans la Table 2.7. Sans surprise, l'erreur augmente considérablement avec le nombre d'étapes de calcul, donc avec l'horizon. Comme il s'agit de bornes très générales, on ne peut pas attendre qu'elles soient très fines sur cet exemple précis. On observe cependant bien la décroissance attendue lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification augmente.

FIGURE 2.13 – Approximation de la fonction valeur, horizon  $N = 5$ .FIGURE 2.14 – Approximation de la fonction valeur, horizon  $N = 10$ .FIGURE 2.15 – Approximation de la fonction valeur, horizon  $N = 15$ .

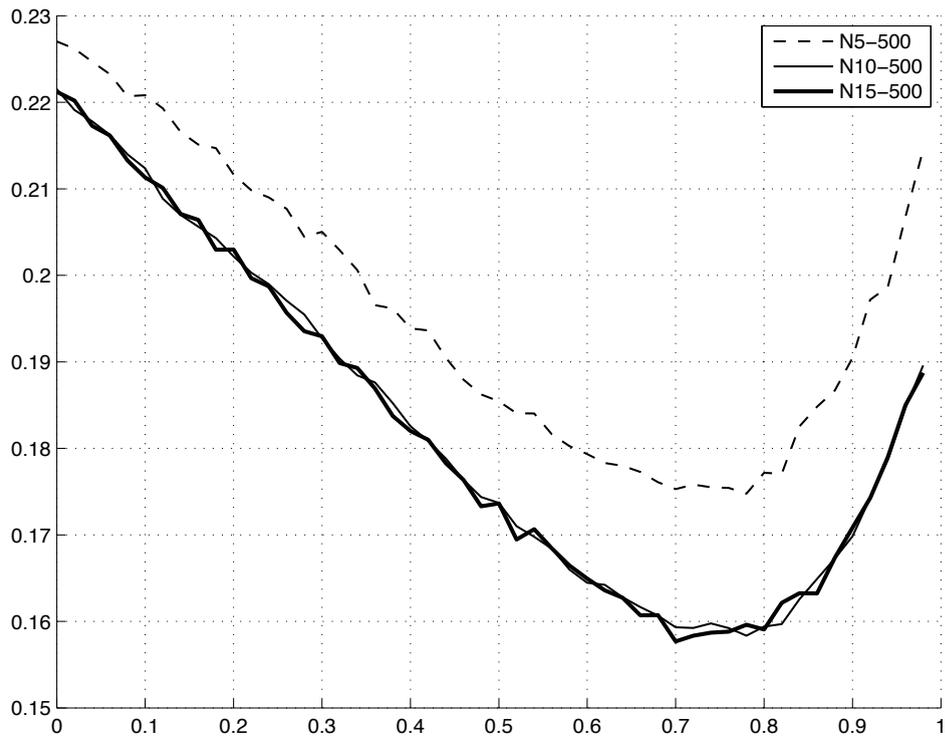


FIGURE 2.16 – Approximation de la fonction valeur, horizons  $N = 5$ ,  $N = 10$  et  $N = 15$  pour 500 points dans les grilles de quantification.

Nombre de points dans les grilles	$\ v_0(Z_0) - \hat{v}_0(Z_0)\ _2$ $N = 5$	$\ v_0(Z_0) - \hat{v}_0(Z_0)\ _2$ $N = 10$	$\ v_0(Z_0) - \hat{v}_0(Z_0)\ _2$ $N = 15$
50	4636	$5.341 \cdot 10^{11}$	$1.460 \cdot 10^{21}$
100	3700	$4.501 \cdot 10^{11}$	$1.288 \cdot 10^{21}$
500	2141	$2.567 \cdot 10^{11}$	$0.750 \cdot 10^{21}$

TABLE 2.7 – Erreurs théoriques en fonction de l'horizon et du nombre de points dans les grilles de quantification.

## 2.7 Conclusion et perspectives

Nous avons proposé une méthode de calcul pratique de la fonction valeur et d'une règle d'arrêt pour le problème d'arrêt optimal pour un PDP. Cette méthode repose sur les équations de la programmation dynamique et sur une discrétisation par quantification de la chaîne induite du processus. Nous avons prouvé la convergence de notre méthode et obtenu des vitesses de convergence en terme de l'erreur de quantification. Notre méthode a été testée avec succès sur divers exemples industriels. Nous l'avons ensuite étendue au cas d'une observation partielle puis au cas du problème de contrôle impulsif.

### 2.7.1 Arrêt optimal

Comme nous l'avons vu dans les exemples, certaines de nos hypothèses qui ne sont pas a priori vérifiées par le modèle d'origine peuvent être validées par des modifications simples comme l'ajout d'un état cimetièrre ou l'ajout de la variable temps. Il doit être possible d'obtenir les mêmes résultats pour des fonctions de gain différentes, par exemple un coût instantané intégré comme pour le contrôle impulsif qui tient compte de toute la trajectoire du processus jusqu'à l'arrêt.

Des discussions sont en cours avec Thales Optronique pour déposer un brevet sur une méthode d'optimisation de la maintenance reposant entre autres sur notre méthode numérique.

Une autre piste de travail découle de discussions avec des industriels. S'il est opportun de pouvoir intervenir à un instant optimisé pour la maintenance d'un système, l'intervention elle-même peut dépendre de contraintes opérationnelles et donc nécessiter un certain délai. La question nous a donc été posée de voir comment résoudre le problème d'arrêt optimal lorsqu'on veut optimiser en tenant compte du délai, c'est à dire si la performance est de la forme  $\mathbb{E}[g(X_{\tau+\delta})]$  pour un  $\delta$  fixé. Sur le plan théorique, ce problème est complètement résolu pour les processus markoviens. Il revient à un problème d'arrêt optimal standard pour une fonction de gain modifiée qui prend la forme d'une espérance :  $\tilde{g}(z) = \mathbb{E}_z[g(X_\delta)]$ . La performance à optimiser s'écrit alors comme

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}_{X_\tau}[g(X_\delta)]] ,$$

voir [Øks05]. Pour mettre en œuvre notre méthode, il faut pouvoir calculer la fonction de gain  $\tilde{g}$  sur tous les points des grilles de quantification, ce qui demande donc le calcul de nombreuses espérances. Des pistes de solutions sont présentées au chapitre suivant.

### 2.7.2 Observations partielles

En ce qui concerne le problème d'arrêt optimal sous observation partielle, nous avons étudié un cas particulier où les positions après saut ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, on peut au préalable discrétiser les positions après saut du processus. Il serait intéressant d'étudier l'impact de cette discrétisation sur la fonction valeur du problème d'arrêt optimal. Il faut cependant

noter qu'une telle discrétisation ne peut se faire qu'avec un nombre relativement petit de points car ceci correspond à la dimension du filtre, et on ne peut efficacement quantifier que des processus de petite dimension. Il faudrait réfléchir à des solutions alternatives pour les autres cas.

Dans ce cas aussi, il serait intéressant d'étudier d'autres types de fonctions de gain, en particulier des fonctions autorisées à dépendre également directement du processus d'observation, pour faire un compromis entre la précision de l'observation et la volonté de s'arrêter.

Le vrai point difficile consiste à lever l'hypothèse que les instants de saut sont parfaitement observés. En effet, si cette hypothèse est raisonnable dans le cas où le mode correspond à l'environnement extérieur, comme dans l'exemple de la corrosion, en général elle ne l'est plus si le mode correspond à un état caché du système. Il faudrait alors mettre en œuvre des méthodes de détection de rupture pour avoir une valeur approchée des instants de sauts. Cependant, toute notre approche serait alors à reprendre car elle repose fortement sur le fait que les temps de sauts sont des temps d'arrêt pour la filtration du processus ponctuel d'observation. Il s'agit d'un problème difficile, mais très intéressant pour les applications potentielles.

### 2.7.3 Contrôle impulsif

Pour le problème de contrôle impulsif, nous avons fait l'hypothèse que l'ensemble de contrôle  $\mathbb{U}$  est fini et ne dépend pas de la position  $z$  avant le saut. L'hypothèse de finitude n'est pas très contraignante, puisque pour toute méthode numérique il faudra discrétiser un éventuel ensemble continu. Ceci va rajouter un terme d'erreur dans notre approximation au moment du calcul de l'opérateur  $M$ . Cette erreur devrait être petite dès qu'on a de la régularité Lipschitz sur les fonctions valeur. Autoriser l'espace de contrôle à dépendre de la position du processus n'est probablement pas très contraignant non plus, à condition que le nombre total de possibilités reste fini.

Le temps de calcul de notre procédure est très long à cause de la récurrence triangulaire. Ceci est dû au fait que les points de l'ensemble de contrôle n'ont en général aucune raison de se trouver dans les grilles de quantification. On pourrait cependant rajouter ces points après le calcul des grilles optimisées par l'algorithme CLVQ mais avant le calcul des lois et matrices de transition. On y perdrait probablement en précision car la loi de  $(Z_n, S_n)$  dépend en général de l'instant  $n$ , alors que les points de contrôle rajoutés dans la grille à l'instant  $n$  correspondent en fait à un point de départ à l'instant 0. Cependant le gain en temps de calcul serait appréciable. Il faudrait tester cette possibilité sur des exemples concrets pour en mesurer l'impact.

Le problème ouvert le plus intéressant concerne l'approximation de stratégies optimales. Il est très certainement possible de construire une stratégie du même type que celle de Gugerli [Gug86] pour l'arrêt optimal, basée sur les gagnants des minimisations successives. Cependant, aucun résultat théorique n'est disponible dans ce sens. Pour obtenir un tel résultat, il faut se plonger dans le formalisme de l'espace

canonique et la construction rigoureuse des stratégies admissibles. Il faudra ensuite passer à l'étape de discrétisation.

Enfin, quand nous aurons une méthode d'approximation de stratégies proches de l'optimalité, il serait intéressant de voir si cette méthode peut raisonnablement être mise en œuvre sur des problèmes réels. Des discussions sont également en cours avec Thales Optronique pour une thèse sur ce sujet, dans la continuité des travaux de thèse de Camille Baysse.



# Chapitre 3

## Méthodes numériques pour l'estimation de performance des processus markoviens déterministes par morceaux

### 3.1 Motivation

La méthode adoptée dans le chapitre précédent pour le contrôle des PDP permet aussi de calculer d'autres quantités d'intérêt pour ces processus. En effet, l'idée sous-jacente est très générale. Comme la chaîne induite  $(Z_n, S_n)$  contient tout l'aléa du processus, n'importe quelle espérance de fonctionnelle du processus doit pouvoir s'écrire simplement avec cette chaîne en temps discret. Grâce à la propriété de Markov, on peut aussi s'attendre à obtenir une formulation récursive, comme pour les équations de programmation dynamique. Il suffit donc de discrétiser la chaîne induite, par exemple par quantification, pour obtenir une valeur approchée de la quantité d'intérêt, avec une borne de l'erreur commise.

On s'intéresse dans ce chapitre au calcul d'espérances de fonctionnelles de PDP, ainsi qu'à des problèmes de temps de sortie d'ouverts de l'espace d'états. Du point de vue applicatif en fiabilité, ceci correspond à de l'évaluation de performance par le calcul d'indicateurs de fiabilité, comme la probabilité de tomber en panne ou la durée de service du système, c'est à dire le temps moyen de bon fonctionnement.

