

# REVUE DE STATISTIQUE APPLIQUÉE

Y. ESCOUFIER

## Les liaisons entre groupes d'aléas

*Revue de statistique appliquée*, tome 19, n° 2 (1971), p. 5-17

[http://www.numdam.org/item?id=RSA\\_1971\\_\\_19\\_2\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSA_1971__19_2_5_0)

© Société française de statistique, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « *Revue de statistique appliquée* » (<http://www.sfds.asso.fr/publicat/rsa.htm>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LES LIAISONS ENTRE GROUPES D'ALÉAS

Y. ESCOUFIER

*L'auteur précise les liens étroits qui existent entre l'analyse canonique telle qu'elle est présentée dans les traités classiques d'analyse statistique multidimensionnelle et l'analyse factorielle des correspondances développée par M. Benzecri et ses collaborateurs. L'explicitation du contexte mathématique sous-jacent à ces méthodes permet une généralisation à des aléas vectoriels, chose qui n'a pas été abordée jusqu'à ce jour. L'exposé comprend des exemples détaillés pour chacune des trois méthodes.*

## I - L'ANALYSE CANONIQUE

I<sub>1</sub>. Soit  $X$  un vecteur aléatoire partitionné en deux sous-vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  ( $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ ) possédant respectivement  $p$  et  $q$  composantes. Nous supposons dans la suite de l'exposé que le vecteur  $X$  est centré.

L'analyse canonique suppose que les composantes  $X_1^i$  ( $i = 1, \dots, p$ ) de  $X_1$  et  $X_2^j$  ( $j = 1, \dots, q$ ) de  $X_2$  sont des fonctions de carrés sommables sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ .

Nous verrons plus loin l'intérêt qu'il peut y avoir à ce que le vecteur  $X$  soit un vecteur gaussien sur  $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$  ; mais cette hypothèse plus forte, nécessaire pour l'inférence statistique, est superflue dans un premier temps si l'on se limite à la présentation algébrique du problème.

Soient  $L_x^2$  l'espace de Hilbert des combinaisons linéaires des composantes de  $X$  muni du produit scalaire  $\langle U, V \rangle = E(UV)$ , et  $L_{x_1}^2$  et  $L_{x_2}^2$  les sous-espaces de  $L_x^2$  engendrés respectivement par les composantes de  $X_1$  et celles de  $X_2$ .

Le problème que veut résoudre l'analyse canonique est de trouver les couples  $(U, V)$ ,  $U \in L_{x_1}^2$ ,  $V \in L_{x_2}^2$ ,  $\|U\| = \|V\| = 1$ , pour lesquels  $E(UV)$  est maximum ou, ce qui revient au même, tels que l'angle entre  $U$  et  $V$  soit minimum.

I<sub>2</sub>. On peut remarquer ([4]) que pour  $U$  donné le vecteur  $V$  qui fait avec  $U$  un angle minimum est colinéaire à la projection  $P_1(U)$  de  $U \in L_{x_1}^2$  dans  $L_{x_2}^2$ . Donc, pour  $U$  donné :

$$V = \frac{P_1(U)}{\|P_1(U)\|}$$

De la même manière, pour  $V$  donné,  $U$  est colinéaire à la projection  $P_2(V)$  de  $V \in L_{x_2}^2$  dans  $L_{x_1}^2$  si bien que pour  $V$  donné :

$$U = \frac{P_2(V)}{\|P_2(V)\|}$$

Il s'ensuit que les couples  $(U, V)$  solutions du problème posé sont tels que :

$$V = \frac{P_1 \circ P_2(V)}{\|P_1(U)\| \|P_2(V)\|} \quad \text{et} \quad U = \frac{P_2 \circ P_1(U)}{\|P_1(U)\| \|P_2(V)\|}$$

c'est dire que :

Les couples  $(U, V)$  solution du problème posé sont tels que  $U$  soit vecteur propre de l'opérateur  $P_1 \circ P_2$  associé à la valeur propre  $\|P_1(U)\| \|P_2(V)\|$  et  $V$  le vecteur propre de  $P_2 \circ P_1$  associé à la même valeur propre.

Insertion n° 1

Remarque I<sub>2,a</sub> : La transformation  $P_1 \circ P_2$  est une transformation symétrique de  $L_{x_2}^2$  dans lui-même. La transformation  $P_2 \circ P_1$  est une transformation symétrique de  $L_{x_1}^2$  dans lui-même.

On a en effet dans  $L_x^2$ , pour  $U \in L_{x_1}^2$  et  $V \in L_{x_2}^2$  :

$$\langle U, V \rangle = \langle P_1(U), V \rangle = \langle U, P_2(V) \rangle$$

D'où :

$$\begin{aligned} \langle U, P_2 \circ P_1(U') \rangle &= \langle U, P_1(U') \rangle \\ &= \langle P_1(U), P_1(U) \rangle \\ &= \langle P_1(U), U' \rangle \\ &= \langle P_2 \circ P_1(U), U' \rangle \end{aligned}$$

Il en découle que si  $L_{x_1}^2$  et  $L_{x_2}^2$  sont finis, l'opérateur  $P_1 \circ P_2$  a des valeurs propres positives et des vecteurs propres deux à deux orthogonaux.