#### 3.1.1 Espérance de fonctionnelles

Pour les espérances de fonctionnelles, il n'existe à nouveau que très peu de méthodes autres que celle de Monte Carlo dans la littérature sur ce genre de problèmes pour les PDP. Davis établit dans [Dav93, chapitre 3] une construction récursive pour des espérances de fonctionnelles de PDP très générales (sans faire apparaître la chaîne induite). Il propose ensuite une méthode numérique *théorique* pour les calculer, basée sur la résolution d'un système d'équations intégral-différentielles. Il ne met pas en œuvre cette méthode, qui pose de nombreux problèmes en pratique,

j'y reviendrai à la partie 3.2.1. Il est plus compliqué qu'il n'y paraît d'appliquer cette méthode sur des cas particuliers, et il semble impossible à l'heure actuelle de l'appliquer de façon générique.

D'autres travaux reposent également sur des équation intégro-différentielles, mais ils sont valables uniquement sur des sous-classes de PDP dont la loi admet une densité suffisamment régulière [CTEM06, CTEM<sup>+</sup>06, EMP08, LMZR10]

### 3.1.2 Temps de sortie

En ce qui concerne les méthodes numériques pour le calcul des moments de temps de sortie, il existe des résultats généraux pour les processus de Markov [HRS01, LPR04]. Le problème de calcul des moments se ramène alors à de la programmation linéaire sous contraintes linéaires. Cependant, pour appliquer cette procédure, il faut des hypothèses sur le générateur du processus Markovien, hypothèses qui ne sont en général pas vérifiées pour les PDP.

### 3.1.3 Contribution

L'objet de ce chapitre est donc de présenter des méthodes numériques alternatives pour faire des calculs autour des PDP. Dans ce chapitre, j'utiliserai les mêmes notations et idées que dans le chapitre précédent. La première partie, concernant les espérances de fonctionnelles de PDP concerne des travaux réalisés avec François Dufour (Institut Polytechnique de bordeaux et Inria CQFD), nos doctorants Adrien Brandejsky pour la méthode probabiliste [BdSD12a] et Karen Gonzalez pour la méthode déterministe. Les travaux de Karen ont été poursuivis dans le cadre de l'ANR Fautocoes avec Franck Boyer (Aix-Marseille Université), Mathieu Colin (Université Bordeaux 1 et Inria MC2), Thierry Colin (Institut Polytechnique de bordeaux et Inria MC2) et Kévin Santugini (Institut Polytechnique de bordeaux et Inria MC2). Elle est toujours en cours de développement. La deuxième partie sur les temps de sortie a été réalisées en collaboration avec François Dufour et Adrien Brandejsky [BdSD12b].

## 3.2 Espérance de fonctionnelles

Davis montre dans [Dav93, chapitre 3] que la forme très générique d'espérance de fonctionnelles de PDP ci-dessous couvre de très nombreux problèmes

$$f(z) = \mathbb{E}_z \left[ \int_0^\infty \ell(X_t) dt + \int_0^\infty c(X_{t-}) dp_t^* \right], \quad (3.1)$$

où  $\ell$  et  $c$  sont des fonctions données et  $p_t^*$  le processus de comptage des sauts à la frontière du PDP ( $X_t$ ).

### 3.2.1 Méthode déterministe

Les théorèmes 32.2 et 32.10 de [Dav93] établissent sous des conditions de régularité assez faibles, que la fonction  $f$  ci-dessus est l'unique solution (dans une bonne classe de fonctions) du système intégro-différentiel suivant

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}f \circ \Phi_m(x, t) + \lambda_m(x)(Q_m f(m, x) - f(m, x)) + \ell(m, x) = 0, & (m, x) \in E, \\ Q_m f(m, x) - f(m, x) + c(m, x) = 0, & (m, x) \in \partial E. \end{cases}$$

Il s'agit bien d'un système d'équations pour les fonctions  $f(m, \cdot)$ , qui sont couplées à travers le noyau de saut  $Q$ . Comme l'écrit Davis, il *suffit* donc de discrétiser ces équations par une méthode classique pour obtenir une approximation numérique de l'espérance cherchée.

Or, si la formulation du système ci-dessus semble simple et concise, sa résolution pratique pose de nombreux problèmes qui sont intrinsèquement spécifiques à chaque application particulière. Il s'agit d'équations de transport, mais avec des conditions au bord qui sont en fait des conditions terminales. Par ailleurs, pour expliciter complètement ce système, il faut préciser l'espace d'états  $E_m$  et sa frontière  $\partial E_m$  mode par mode, ce qui est un travail en soi. Ces espaces peuvent avoir une géométrie complexe, et ne pas être de simples pavés car ils sont construits à partir des trajectoires possibles du flot. Par ailleurs, les différents flots peuvent requérir des maillages différents et obliger à des interpolations entre les différents points de discrétisation. Enfin, même si chaque équation prise séparément peut être relativement simple, la nature du couplage par le noyau de saut  $Q$  peut rendre très complexe la résolution du système.

Nous avons rencontré toutes ces difficultés en essayant de mettre en œuvre cette méthode sur l'exemple du réservoir décrit à la partie 2.4.4. Le détail du système correspondant ainsi que des résultats numériques sont donnés dans la thèse de Karen Gonzalez [Gon10]. Une méthode un peu plus sophistiquée a été développée par Franck Boyer, Mathieu Colin et Kevin Santugini [BCS10, BCS12].

Un code similaire est en cours de développement pour l'exemple de la corrosion décrit à la section 2.4.3, pour calculer le temps moyen d'atteinte du seuil critique de 0.2mm. Cet exemple est par certains aspects plus simple que celui du réservoir. En particulier, il y a moins de modes, et les domaines ont une géométrie plus simple. Mais il est aussi plus compliqué par d'autres aspects. Dans le cas du réservoir, le système va vers la panne, et dans le système d'équations intégro-différentielles plusieurs équations sont en fait autonomes, ce qui permet de les résoudre toutes les unes après les autres. Seuls deux fonctions interagissent en boucle. En revanche, pour le modèle de corrosion les 6 modes sont en boucle fermée, donc on n'a plus d'équation autonome. Par ailleurs, la durée de vie de la structure avant d'atteindre le seuil critique est très longue, ce qui ralentit considérablement les calculs pour un maillage fin.

Ma contribution à cette partie déterministe consiste uniquement à expliquer le problème probabiliste sous-jacent aux numériciens, leur fournir le système d'équa-

tions correspondant à la quantité à calculer et croiser leurs résultats avec ceux des méthodes probabilistes.

Pour expliciter le système d'équations, notons 1, 2, et 3 les trois premières ambiances lorsque la protection anti-corrosion agit, et 4, 5 et 6 ces mêmes ambiances lorsqu'elle n'agit plus. Dans les modes 1, 2 et 3, les variables sont la protection anti-corrosion restante  $\gamma(t)$ , le taux de corrosion stable  $\rho$  et le temps  $t$  depuis l'entrée dans l'ambiance courante. Dans les autres modes, les variables sont la perte d'épaisseur  $d(t)$ , le taux de corrosion stable  $\rho$  et le temps  $t$  depuis l'entrée dans l'ambiance courante.

Le temps moyen avant d'atteindre le seuil critique peut s'écrire sous la forme de l'équation (3.1) comme

$$f_m(x) = \mathbb{E}_{(m,x)} \left[ \int_0^\infty \ell(X_t) dt \right],$$

où  $\ell(\gamma, \rho, t) = 1$  dans les modes 1, 2, et 3 et  $\ell(d, \rho, t) = \mathbb{1}_{\{d \leq 0.2\}}$  dans les autres modes. Le système intégral-différentiel correspondant est le suivant.

Pour le mode  $m = 1$ , on a  $E_1 = ]0, +\infty[ \times ]10^{-6}, 10^{-5}] \times [0, +\infty[$ ,  $\partial E_1 = \{0\} \times [10^{-6}, 10^{-5}] \times [0, +\infty[$  et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \gamma} f_1(\gamma, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_1(\gamma, \rho, t) + \lambda_1 \int_{10^{-7}}^{10^{-6}} (f_2(\gamma, \rho', 0) - f_1(\gamma, \rho, t)) \frac{d\rho'}{|10^{-6} - 10^{-7}|} + 1 = 0 & \text{sur } E_1 \\ f_4(0, \rho, 0) = f_1(0, \rho, t) & \text{sur } \partial E_1. \end{cases}$$

Pour le mode  $m = 2$ , on a  $E_2 = ]0, +\infty[ \times ]10^{-7}, 10^{-6}] \times [0, +\infty[$ ,  $\partial E_2 = \{0\} \times [10^{-7}, 10^{-6}] \times [0, +\infty[$  et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \gamma} f_2(\gamma, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_2(\gamma, \rho, t) + \lambda_2 \int_{10^{-6}}^{10^{-5}} (f_3(\gamma, \rho', 0) - f_2(\gamma, \rho, t)) \frac{d\rho'}{|10^{-5} - 10^{-6}|} + 1 = 0 & \text{sur } E_2 \\ f_5(0, \rho, 0) = f_2(0, \rho, t) & \text{sur } \partial E_2. \end{cases}$$

Pour le mode  $m = 3$ , on a  $E_3 = E_1$ ,  $\partial E_3 = \partial E_1$  et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial \gamma} f_3(\gamma, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_3(\gamma, \rho, t) + \lambda_3 \int_{10^{-6}}^{10^{-5}} (f_1(\gamma, \rho', 0) - f_3(\gamma, \rho, t)) \frac{d\rho'}{|10^{-5} - 10^{-6}|} + 1 = 0 & \text{sur } E_3 \\ f_6(0, \rho, 0) = f_3(0, \rho, t) & \text{sur } \partial E_3. \end{cases}$$

Pour le mode  $m = 4$ , on a  $E_4 = [0, 0.2] \times ]10^{-6}, 10^{-5}] \times [0, +\infty[$ ,  $\partial E_4 = \{0.2\} \times [10^{-6}, 10^{-5}] \times [0, +\infty[$  et

$$\begin{cases} \rho(1 - \exp(-\frac{t}{\eta_1})) \frac{\partial}{\partial d} f_4(d, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_4(d, \rho, t) + \lambda_1 \int_{10^{-7}}^{10^{-6}} (f_5(d, \rho', 0) - f_4(d, \rho, t)) \frac{d\rho'}{|10^{-6} - 10^{-7}|} + 1 = 0 & \text{sur } E_4 \\ f_4(0.2, \rho, t) = 0 & \text{sur } \partial E_4. \end{cases}$$

Pour le mode  $m = 5$ , on a  $E_5 = [0, 0.2] \times ]10^{-7}, 10^{-6}] \times [0, +\infty[$ ,  $\partial E_5 = \{0.2\} \times [10^{-7}, 10^{-6}] \times [0, +\infty[$  et

$$\begin{cases} \rho(1 - \exp(-\frac{t}{\eta_2})) \frac{\partial}{\partial d} f_5(d, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_5(d, \rho, t) + \lambda_2 \int_{10^{-6}}^{10^{-5}} (f_6(d, \rho', 0) - f_5(d, \rho, t)) \frac{d\rho'}{|10^{-5} - 10^{-6}|} + 1 = 0 & \text{sur } E_5 \\ f_5(0.2, \rho, t) = 0 & \text{sur } \partial E_5. \end{cases}$$

Enfin, pour le mode  $m = 6$ , on a  $E_6 = E_4$ ,  $\partial E_5 = \partial E_4$  et

$$\begin{cases} \rho(1 - \exp(-\frac{t}{\eta_3})) \frac{\partial}{\partial d} f_6(d, \rho, t) + \frac{\partial}{\partial t} f_6(d, \rho, t) + \lambda_3 \int_{10^{-6}}^{10^{-5}} (f_4(d, \rho', 0) - f_6(d, \rho, t)) \frac{d\rho'}{|10^{-5} - 10^{-6}|} + 1 = 0 & \text{sur } E_6 \\ f_6(0.2, \rho, t) = 0 & \text{sur } \partial E_6. \end{cases}$$

Une valeur de référence obtenue par simulations de Monte Carlo ( $10^8$  répliques) est de  $526 \cdot 10^3$  heures pour l'espérance intégrée contre la loi initiale de  $\gamma$  et  $\rho$

$$\int f_1(\gamma, \rho, 0) \frac{\mathbb{1}_{\{[10^{-6}, 10^{-5}]\}}(\rho)}{|10^{-5} - 10^{-6}|} \mathbb{1}_{\{\gamma \geq 0\}} \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right) d\gamma d\rho.$$

La méthode déterministe donne  $528 \cdot 10^3$  heures pour cette même quantité, ce qui est donc très proche de la vraie valeur. Des développements sont encore en cours pour améliorer la méthode déterministe.

### 3.2.2 Méthode probabiliste

Une méthode probabiliste reposant sur une quantification de la chaîne induite a été proposée dans [BdSD12a]. Elle repose sur la Proposition 32.34 de [Dav93] qui montre à l'aide de la propriété de Markov qu'une espérance de la forme (3.1) s'obtient en itérant jusqu'à l'infini l'opérateur  $G$  défini par

$$\begin{aligned} Gf(z) &= \int_0^{t^*(z)} e^{-\Lambda(z,s)} (\ell(\Phi(z,s)) + \lambda(\Phi(z,s))Qf(\Phi(z,s))) ds \\ &\quad + e^{-\Lambda(z,t^*(z))} (c(\Phi(z,t^*(z))) + Qf(\Phi(z,t^*(z)))) \end{aligned}$$

pour tout point  $z$  dans  $E$  et toute fonction  $f$  dans  $B(\bar{E})$ . On commence par récrire cet opérateur à l'aide de la chaîne induite

$$f(z) = \mathbb{E} \left[ \int_0^{S_n} \ell(\Phi(Z_n, t)) dt + c(\Phi(Z_n, t^*(Z_n))) \mathbb{1}_{\{S_{n+1} = t^*(Z_n)\}} + f(Z_{n+1}) \mid Z_n = z \right],$$

puis on procède comme dans le chapitre précédent en choisissant de façon adéquate un horizon en temps de saut et en discrétisant la chaîne induite par quantification. Ici encore, une fonction indicatrice apparaît et pose problème pour obtenir une vitesse de convergence.

Comme c'est une fonction indicatrice qui fait apparaître le temps d'atteinte de la frontière  $t^*$ , et non plus un point d'une grille de discrétisation *loin* de  $t^*$ , on ne peut pas utiliser la même approche que dans le chapitre précédent. A la place, on remplace cette indicatrice par une approximation triangulaire affine par morceaux de constante de Lipschitz fixée, ce qui induit un terme d'erreur supplémentaire inversement proportionnel à cette constante de Lipschitz qui doit donc être grande pour que l'approximation par la fonction triangulaire soit bonne, mais petite pour que l'erreur induite par la procédure de quantification soit petite. Il y a ainsi là un compromis à faire.

Sous les hypothèses **(H.1-4)**, et si  $\ell$  est dans  $BL_\Phi(E)$  et  $c$  dans  $BL(\partial E)$ , on a alors la convergence de la méthode avec une vitesse exprimée en fonction de l'erreur de quantification, voir [BdSD12a, Théorème 4.5]. Il s'agit d'une application relativement directe de la méthodologie développée au chapitre précédent.

Un résultat un peu plus intéressant et novateur est le calcul d'espérances de fonctionnelles de PDP qui dépendent également du temps. En théorie, c'est en fait un cas particulier de la formulation précédente (3.1), car le processus augmenté du temps  $(X_t, t)$  est encore un PDP. S'il est aisé de voir qu'il vérifie toujours les hypothèses **(H.1-3)**, l'hypothèse **(H.4)** qui porte sur le caractère Lipschitz global de l'opérateur  $Q$  n'est en revanche plus valide en général pour le processus augmenté du temps. Nous avons donc remplacé cette hypothèse par une nouvelle formulation de type propriété de Lipschitz locale, qui est en fait suffisante pour obtenir la convergence de notre méthode, et qui elle reste valide pour le processus augmenté du temps.

On appelle  $BL_\Phi^s(E)$  les fonctions de  $BC_\Phi(E)$  qui sont Lipschitz le long du flot (au sens de la définition de  $BL_\Phi(E)$ ) *jusqu'au temps*  $s$ . En particulier, les constantes de Lipschitz qui interviennent peuvent désormais dépendre de  $s$ .

**(H.4')** Le noyau markovien  $Q$  est localement Lipschitz au sens suivant : il existe  $[Q] \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $s \geq 0$  et toute fonction  $w$  de  $BL_\Phi^s(E)$ , les deux conditions suivantes sont satisfaites

– pour tous  $(z, z') \in E^2$  et  $u \in [0, t^*(z) \wedge t^*(z') \wedge s]$ , on a

$$|Qw(\Phi(z, u)) - Qw(\Phi(z', u))| \leq [Q] [w]_1^s |z - z'|,$$

– pour tous  $(z, z') \in E^2$  tels que  $t^*(z) \vee t^*(z') \leq s$ , on a

$$|Qw(\Phi(z, t^*(z))) - Qw(\Phi(z', t^*(z')))| \leq [Q] ([w]_*^s + [w]_1^s) |z - z'|.$$

Lorsque les fonctions  $\ell$  et  $c$  sont Lipschitz en temps et en espace, nous obtenons la convergence de notre méthode avec vitesse en terme de l'erreur de quantification. Nous avons également étudié le cas où  $\ell$  et  $c$  sont de la forme  $h(z) \mathbb{1}_{\{t \leq t_f\}}$  pour un temps  $t_f$  fixé. Ceci permet de prendre en compte un horizon de temps déterministe et non plus en temps de saut. Nous avons montré que l'hypothèse de continuité Lipschitz en temps sur  $\ell$  n'est en fait pas nécessaire, car cette fonction n'intervient qu'à travers des intégrales en temps. En revanche, cette simplification n'est pas possible pour  $c$ , et nous avons proposé une méthode par encadrement avec des fonctions Lipschitz. Ces résultats sont énoncés dans les Théorèmes 5.4 et 5.9 de [BdSD12a]. Cette méthode a été implémentée sur l'exemple de corrosion de la section 2.4.3.

### 3.2.3 Comparaison des deux méthodes

S'il s'agit juste de calculer une seule espérance, aucune des deux méthodes présentées ci-dessus n'est réellement compétitive par rapport à la méthode de Monte Carlo.

La méthode probabiliste demande le pré-calcul des grilles de quantification, qui ne dépendent que de la dynamique du processus sous-jacent, et pas des fonctions  $\ell$  et  $c$

choisies. Cette méthode est donc particulièrement intéressante s'il faut faire plusieurs calculs pour des fonctions différentes. Comme vu dans le chapitre précédent, les mêmes grilles de quantification peuvent également servir à calculer d'autres quantités et à faire de l'optimisation sur le processus. Comme pour la méthode de Monte Carlo, il suffit d'avoir un simulateur du processus pour pouvoir construire les grilles de quantification.

La méthode déterministe demande un pré-travail plus complexe et méticuleux, car il faut complètement expliciter les domaines du processus mode par mode, ainsi que leurs frontières, ce qui n'est en général pas nécessaire pour construire un simulateur du processus. Il faut également écrire toutes les équations, ce qui peut être fastidieux lorsqu'il y a de nombreux modes possibles, comme pour l'exemple du réservoir. En revanche, un avantage intéressant de cette méthode par rapport aux deux autres est qu'au lieu d'avoir une seule espérance pour un point de départ du processus, on a une valeur des fonctions  $f(m, \cdot)$  pour tous les modes et tous les points des grilles de discrétisation. Le résultat obtenu est donc beaucoup plus riche. Cette méthode couplée avec notre algorithme pour l'arrêt optimal pourrait permettre de résoudre de façon pratique le problème d'arrêt optimal avec délai évoqué dans les perspectives du chapitre précédent.

### 3.3 Temps de sortie

Notre approche numérique d'approximation de la chaîne induite d'un PDP par quantification a été utilisée pour un autre problème, à savoir le calcul de la loi de temps de sortie. Ce problème du calcul d'un temps de sortie, ou durée de service du point de vue applicatif nous a été soumis par Astrium et a fait l'objet des premiers travaux de thèse d'Adrien Brandejsky. On se donne un ouvert  $U$  de l'espace d'états du PDP

$$U = \{(m, x), m \in M, x \in U_m\},$$

où  $U_m$  est un ouvert de  $E_m$ . On suppose que le processus part de  $U$  et en sort en temps fini presque sûrement. On appelle  $\tau$  le temps mis par le processus pour sortir de  $U$

$$\tau = \inf\{t \geq 0, X_t \notin U\}.$$

On veut calculer les moments de  $\tau$  et sa fonction de survie. Pour l'espérance, on peut utiliser la méthode probabiliste décrite ci-dessus à condition que le processus ne revienne pas dans  $U$  après en être sorti (cette propriété est vraie pour l'exemple de la corrosion). Sinon, il faut tuer le processus quand il sort de  $U$ , mais ceci peut faire perdre les bonnes propriétés de continuité Lipschitz du noyau de saut  $Q$ . Nous avons donc plutôt choisi une approche plus spécifique à ce problème, en exhibant une relation de récurrence directement sur la quantité à calculer.

#### 3.3.1 Fonction de survie

On veut une approximation numérique de la fonction de survie du temps de sortie

$$F(t) = \mathbb{P}(\tau > t).$$

Comme notre méthode repose sur la quantification à horizon fini de la chaîne induite, nous avons en fait calculé la fonction de survie conditionnée à un nombre de saut du processus, c'est-à-dire les quantités

$$p_n(t) = \mathbb{P}(\tau > t \mid \tau \leq T_n),$$

qui peuvent se construire récursivement par  $p_0(t) = 0$  et

$$p_{n+1}(t) = \frac{p_n(t)q_n + r_n(t)}{q_{n+1}},$$

si  $q_{n+1} > 0$  et  $p_{n+1}(t) = 0$  sinon, avec

$$q_n = \mathbb{P}(\tau \leq T_n), \quad r_n(t) = \mathbb{P}(\{\tau > t\} \cap \{T_n < t \leq T_{n+1}\}),$$

puisque le temps de sortie est plus petit que le  $n+1$ -ème temps de saut si et seulement si soit il est plus petit que le  $n$ -ème temps de saut, soit il est compris entre le saut  $n$  et le saut  $n+1$ . Une fois la récurrence obtenue, on l'exprime en fonction de la chaîne induite du PDP

$$q_n = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{U^c\}}(Z_n)], \quad r_n(t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{(T_n + u^*(Z_n)) \wedge T_{n+1} > t\}} \mathbb{1}_{\{Z_n \in U\}} \mathbb{1}_{\{Z_{n+1} \in U^c\}}],$$

où  $u^*(z)$  est le temps de sortie déterministe de  $U$

$$u^*(z) = \inf\{t \geq 0, \Phi(z, t) \in \partial U\},$$

et en faisant l'hypothèse qu'une fois sorti de  $U$ , le processus n'y revient pas (quitte à le tuer à la sortie de  $U$ , ce qui ne posera pas de problème de continuité avec cette approche). On fixe empiriquement un horizon de calcul  $N$  de sorte que la probabilité  $\mathbb{P}(\tau > T_N)$  que le temps de sortie dépasse le  $N$ -ème temps de saut soit petite. On obtient ainsi une approximation  $\hat{p}_n(t)$  de  $p_n(t)$  en remplaçant  $(Z_n, T_n)$  par son approximation quantifiée.

Pour obtenir la convergence de la méthode, il faut des hypothèses techniques supplémentaires. L'hypothèse **(H.1)** est toujours en vigueur. L'hypothèse **(H.3)** est remplacée par son analogue pour le temps de sortie  $u^*$  de  $U$ .

**(H.3U)** Le temps d'atteinte  $u^*$  de la frontière de  $U$  est dans  $BL(E)$ .

L'hypothèse **(H.2)** n'est plus requise et **(H.4)** est remplacée par une nouvelle hypothèse qui impose que la probabilité de sauter très près de la frontière de  $U$  est contrôlée. Plus précisément, pour tout  $\alpha > 0$ , on note  $U^\alpha = \{z \in E, d(z, \partial U) \leq \alpha\}$  le voisinage d'ordre  $\alpha$  de la frontière de  $U$ .

**(H.4U)** Il existe  $C > 0$  et  $\beta > 0$  tels que  $\mathbb{P}(Z_n \in U^\alpha) \leq C\alpha^\beta$  pour tout  $1 \leq n \leq N$ .

Enfin, on rajoute une hypothèse de convexité de  $U$ . Les propriétés de la quantifications permettent d'assurer que si  $U$  est convexe et  $Z_n \in U$ , alors son approximation  $\hat{Z}_n$  est également dans  $U$ . Cette propriété permet donc de gérer facilement les indicatrices  $\mathbb{1}_{\{Z_n \in U\}}$ .

**(H.5U)** Pour tout  $m$  dans l'ensemble  $M$  des modes, on suppose que  $U_m$  est convexe.

Sous les hypothèses **(H.1)** et **(H.3U-5U)**, on obtient la convergence de la fonction de survie approchée vers la vraie fonction de survie. En général, on n'obtient pas de vitesse de convergence mais elle est accessible dans certains cas particuliers, voir [\[BdSD12b, Théorème 4.2\]](#).

Nombre de points dans les grilles de quantification	$\widehat{p}_{N,1}$ ( $\times 10^3$ h)	Erreur relative à $526 \times 10^3$ h
20 points	572	8.7%
50 points	569	8.2%
100 points	557	5.9%
200 points	551	4.8%
500 points	539	2.5%

TABLE 3.1 – Estimation de la moyenne du temps de sortie

### 3.3.2 Moments

On procède de même pour calculer les moments du temps de sortie. On pose

$$p_{n,j} = \mathbb{E}[\tau^j \mid \tau \leq T_n], \quad r_{n,j} = \mathbb{E}[\tau^j \mathbb{1}_{\{T_n < \tau \leq T_{n+1}\}}].$$

Les moments conditionnels peuvent alors se calculer récursivement de la façon suivante :  $p_{n,j} = 0$  et

$$p_{n+1,j} = \frac{p_{n,j}q_n + r_{n,j}}{q_{n+1}},$$

si  $q_{n+1} > 0$  et  $p_{n+1,j} = 0$  sinon. A nouveau, on exprime  $r_{n,j}$  à l'aide de la chaîne induite

$$r_{n,j} = \mathbb{E}[\left((T_n + u^*(Z_n)) \wedge T_{n+1}\right)^j \mathbb{1}_{\{Z_n \in U\}} \mathbb{1}_{\{Z_{n+1} \in U^c\}}],$$

et on obtient une approximation en remplaçant  $(Z_n, T_n)$  par son approximation quantifiée. Sous les hypothèses **(H.1)**, **(H.4U-5U)** et en supposant seulement  $u^*$  Lipschitz et  $t^*$  borné, on obtient la convergence de la méthode, voir [BdSD12b, Théorème 4.3].

### 3.3.3 Application à l'exemple de corrosion

Pour l'espérance du temps d'atteint du seuil de 0.2mm (qui est la même quantité que celle calculée à la partie 3.2.1), les résultats sont donnée dans la Table 3.1, avec l'erreur relative à l'estimation de Monte Carlo. Pour la fonction de survie, les résultats sont donnés dans la Table 3.2 et représentés sur la Figure 3.1 pour des grilles à 500 points. On voit à nouveau la décroissance de l'erreur lorsque le nombre de points dans les grilles de quantification augmente. La méthode donne un résultat comparable à celui de la méthode de Monte Carlo pour des temps de calcul bien moindre, une fois les grilles de quantification pré-calculés.

## 3.4 Conclusion et perspectives

L'objet de ce chapitre comme du précédent est de fournir une boîte à outils numériques pour les PDP. On exprime les quantités à calculer de façon récursive à l'aide de la chaîne induite. On quantifie ensuite cette chaîne pour obtenir une approximation de la quantité d'intérêt. Nous avons ainsi présenté des méthodes de

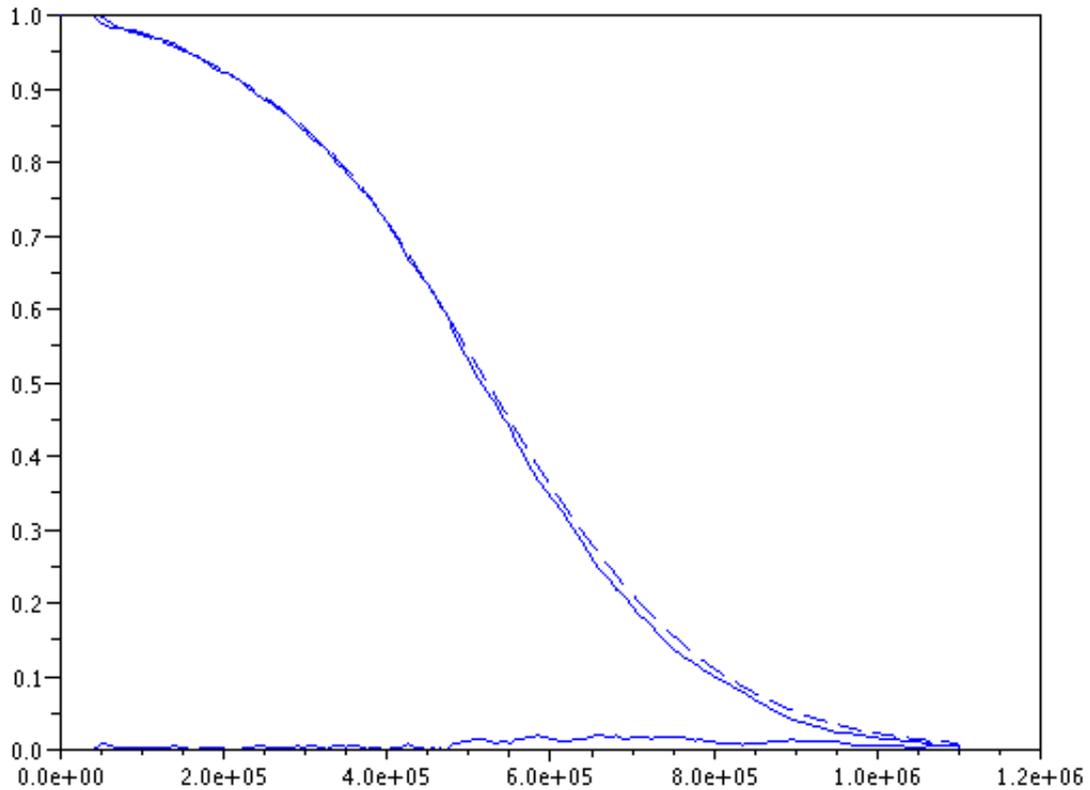


FIGURE 3.1 – Fonction de survie du temps de sortie estimée par Monte Carlo (tirets) et quantification (trait plein). Ecart entre les courbes (courbe en bas).

Nombre de points dans les grilles de quantification	$\max_{0 \leq t \leq 1}  p_N(t) - \widehat{p}_N(t) $
20 points	0.145
50 points	0.119
100 points	0.040
200 points	0.039
500 points	0.020

TABLE 3.2 – Erreur d'estimation pour la fonction de survie du temps de sortie

contrôle, de calcul d'espérances, de moments et de fonctions de survie. Nos méthodes ont été testées sur plusieurs exemples.

Il est très simple de mettre en œuvre l'algorithme CLVQ pour calculer les grilles de quantification optimisées à partir d'un simple simulateur du processus, même si certains ajustements sont nécessaire au cas par cas. Le calcul des grilles de quantification peut être très coûteux en temps de calcul. Cependant, il peut être réalisé off-line. De plus, ces grilles ne dépendent que de la dynamique du PDP, et non pas de la quantité à calculer. Les mêmes grilles peuvent donc servir à plusieurs séries de calculs. C'est là le principal avantage de notre méthode par rapport à celle de Monte Carlo.

Adrien Brandejsky a présenté dans sa thèse [Bra12] des études relativement fines de la vitesse de convergence empirique de l'algorithme CLVQ et de nos méthodes sur l'exemple de la corrosion. Il serait intéressant de pousser plus loin cette étude, par exemple en comparant sur nos exemples les performances de l'algorithme CLVQ avec l'algorithme de Lloys, voir par exemple [BP03]. Cette algorithme repose sur un principe de point fixe et non plus un gradient stochastique.



# Chapitre 4

## Contrats industriels

L'équipe Inria CQFD est régulièrement en contact avec des industriels. J'ai participé à trois séries de contrats de l'équipe : avec Astrium Space Transportation, DCNS et EDF. Dans tous les cas, il s'agit d'échanges avec les équipes de recherche et de développement qui prospectent sur des méthodes innovantes pour leurs services, sans forcément avoir en vue une application réelle immédiate. Il s'agit de recherche amont.

J'ai également participé d'un peu plus loin à la collaboration entre CQFD et Thales optronique autour de la thèse de Camille Baysse, puisque Camille a utilisé notre méthode d'arrêt optimal. Il s'agit ici de recherche à visée réellement appliquée dont les premiers résultats sont d'ores et déjà mis en pratique par Thales. Des discussions sont en cours pour le dépôt d'un brevet autour de nos méthodes numériques d'optimisation de la maintenance.

### 4.1 Astrium Space Transportation

Depuis sa création, l'équipe CQFD a des relations privilégiées avec Charles Elegbede d'Astrium ST. Nous avons commencé notre collaboration par deux études bibliographiques des modèles probabilistes pour la propagation de fissures, en mettant en avant l'intérêt d'une modélisation par processus markoviens déterministes par morceaux, voir chapitre 2.

Astrium est ensuite devenu un des partenaires de l'ANR Fautocoes, pour des problématiques de propagation de fissure, mais aussi pour du calcul de durées de service et de l'optimisation de la maintenance de systèmes complexes. Dans ce cadre, Astrium a financé la thèse d'Adrien Brandejsky, et nous a fourni la problématique du temps de sortie traitée au chapitre 3, ainsi que l'exemple de corrosion présenté à la partie 2.4.3 sur lequel nous avons pu faire tourner toutes nos méthodes numériques. Comme ces résultats ont déjà été présentés dans les chapitres précédents, je n'y reviendrai pas ici.

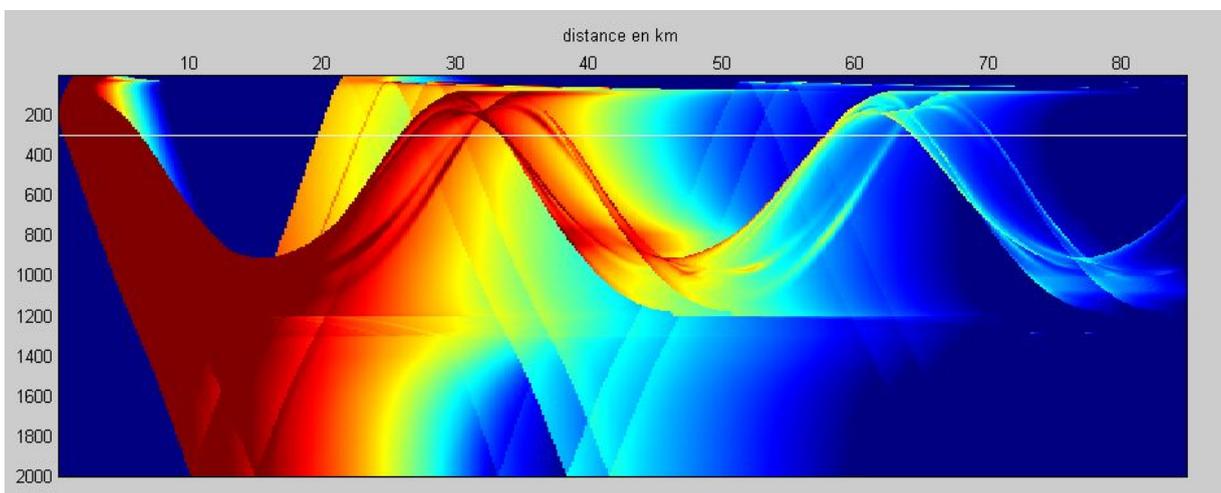


FIGURE 4.1 – Exemple de diagramme de pertes.

## 4.2 DCNS

CQFD a des contrats annuels récurrents avec DCNS (ex Direction des Constructions Navales) depuis 2010 sur l'aide au pilotage de sous-marins. Un sous-marin en opération se dirige à l'aide des données acoustiques de ses sonars. Ceci lui permet de repérer des *cibles*, c'est à dire des bâtiments (bateaux ou sous-marins) ennemis qu'il veut par exemple pouvoir écouter au mieux.

Comme la propagation des ondes sonores sous l'eau est assez complexes, ce n'est pas nécessairement en étant proche de la cible qu'on l'entend au mieux. DCNS a développé un code de propagation acoustique sous l'eau qui renvoie des diagrammes de perte, comme sur la Figure 4.1. On est dans le plan contenant le sous-marin (porteur) et la cible (bruiteur). Le bruiteur a une immersion de  $190m$ . Dans le diagramme, il est situé à la source de l'onde acoustique, du côté le plus rouge. Ce diagramme représente la perte acoustique dans le plan bruiteur porteur. Les zones rouges correspondent à une perte faible, les bleues à une perte forte. Ainsi, plus le porteur se place dans une zone rouge, mieux il entend, au contraire plus il est dans la zone bleue, moins il entend. Par exemple, pour un sous-marin à une immersion de  $300m$  (ligne blanche), la meilleure zone d'écoute se situe entre 0 et  $5km$  de la cible environ, ou bien aux alentours de  $30km$ . En revanche, dans la zone entre 10 et  $20km$ , le sous-marin n'entendra pas du tout la cible.

On comprend donc la nécessité d'outils automatisés d'aide au pilotage, surtout quand on veut suivre plusieurs cibles simultanément. Notre premier travail est une traduction du problème posé par DCNS en termes de contrôle stochastique, ensuite, nous avons proposé une méthode de résolution pour différents types de scénarios de plus en plus complexes. Ces travaux ont fait l'objet de rapports annuels, ainsi que d'une présentation en conférence spécialisée [NML+12]. Ils ont été réalisés en collaboration avec Dann Laneuville, Adrien Nègre et Olivier Marceau de DCNS, et François Dufour et Huilong Zhang côté CQFD.

### 4.2.1 Modélisation

On considère que les bruiteurs et le porteur avant contrôle suivent un mouvement rectiligne uniforme dans la même direction et à immersion constante. Pour décrire leur dynamique, on commence par choisir un pas de discrétisation en temps  $\Delta t$ , qui va correspondre au temps entre les prises de décision successives du porteur.

#### Bruiteurs

L'immersion des bruiteurs étant supposée constante, leur état respectif se résume par un vecteur  $w$  de dimension 2, à savoir leur distance par rapport au porteur et leur vitesse. Leur dynamique est modélisée par un système linéaire perturbé par un bruit gaussien : pour la cible  $i$ , on a  $w_0^i \sim \mathcal{N}(\mu_0^i, \Sigma_0^i)$  et

$$w_{n+1}^i = Fw_n^i + \varepsilon_n^i,$$

où

$$F = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et  $\varepsilon$  est un bruit gaussien centré de matrice de covariance  $\Sigma_\varepsilon$ . Les différents paramètres sont dans un premier temps supposés connus. L'espace d'états des bruiteurs est continu. On commence donc par en proposer une discrétisation par quantification. Dans le cas multi-cible, il s'avère trop lourd pour la suite des calculs de quantifier ensemble les positions et vitesses des différents bruiteurs. A la place on propose une grille par bruiteur.

#### Porteur

Dans une première modélisation, on considère que le porteur n'est piloté qu'en profondeur. L'état du porteur est donc un scalaire  $z$  représentant son immersion. Son mouvement est modélisé par

$$z_{n+1} = z_n + a_n,$$

où  $a_n$  est l'action choisie au temps  $n$ . A chaque instant, les actions possibles sont en nombre fini

$$a_n \in \{m\Delta z, -L \leq m \leq L\},$$

où  $\Delta z$  est un pas de discrétisation en espace et  $L\Delta z$  correspond à la plongée maximale que peut faire le sous-marin en un temps  $\Delta t$  (le sous-marin ne peut naturellement pas plonger ou remonter à la verticale).

#### Problème de contrôle

Nous avons choisi de modéliser ce problème à l'aide d'un *processus markovien décisionnel* (MDP pour *Markov Decision Process* en anglais, voir [HLL96, HLL99]). Un MDP a plusieurs composantes  $(X, A, \{A(x)|x \in X\}, Q, c)$  où

- $X$  est l'espace d'états. Ici il s'agit des positions possibles du porteur et des positions et vitesse possibles des cibles, en version discrétisée.

- $A$  est l'ensemble des actions possibles, et  $A(x) \subset A$  les actions possibles quand on est dans l'état  $x$ . Ici, si l'état  $x$  correspond à une immersion  $z$  du porteur, on a

$$A(z) = \{m\Delta z, -L \leq m \leq L\},$$

- $Q$  est le noyau stochastique markovien qui donne le nouvel état sachant l'état précédent et l'action choisie. Dans notre cas, le nouvel état correspond à la nouvelle position du sous-marin et la projection dans les grilles de quantification de la nouvelle distance entre les bruiteurs et le porteur. Il est donc relié aux matrices de transition entre les différentes grilles de quantification.
- $c$  est une fonction de coût. Pour nous, elle correspond au diagramme de perte acoustique.

On veut minimiser les pertes acoustiques jusqu'à un horizon de calcul  $N$ . Soit  $\Pi$  l'ensemble des politiques  $\pi = (a_n, 0 \leq n < N)$  possibles. La fonction valeur du problème est alors

$$V(x) = \inf_{\pi \in \Pi} \mathbb{E}_x^\pi \left[ \sum_{n=0}^{N-1} c(x_n, a_n) + C_N(x_N) \right],$$

où  $\mathbb{E}^\pi$  correspond à l'espérance sous la stratégie  $\pi$  et  $C_N$  est le coût terminal. On ne s'intéresse pas ici au calcul de la fonction valeur, mais à celui d'une politique optimale. On sait qu'on peut la construire par programmation dynamique, voir [HLL96]. On définit de façon rétrograde la suite de fonctions  $(V_n)$  par

$$V_N(x) = C_N(x),$$

et pour  $0 \leq n \leq N - 1$ ,

$$V_n(x) = \min_{a \in A(x)} \left\{ c(x, a) + \int_X V_{n+1}(y) Q(dy|x, a) \right\}.$$

Alors  $V(x) = V_0(x)$  pour tout  $x$  dans  $X$ . De plus, si ces fonctions sont mesurables, pour tous  $0 \leq n \leq N - 1$  et  $x \in X$ , il existe un sélecteur  $f_n$  tel que  $f_n(x) \in A(x)$  atteint le minimum, c'est à dire

$$V_n(x) = c(x, f_n(x)) + \int_X V_{n+1}(y) Q(dy|x, f_n(x)).$$

Alors la politique déterministe  $\pi^* = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$  est optimale.

## 4.2.2 Résultats

Nous avons mis en œuvre la méthode ci-dessus. On commence par pré-calculer la politique optimale en tous les points de l'espace d'états, et on garde ce résultat en mémoire. Concrètement, pour tous  $n$  et  $x$ , il s'agit de garder en mémoire le  $a$  qui a gagné la minimisation. Ensuite, pour une nouvelle trajectoire on va chercher les actions optimales en fonction du temps et de la position/vitesse des bruiteurs et du porteur.

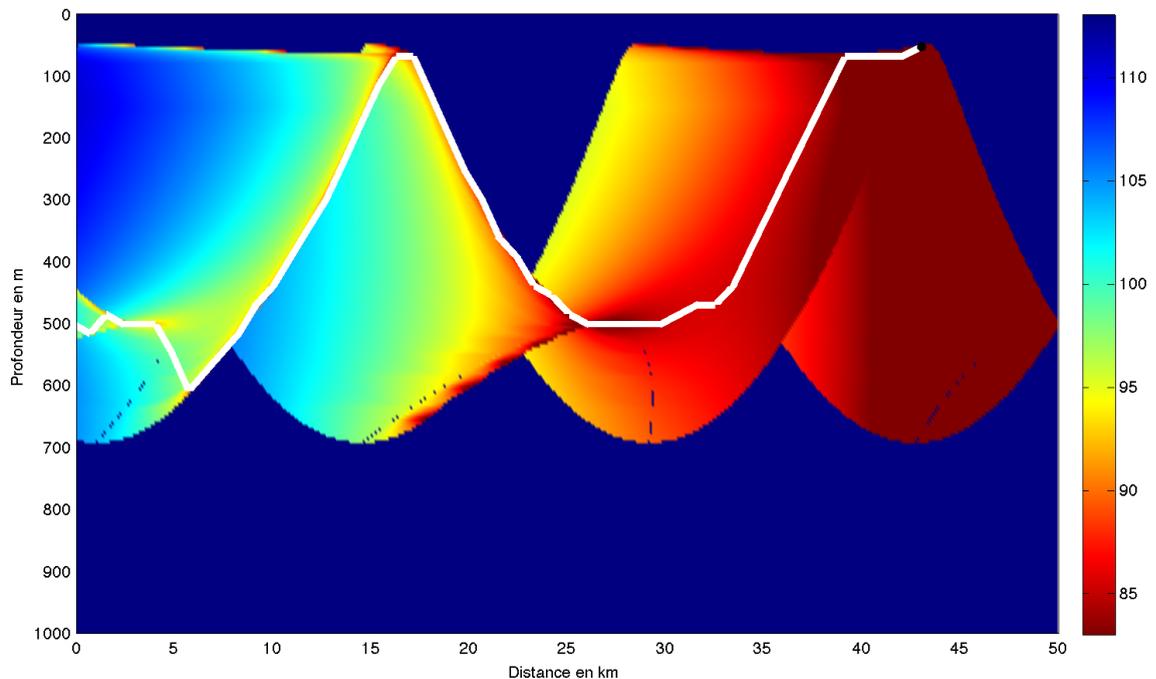


FIGURE 4.2 – Trajectoire optimale pour une cible

Dans un premier travail pour tester la faisabilité de notre approche, nous avons considéré une seule cible. Les résultats sont visualisés en affichant la trajectoire du porteur sur la diagramme de pertes du bruiteur. Les résultats obtenus sont très satisfaisants, voir Figure 4.2. Nous avons ensuite étendu notre procédure au cas mutlicible, où la fonction de coût est une somme pondérée des pertes acoustiques liées aux différentes cibles. Là encore, les résultats sont très satisfaisant. Nous avons ensuite essayé de programmer le pilotage en trois dimensions au lieu de seulement la profondeur. Ceci augmente considérablement la taille de l'espace d'états et ralentit donc la procédure. De plus les résultats sont plus compliqués à visualiser. Nous sommes revenus à un pilotage en profondeur et cap, ce qui semble raisonnable pour l'application visée.

Notre dernier progrès, qui est un pas décisif pour la construction d'un démonstrateur utilisable dans des conditions opérationnelles réalistes, consiste à coupler notre méthode d'optimisation avec l'information fournie par les sonars et traduite par un algorithme de pistage. Ceci revient à ne plus prendre un matrice de covariance arbitraire pour le bruit dans la dynamique des cibles, mais à prendre la matrice estimée par l'algorithme de pistage. Au début de sa mission, le sous-marin n'obtient qu'une position imprécise pour ses cibles via les sonars. Ils manœuvre donc suivant les recommandations d'un algorithme de pistage pour améliorer sa connaissance sur la position des cibles. On applique alors l'optimisation sur quelques pas de temps, puis on réactualise la nouvelle matrice de covariance des bruiteurs avec l'algorithme de pistage, et ainsi de suite. Nous sommes donc passés d'un algorithme d'optimisation à horizon relativement grand à une succession d'optimisations à plus court terme. En général, cette stratégie n'est pas très bonne, mais ici on constate sur les diagrammes de perte que nous avons étudiés qu'il n'y a pas de *culs de sac*, et donc une succession

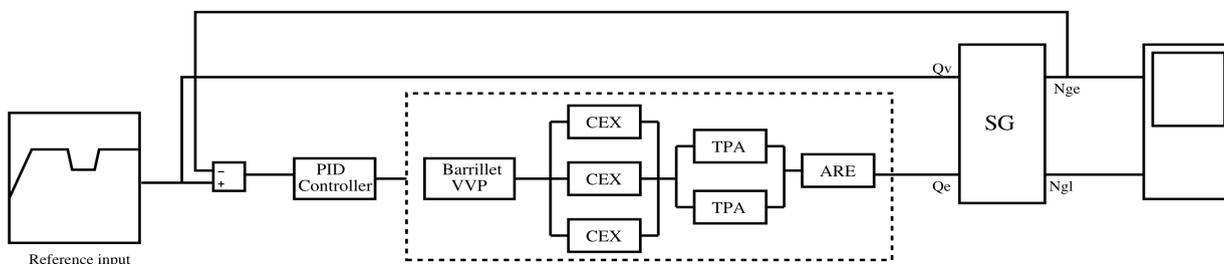


FIGURE 4.3 – Diagramme du circuit secondaire.

d'optimisations à court terme est presque aussi bonne que l'optimisation directe à long terme.

Ces travaux se poursuivent en 2013 pour prendre en compte les possibles changements de direction des bruiteurs, toujours à partir des estimations fournies par l'algorithme de pistage.

### 4.3 EDF

Cette collaboration a eu lieu dans le cadre du projet *Approdyn* (Approches de la fiabilité dynamique pour modéliser des systèmes critiques, 2010-2012) financé par le GIS Surveillance Sûreté et Sécurité des Grands Systèmes. Ce projet était coordonné par Gilles Deleuze d'EDF. Il a impliqué François Dufour, Huilong Zhang et moi-même pour CQFD, ainsi que des équipes de l'université technologique de Troyes et du centre de recherche en automatique (CRAN) de l'université de Nancy.

Il s'agit de construire un simulateur assez complet du circuit secondaire d'une centrale nucléaire, en prenant en compte les défaillances possibles des principaux composants. Il s'agit d'un système de taille industrielle, avec quatre composants principaux, dont certains en redondance, et de nombreux états possibles pour chaque composant, rendant le nombre total de combinaisons très grand (plusieurs milliards), voir Figure 4.3.

Le barillet VVP (Circuit Vapeur Principal) permet de maintenir le fonctionnement des turbopompes et sécheurs, même en cas de perte du générateur de vapeur (GV). Une rupture du barillet VVP est une défaillance de point unique ; elle représente un niveau minimal de fiabilité du système. Les défaillances du barillet VVP permettent aussi de représenter les défaillances des autres systèmes passifs (bâches, réchauffeurs, barillet en aval des vannes ARE (Régulation Débit Eau Alimentaire)).

Les trois pompes CEX (Pompes d'extraction) maintiennent le vide au condenseur et permettent d'assurer un débit d'eau alimentaire. Elles sont redondées en 2/3, la troisième pompe est à l'arrêt, en attente. Elle est démarrée lorsqu'une des autres pompes tombe en défaut. La pompe en défaut, une fois réparée, reste en attente.

Les deux turbopompes TPA (Turbo Pompe Alimentaire) assurent la pression commune aux GV, elles débitent dans un barillet commun modélisé dans la partie VVP. Elles fonctionnent en même temps. En cas de défaillance d'une TPA, l'autre passe en survitesse et assure une partie de la charge. On considère dans ce modèle que la puissance de l'installation baisse automatiquement tant qu'une seule TPA fonctionne.

Enfin, il y a un système de vannes réglantes ARE qui règle le débit pour chaque GV. Il y a deux parties : une vanne petit débit et une vanne gros débit. Une régulation assure le basculement entre les deux vannes. Le temps de réponse de la vanne en ouverture/fermeture permet de suivre les variations de puissance de l'installation.

Nous avons choisi de représenter le système par un PDP et avons construit un simulateur graphique à l'aide des interfaces Simulink et Stateflow de matlab. Une nouvelle particularité de ce système, outre sa taille, est que les variables continues (le débit vapeur  $Q_v$ , le débit eau  $Q_e$ , et le niveau eau/vapeur  $N_{ge}$ ,  $N_{gl}$ ) sont régulées continûment par un contrôleur de type PID (pour *proportionnel intégral dérivé*). Le système d'équations différentielles contrôlées n'a pas de solution analytique.

Nous avons construit un simulateur qui nous a permis de calculer les probabilités de défaillance importante (menant à un arrêt automatique du réacteur) dues aux différents composants pour un scénario-type de 18 mois de fonctionnement. Les résultats sont publiés dans le livre du GIS [ABB<sup>+</sup>12] et ont été présenté en conférence spécialisée [ZdSD<sup>+</sup>12].



## Conclusion : nouveaux projets

J'ai présenté dans ce mémoire deux séries de travaux. L'une tourne autour de la modélisation de la division cellulaire et de la détection du vieillissement chez les organismes unicellulaires. L'autre propose et étudie les propriétés d'une boîte à outils numériques pour les processus markoviens déterministes par morceaux.

En plus des pistes proposées dans les conclusions des différents chapitres, j'ai de nouveaux projets de recherche en cours de démarrage.

Je suis membre de l'ANR Jeunes chercheuses et jeunes chercheurs PIECE (PDP : inférence, évolution, contrôle et ergodicité) qui démarre en mars 2013 pour 4 ans. Cette ANR est coordonnée par Florent Malrieu (Université Rennes 1). Dans la modélisation de phénomènes biologiques ou physiques, les processus aléatoires permettent de prendre en compte à la fois une variabilité intrinsèque du système ainsi que des fluctuations parasites (erreurs de mesure, incertitude etc). Les processus de Markov déterministes par morceaux (PDP) sont au centre de nombreuses modélisations : réseaux, fonctionnement des neurones, croissance de populations bactériennes, fiabilité de systèmes complexes. Toutefois, leur étude mathématique reste incomplète. Le but de ce projet est de fédérer un groupe d'experts d'horizons différents (probabilités, statistique, analyse, équations aux dérivées partielles) afin de mutualiser les savoir-faire de chacun et de faire émerger de nouveaux outils pour l'étude des PDP. Les principaux axes du projet concernent les problèmes d'estimation, de simulation et de comportements asymptotiques (temps long, grandes populations) dans les différents contextes applicatifs. Je suis responsable de la tâche simulation dans cette ANR.

Je suis également membre du projet USP-Cofecub *Contrôle de systèmes dynamiques aléatoires avec sauts* avec l'université de São Paulo au Brésil. Le thème principal de cette coopération est d'étudier le contrôle de systèmes dynamiques stochastiques à sauts. L'objectif de l'axe de recherche auquel je participe est de développer des méthodes numériques pour l'optimisation de systèmes linéaires à sauts markoviens. Ce sont les processus à temps continu définis à partir d'équations différentielles ordinaires dont les coefficients sont perturbés par une chaîne de Markov. Des techniques de discrétisation seront mises en œuvre telles que des méthodes de quantification. Une première visite chez Eduardo F. Costa (Université de São Paulo à São Carlos, Brésil) est programmée en mai.

La collaboration entre CQFD et Astrium va se poursuivre dans le cadre de la chaire industrielle *Management des incertitudes* entre Inria Bordeaux Sud-Ouest,

Astrium, EADS Innovation Works et la Région Aquitaine. Un stage démarre en mars 2013 et devrait être suivi d'une thèse. Il s'agit de construire un modèle pour la chaîne de montage du futur lanceur de nouvelle génération, en vue de l'optimiser sous différentes contraintes opérationnelles d'Astrium (cadence de lancement, disponibilité, fiabilité, sécurité, coût, etc). Le projet a pour objectif de développer des méthodologies et des approches de modélisation et d'optimisation de performances afin d'accompagner les études d'architecture du segment sol. A partir de critères de choix définis il sera, entre autres, construit des méthodes permettant d'estimer la sensibilité de l'architecture aux paramètres d'entrée stochastiques et de rechercher le meilleur compromis avec ces différents critères. Pour la modélisation du scénario d'intégration, une méthodologie sera mise en place pour identifier, formaliser, et quantifier et gérer les incertitudes relatives à chaque paramètre tout au long du projet.

Cette problématique peut être comprise comme la modélisation d'un atelier de production. On utilisera la formalisme des processus markoviens décisionnels. Ils correspondent à des problèmes d'optimisation stochastique où le processus sous-jacent est défini par une chaîne de Markov. L'un des principaux objectifs de ce travail sera de proposer des outils théoriques et numériques pour la résolution de ce problème d'optimisation. Des discussions sont également en cours avec EADS IW dans le cadre de cette chaire pour définir un sujet autour de l'optimisation de la maintenance.

Dans la lignée de nos travaux sur la division cellulaire en collaboration avec Laurence Marsalle et Anne Gégout Petit, nous souhaitons nous intéresser maintenant à la dynamique des mitochondries. Ces micro-organismes peuvent se diviser, comme les cellules, mais ils peuvent aussi fusionner pour former de longs filaments à l'intérieur des cellules. Nous avons jeté les bases d'un modèle mathématique pour rendre compte de cette dynamique. Nous souhaitons construire un modèle permettant de caractériser cette dynamique des mitochondries. Il s'agit en effet d'un bon indicateur de la santé d'une cellule. Nous cherchons à caractériser cette dynamique à l'aide d'un petit nombre de paramètres qu'il serait possible d'estimer.

En collaboration avec François Dufour, je souhaite m'intéresser à des problématiques d'ordre théorique et numérique pour les processus markoviens décisionnels. Il s'agit de modèles très généraux pour l'optimisation stochastique. Même s'il existe une vaste littérature qui étudie ces objets sur le plan théorique, les outils numériques utilisables en pratique sont encore peu nombreux, surtout pour de grands espaces d'états et de contrôles. Ces travaux feront suite à nos études pour DCNS, et seront également en lien avec la thèse Astrium.

# Bibliographie

- [ABB<sup>+</sup>12] J.F. AUBRY, G. BABYKINA, N. BRINZEI, S. MEDJAHER, A. BARROS, CH. BÉRENGUER, A. GRALL, Y. LANGERON, D.N. NGUYEN, G. DELEUZE, B. DE SAPORTA, F. DUFOUR, AND H. ZHANG. Projet approdyn : approches de la fiabilité dynamique pour modéliser des systèmes critiques. In N. Matta, Y. Vandenboomgaerde, and J. Arlat, editors, *Supervision, surveillance et sûreté de fonctionnement des grands systèmes*, chapter 8, pages 181–222. Hermes Sciences - Lavoisier, 2012.
- [AHN92] E. ARJAS, P. HAARA, AND I. NORROS. Filtering the histories of a partially observed marked point process. *Stochastic Process. Appl.*, 40(2) :225–250, 1992.
- [AJ99] T. AVEN AND U. JENSEN. *Stochastic models in reliability*, volume 41 of *Applications of Mathematics*. Springer, New York, 1999.
- [Ald87] T. ALDEMIR. Computer-assisted markov failure modeling of process control systems. *IEEE Transactions on Reliability*, 36(4) :133–144, 1987.
- [Ban08] V. BANSAYE. Proliferating parasites in dividing cells : Kimmel’s branching model revisited. *Ann. Appl. Probab.*, 18(3) :967–996, 2008.
- [Ban09] V. BANSAYE. Cell contamination and branching processes in a random environment with immigration. *Adv. in Appl. Probab.*, 41(4) :1059–1081, 2009.
- [BB12] B. BERCU AND V. BLANDIN. A rademacher-menchov approach for random coefficient bifurcating autoregressive processes. ArXiv 1210.5835, 2012.
- [BBdS<sup>+</sup>12] C. BAYSSE, D. BIHANNIC, B. DE SAPORTA, A. GÉGOUT PETIT, M. PRENAT, AND J. SARACCO. Modèle de markov caché pour la détection d’un mode de fonctionnement dégradé d’un équipement optronique. In *Lambda-Mu 18*, Tours France, 10 2012.
- [BBGP<sup>+</sup>13] C. BAYSSE, D. BIHANNIC, A. GÉGOUT PETIT, M. PRENAT, B. DE SAPORTA, AND J. SARACCO. Maintenance optimization of optronic equipment. In *Prognostics and System Health Management Conference*, Milano, Italy, 2013.
- [BCS10] F. BOYER, M. COLIN, AND K. SANTUGINI. Evaluation des performances, rapport partial. Rapport ANR, <http://fautocoes.bordeaux.inria.fr/files/PartialReport2-1.pdf>, 2010.
- [BCS12] F. BOYER, M. COLIN, AND K. SANTUGINI. Evaluation des performances, rapport final. Rapport ANR, <http://fautocoes.bordeaux.inria.fr/files/FinalReport2-1.pdf>, 2012.
- [BD12] V. BISTEKI PENDA AND H. DJELLOUT. Deviation inequalities and moderate deviations for estimators of parameters in bifurcating autoregressive models. ArXiv 1204.2355, 2012.
- [BD13] V. BISTEKI PENDA AND H. DJELLOUT. Deviation inequalities for bifurcating markov chains on galton-watson tree. ArXiv 1302.3768, 2013.
- [BDG11] V. BISTEKI PENDA, H. DJELLOUT, AND A. GUILLIN. Deviation inequalities, moderate deviations and some limit theorems for bifurcating markov chains with application. ArXiv 1111.7303, 2011.
- [BDMT11] V. BANSAYE, J.-F. DELMAS, L. MARSALLE, AND V. C. TRAN. Limit theorems for Markov processes indexed by continuous time Galton-Watson trees. *Ann. Appl. Probab.*, 21(6) :2263–2314, 2011.

- [BdSD12a] A. BRANDEJSKY, B. DE SAPORTA, AND F. DUFOUR. Numerical method for expectations of piecewise-deterministic markov processes. *CAMCoS*, 7(1) :63–104, 2012.
- [BdSD12b] A. BRANDEJSKY, B. DE SAPORTA, AND F. DUFOUR. Numerical methods for the exit time of a piecewise-deterministic markov process. *Advances in Applied Probability*, 44(1) :196–225, 2012.
- [BdSD13] A. BRANDEJSKY, B. DE SAPORTA, AND F. DUFOUR. Optimal stopping for partially observed piecewise-deterministic markov processes. arXiv :1207.2886, 2013.
- [BdSG09] B. BERCU, B. DE SAPORTA, AND A. GÉGOUT PETIT. Asymptotic analysis for bifurcating autoregressive processes via a martingale approach. *Electronic Journal of Probability*, 14 :2492–2526, 2009.
- [BH98] Q. M. BUI AND R. M. HUGGINS. Robust inference for the bivariate bifurcating autoregressive model. *Aust. N. Z. J. Stat.*, 40(2) :151–163, 1998.
- [BH99] Q. M. BUI AND R. M. HUGGINS. Inference for the random coefficients bifurcating autoregressive model for cell lineage studies. *J. Statist. Plann. Inference*, 81(2) :253–262, 1999.
- [Bla12a] V. BLANDIN. Asymptotic results for bifurcating random coefficient autoregressive processes. ArXiv 1204.2926, 2012.
- [Bla12b] V. BLANDIN. Limit theorems for bifurcating integer-valued autoregressive processes. ArXiv 1202.04706, 2012.
- [BP97] C. BOUTON AND G. PAGÈS. About the multidimensional competitive learning vector quantization algorithm with constant gain. *Ann. Appl. Probab.*, 7(3) :679–710, 1997.
- [BP03] V. BALLY AND G. PAGÈS. A quantization algorithm for solving multi-dimensional discrete-time optimal stopping problems. *Bernoulli*, 9(6) :1003–1049, 2003.
- [BPP05] V. BALLY, G. PAGÈS, AND J. PRINTEMS. A quantization tree method for pricing and hedging multidimensional American options. *Math. Finance*, 15(1) :119–168, 2005.
- [BR11] N. BÄUERLE AND U. RIEDER. *Markov decision processes with applications to finance*. Universitext. Springer, Heidelberg, 2011.
- [Bra86] A. BRANDT. The stochastic equation  $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$  with stationary coefficients. *Adv. in Appl. Probab.*, 18(1) :211–220, 1986.
- [Bra12] A. BRANDEJSKY. *Méthodes numériques pour les processus markoviens déterministes par morceaux*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2012.
- [BSGB<sup>+</sup>09] C. BLANCHET-SCALLIET, R. GIBSON BRANDON, B. DE SAPORTA, D. TALAY, AND E. TANRÉ. Viscosity solutions to optimal portfolio allocation problems in models with random time changes and transaction costs. In H. Albrecher, W. J. Runggaldier, and W. Schachermayer, editors, *Advanced Financial Modelling*, volume 8 of *Radon Series on Computational and Applied Mathematics*. de Gruyter, 2009.
- [BT11] V. BANSAYE AND V. C.I TRAN. Branching Feller diffusion for cell division with parasite infection. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.*, 8 :95–127, 2011.
- [BZ04] I. V. BASAWA AND J. ZHOU. Non-Gaussian bifurcating models and quasi-likelihood estimation. *J. Appl. Probab.*, 41A :55–64, 2004.
- [CD88] O. L. V. COSTA AND M. H. A. DAVIS. Approximations for optimal stopping of a piecewise-deterministic process. *Math. Control Signals Systems*, 1(2) :123–146, 1988.
- [CD89] O. L. V. COSTA AND M. H. A. DAVIS. Impulse control of piecewise-deterministic processes. *Math. Control Signals Systems*, 2(3) :187–206, 1989.
- [CMP10] D. CHAFAÏ, F. MALRIEU, AND K. PAROUX. On the long time behavior of the TCP window size process. *Stochastic Process. Appl.*, 120(8) :1518–1534, 2010.
- [Coj96] G. COJAZZI. The dylam approach for dynamic reliability analysis of systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 52 :279–296, 1996.
- [Cos91] O. L. V. COSTA. Impulse control of piecewise-deterministic processes via linear programming. *IEEE Trans. Automat. Control*, 36(3) :371–375, 1991.

- [CS86] R. COWAN AND R. G. STAUDTE. The bifurcating autoregressive model in cell lineage studies. *Biometrics*, 42 :769–783, 1986.
- [CT97] C. COCOZZA-THIVENT. *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, volume 28 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [CTEM06] C. COCOZZA-THIVENT, R. EYMARD, AND S. MERCIER. A finite-volume scheme for dynamic reliability models. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(3) :446–471, 2006.
- [CTEM+06] C. COCOZZA-THIVENT, R. EYMARD, SO. MERCIER, AND M. ROUSSIGNOL. Characterization of the marginal distributions of Markov processes used in dynamic reliability. *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, pages Art. ID 92156, 18, 2006.
- [Dav84] M. H. A. DAVIS. Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of non-diffusion stochastic models. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 46(3) :353–388, 1984. With discussion.
- [Dav93] M. H. A. DAVIS. *Markov models and optimization*, volume 49 of *Monographs on Statistics and Applied Probability*. Chapman & Hall, London, 1993.
- [DCST97] Y. DUTUIT, E. CHÂTELET, J.P. SIGNORET, AND P. THOMAS. Dependability modelling and evaluation by using stochastic petri nets : application to two test cases. *Reliability Engineering and System Safety*, 55 :117–124, 1997.
- [DD02] F. DUFOUR AND Y. DUTUIT. Dynamic reliability : A new model. In *Proceedings of ESREL 2002 Lambda-Mu 13 Conference*, pages 350–353, 2002.
- [Dev97] J. DEVOOGHT. *Dynamic reliability*. Advances in nuclear science and technology. Chapman and Hall, Berlin, 1997.
- [DHKR13] M. DOUMIC, M. HOFFMANN, N. KRELL, AND L. ROBERT. Statistical estimation of a growth-fragmentation model observed on a genealogical tree. arXiv :1210.3240, 2013.
- [DM10] J.-F. DELMAS AND L. MARSALLE. Detection of cellular aging in a Galton-Watson process. *Stoch. Process. and Appl.*, 120 :2495–2519, 2010.
- [dS03] B. DE SAPORTA. Renewal Theorem for a system of renewal equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 39(5) :823–838, 2003.
- [dS04] B. DE SAPORTA. *Etude de la solution stationnaire de l'équation  $Y_{n+1} = a_n Y_n + b_n$  à coefficients aléatoires*. thèse, Université Rennes 1, 2004.
- [dS05] B. DE SAPORTA. Tail of the stationary solution of the stochastic equation  $Y(n+1)=a(n)Y(n)+b(n)$  with Markovian coefficients. *Stochastic Processes and their Applications*, 115(12) :1954–1978, 2005.
- [dSD12] B. DE SAPORTA AND F. DUFOUR. Numerical method for impulse control of piecewise deterministic markov processes. *Automatica*, 48 :779–793, 2012.
- [dSDG10] B. DE SAPORTA, F. DUFOUR, AND K. GONZALEZ. Numerical method for optimal stopping of piecewise deterministic Markov processes. *Ann. Appl. Probab.*, 20(5) :1607–1637, 2010.
- [dSDZ12] B. DE SAPORTA, F. DUFOUR, AND H. ZHANG. Predictive maintenance for the heated hold-up tank. In *PSAM11-ESREL12*, Helsinki, Finland, 2012.
- [dSDZ+10] B. DE SAPORTA, F. DUFOUR, H. ZHANG, AND CHARLES ELEGBEDE. Arrêt optimal pour la maintenance prédictive. In *Lambda-Mu 17*, La Rochelle France, 10 2010.
- [dSDZ+12] B. DE SAPORTA, F. DUFOUR, H. ZHANG, AND C. ELEGBEDE. Optimal stopping for the predictive maintenance of a structure subject to corrosion. *journal of Risk and Reliability*, 226(2) :169–181, 2012.
- [dSGP+11] B. DE SAPORTA, A. GÉGOUT PETIT, AND L. MARSALLE. Parameters estimation for bifurcating autoregressive processes with missing data. *Electonic Journal of Statistics*, 5 :1313–1353, 2011.

- [dSGP<sup>+</sup>12] B. DE SAPORTA, A. GÉGOUT PETIT, AND L. MARSALLE. Asymmetry tests for bifurcating autoregressive processes with missing data. *Statistics & Probability Letters*, 82(7) :1439–1444, 2012.
- [dSGP<sup>+</sup>13a] B. DE SAPORTA, A. GÉGOUT PETIT, AND L. MARSALLE. Random coefficients bifurcating autoregressive processes. arXiv :1205.3658, 2013.
- [dSGP<sup>+</sup>13b] B. DE SAPORTA, A. GÉGOUT PETIT, AND L. MARSALLE. Statistical study of asymmetry in cell lineage data. arXiv :1205.4840, 2013.
- [dSY05] B. DE SAPORTA AND J.-F. YAO. Tail of a linear diffusion with Markov switching. *Ann. Appl. Probab.*, 15(1B) :992–1018, 2005.
- [dSZ13] B. DE SAPORTA AND H. ZHANG. Predictive maintenance for the heated hold-up tank. *Reliability Engineering & System Safety*, 2013. to appear.
- [Duf97] M. DUFLO. *Random iterative models*, volume 34 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [EMP08] R. EYMARD, S. MERCIER, AND A. PRIGNET. An implicit finite volume scheme for a scalar hyperbolic problem with measure data related to piecewise deterministic Markov processes. *J. Comput. Appl. Math.*, 222(2) :293–323, 2008.
- [GBP<sup>+</sup>05] J. GUYON, A. BIZE, G. PAUL, E. STEWART, J.-F. Delmas, and F. Taddéi. Statistical study of cellular aging. In *CEMRACS 2004—mathematics and applications to biology and medicine*, volume 14 of *ESAIM Proc.*, pages 100–114 (electronic). EDP Sci., Les Ulis, 2005.
- [Gon10] K. GONZALEZ. *Contribution à l'étude des processus markoviens déterministes par morceaux*. PhD thesis, Université Bordeaux 1, 2010.
- [Gug86] U. S. GUGERLI. Optimal stopping of a piecewise-deterministic Markov process. *Stochastics*, 19(4) :221–236, 1986.
- [Gut91] P. GUTTORP. *Statistical inference for branching processes*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, 1991.
- [Guy07] J. GUYON. Limit theorems for bifurcating Markov chains. Application to the detection of cellular aging. *Ann. Appl. Probab.*, 17(5-6) :1538–1569, 2007.
- [Har63] T. E. HARRIS. *The theory of branching processes*. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. 119. Springer-Verlag, Berlin, 1963.
- [HB99] R. M. HUGGINS AND I. V. BASAWA. Extensions of the bifurcating autoregressive model for cell lineage studies. *J. Appl. Probab.*, 36(4) :1225–1233, 1999.
- [HB00] R. M. HUGGINS AND I. V. BASAWA. Inference for the extended bifurcating autoregressive model for cell lineage studies. *Aust. N. Z. J. Stat.*, 42(4) :423–432, 2000.
- [HBY09] S. Y. HWANG, I. V. BASAWA, AND I. K. YEO. Local asymptotic normality for bifurcating autoregressive processes and related asymptotic inference. *Stat. Methodol.*, 6(1) :61–69, 2009.
- [HLL96] O. HERNÁNDEZ-LERMA AND J. B. LASSERRE. *Discrete-time Markov control processes*, volume 30 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1996. Basic optimality criteria.
- [HLL99] O. HERNÁNDEZ-LERMA AND J. B. LASSERRE. *Further topics on discrete-time Markov control processes*, volume 42 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [HRS01] K. HELMES, S. RÖHL, AND R. H. STOCKBRIDGE. Computing moments of the exit time distribution for Markov processes by linear programming. *Oper. Res.*, 49(4) :516–530, 2001.
- [HS94] R. M. HUGGINS AND R. G. STAUDTE. Variance components models for dependent cell populations. *J. AMS*, 89(425) :19–29, 1994.
- [Hug96a] R. M. HUGGINS. Robust inference for variance components models for single trees of cell lineage data. *Ann. Statist.*, 24(3) :1145–1160, 1996.

- [Hug96b] R. M. HUGGINS. On the identifiability of measurement error in the bifurcating autoregressive model. *Statist. Probab. Lett.*, 27(1) :17–23, 1996.
- [Kre09] N. KRELL. Self-similar branching Markov chains. In *Séminaire de probabilités XLII*, volume 1979 of *Lecture Notes in Math.*, pages 261–280. Springer, Berlin, 2009.
- [LMK11] J. LI, A. MOSLEHB, AND R. KANGA. Likelihood ratio gradient estimation for dynamic reliability applications. *Reliability Engineering and System Safety*, 96 :1667–1679, 2011.
- [LMZR10] W. LAIR, S. MERCIER, R. ZIANI, AND M. ROUSSIGNOL. Processus markoviens déterministes par morceaux et quantification déterministe avec un schéma de volumes finis : un cas d’étude. In *Lambda-Mu 17*, La Rochelle France, 10 2010.
- [LPR04] J.-B. LASSERRE AND T. PRIETO-RUMEAU. SDP vs. LP relaxations for the moment approach in some performance evaluation problems. *Stoch. Models*, 20(4) :439–456, 2004.
- [Mar94] M. MARSEGUERRA. Approximated physical modelling in dynamic psa using artificial neural networks. *Reliability Engineering & System Safety*, 45 :47–56, 1994.
- [MT05] F. MAAOUIA AND A. TOUATI. Identification of multitype branching processes. *Ann. Statist.*, 33(6) :2655–2694, 2005.
- [MZ95] M. MARSEGUERRA AND E. ZIO. The cell-to-boundary method in Monte Carlo-based dynamic PSA. *Reliability Engineering and System Safety*, 48(3) :199–204, 1995.
- [MZ96] M. MARSEGUERRA AND E. ZIO. Monte Carlo approach to PSA for dynamic process systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 52(3 SPEC. ISS.) :227–241, 1996.
- [NML+12] A. NÈGRE, O. MARCEAU, D. LANEUVILLE, H. ZHANG, B. DE SAPORTA, AND F. DUFOUR. Stochastic control for underwater optimal trajectories. In *IEEE Aerospace conference*, Big Sky, Montana, USA, 2012.
- [Øks05] B. ØKSENDAL. Optimal stopping with delayed information. *Stoch. Dyn.*, 5(2) :271–280, 2005.
- [Pag98] G. PAGÈS. A space quantization method for numerical integration. *J. Comput. Appl. Math.*, 89(1) :1–38, 1998.
- [PP05] G. PAGÈS AND H. PHAM. Optimal quantization methods for nonlinear filtering with discrete-time observations. *Bernoulli*, 11(5) :893–932, 2005.
- [PPP04a] G. PAGÈS, H. PHAM, AND J. PRINTEMS. An optimal Markovian quantization algorithm for multi-dimensional stochastic control problems. *Stoch. Dyn.*, 4(4) :501–545, 2004.
- [PPP04b] G. PAGÈS, H. PHAM, AND J. PRINTEMS. Optimal quantization methods and applications to numerical problems in finance. In *Handbook of computational and numerical methods in finance*, pages 253–297. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2004.
- [PRS05] H. PHAM, W. RUNGGALDIER, AND A. SELLAMI. Approximation by quantization of the filter process and applications to optimal stopping problems under partial observation. *Monte Carlo Methods Appl.*, 11(1) :57–81, 2005.
- [PTW10] K. PAKDAMAN, M. THIEULLEN, AND G. WAINRIB. Fluid limit theorems for stochastic hybrid systems with application to neuron models. *Adv. in Appl. Probab.*, 42(3) :761–794, 2010.
- [Rie13] M. G. RIEDLER. Almost sure convergence of numerical approximations for piecewise deterministic markov processes. *J. Computational Applied Mathematics*, 239 :50–71, 2013.
- [SACH06] R. SCHOENIG, J.F. AUBRY, T. CAMBOIS, AND T. HUTINET. An aggregation method of markov graphs for the reliability analysis of hybrid systems. *Reliability Engineering and System Safety*, 91 :137–148, 2006.
- [Siu94] N. SIU. Risk assessment for dynamic systems : an overview. *Reliability Engineering and System Safety*, 43 :43–73, 1994.

- [SMPT05] E. J. STEWART, R. MADDEN, G. PAUL, AND F. TADDEI. Aging and death in an organism that reproduces by morphologically symmetric division. *PLoS Biol.*, 3(2) :e45, 2005.
- [SZH96] R. G. STAUDTE, J. ZHANG, AND R. M. HUGGINS. A reexamination of the cell-lineage data of e. p. powell. *Biometrics*, 52(4) :1214–1222, 1996.
- [TA96] B. TOMBUYES AND T. ALDEMIR. Continuous cell-to-cell mapping and dynamic psa. In *Proceedings of ICONE 4 conference*, pages 431–438, 1996.
- [WRP<sup>+</sup>10] P. WANG, L. ROBERT, J. PELLETIER, W. L. DANG, F. TADDEI, ANDREW WRIGHT, AND SUCKJOON JUN. Robust growth of escherichia coli. *Current Biology*, 20(12) :1099 – 1103, 2010.
- [ZB05a] J. ZHOU AND I. V. BASAWA. Least-squares estimation for bifurcating autoregressive processes. *Statist. Probab. Lett.*, 74(1) :77–88, 2005.
- [ZB05b] J. ZHOU AND I. V. BASAWA. Maximum likelihood estimation for a first-order bifurcating autoregressive process with exponential errors. *J. Time Ser. Anal.*, 26(6) :825–842, 2005.
- [ZDDG08] H. ZHANG, F. DUFOUR, Y. DUTUIT, AND K. GONZALEZ. Piecewise deterministic markov processes and dynamic reliability. *Proc. of the Inst. of Mechanical Engineers, Part O : Journal of Risk and Reliability*, 222(4) :545–551, 2008.
- [ZdSD<sup>+</sup>12] H. ZHANG, B. DE SAPORTA, F. DUFOUR, AND G. DELEUZE. Dynamic reliability : towards efficient simulation of the availability of a feedwater control system. In *NPIC-HMIT 2012*, San Diego, USA, 2012.
- [Zha11] C. ZHANG. Parameter estimation of first-order bifurcating autoregressive processes with Weibull innovations. *Statist. Probab. Lett.*, 81(12) :1961–1969, 2011.