Remarque I<sub>2,b</sub> :  $P_1$  et  $P_2$  sont des opérateurs de projection si bien que :

$$\{\|U\| = \|V\| = 1\} \implies \{0 \leq \|P(U)\| \|P(V)\| \leq 1\}$$

Les valeurs propres de  $P_1 \circ P_2$  et de  $P_2 \circ P_1$  sont comprises entre 0 et 1.

Remarque I<sub>2,c</sub> : Les opérateurs  $P_2 \circ P_1$  et  $P_1 \circ P_2$  ne peuvent avoir des valeurs propres égales à l'unité que si :

$$L_{x_1}^2 \cap L_{x_2}^2 \neq \emptyset$$

Le nombre de valeur propre égale à l'unité sera égal à la dimension de  $L_{x_1}^2 \cap L_{x_2}^2$ .

Remarque I<sub>2,d</sub> . Si  $U$  est le vecteur propre de  $P_2 \circ P_1$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , le vecteur propre  $V$  correspondant à la même valeur propre est égal à  $P_1(U)$ . En effet :

$$\{P_2 \circ P_1(U) = \lambda U\} \implies \{P_1 \circ P_2(P_1(U)) = \lambda P_1(U)\} .$$

Insertion n° 2

Le premier couple  $\langle U_1, V_1 \rangle$  solution du problème est donc fourni par les vecteurs propres de  $P_2 \circ P_1$  et  $P_1 \circ P_2$  associés à la plus grande valeur propre différente de l'unité. Si l'on cherche un second couple  $\langle U_2, V_2 \rangle$  tel que  $U_2$  soit orthogonal à  $U_1$  et  $V_2$  à  $V_1$ , on trouvera le couple des vecteurs propres associés à la valeur propre immédiatement inférieure et ainsi de suite.

I<sub>3</sub>. Le calcul explicite des valeurs propres et des vecteurs propres des opérateurs  $P_1 \circ P_2$  et  $P_2 \circ P_1$ , conduit à chercher les matrices associées à ces opérateurs dans les bases  $X_1$  et  $X_2$ .

Pour cela, nous devons écrire que pour tout élément  $X_1^i$  de la base  $X_1$ , le vecteur  $X_1^i - P_1(X_1^i)$  est orthogonal à tout élément  $X_2^j$  de la base  $X_2$ . Soit :

$$\forall i = 1, \dots, p ; \forall j = 1, \dots, q : \langle X_1^i - P_1(X_1^i), X_2^j \rangle = 0$$

$P_1(X_1^i)$  est un élément de  $L_{X_2}^2$  que l'on peut écrire :  $\sum_{k=1}^q M_k^i X_2^k$ .

D'où, les  $p \times q$  égalités précédentes deviennent :

$$\forall i = 1, \dots, p ; \forall j = 1, \dots, q : \langle X_1^i, X_2^j \rangle - \sum_{k=1}^q M_k^i \langle X_2^k, X_2^j \rangle = 0 .$$

Si on appelle  $\Sigma_{12}$  la matrice d'élément  $(\Sigma_{12})_{ij} = \langle X_1^i, X_2^j \rangle$ ;  $\Sigma_{22}$  la matrice d'élément  $(\Sigma_{22})_{k,j} = \langle X_2^k, X_2^j \rangle$  et  $M$  la matrice dont la  $i^{\text{ième}}$  ligne est formée des  $M_k^i$ ; les  $p \times q$  égalités précédentes se résument en l'égalité matricielle :

$$\Sigma_{12} - M \Sigma_{22} = 0$$

D'où :

$$M = \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} .$$

Convenons d'appeler  $\Sigma_{21}$  la transposée de  $\Sigma_{12}$ ,  $M$  est la matrice des coefficients des  $P_1(X_1^i)$ , les coordonnées de  $P_1(X_1^i)$  étant rangées dans la ligne  $i$ . On en déduit que la matrice associée à  $P_1$  est :

$${}^t(\Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1}) = \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} .$$

De même, en appelant  $\Sigma_{11}$  la matrice d'élément  $(\Sigma_{11})_{ij} = \langle X_1^i, X_1^j \rangle$  on établirait que la matrice associée à  $P_2$  est  $\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}$ .

Il en découle que la matrice associée à  $P_1 \circ P_2$  est  $\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}$  et la matrice associée à  $P_2 \circ P_1$  :  $\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$ .

**Remarque I<sub>3.a</sub>** : Dans l'utilisation traditionnelle de l'analyse canonique, les statisticiens se contentent de donner les valeurs propres de  $P_1 \circ P_2$  appelées corrélations canoniques et les vecteurs propres appelés variables canoniques. Il nous paraît intéressant de suggérer de représenter les  $X_2^j$  dans l'espace  $L_{X_2}^2$  rapportés aux vecteurs propres de  $P_1 \circ P_2$  ainsi que les  $P_1(X_1^i)$ . Si on appelle  $\Sigma_{12}^i$  la  $i^{\text{ième}}$  ligne de  $\Sigma_{12}$ , d'après ce qui précède, on a :

$$P_1(X_1^i) = \Sigma_{12}^i \Sigma_{22}^{-1} X_2$$

si bien que la proximité des points représentant  $X_1^i$  et  $X_2^j$  est liée à l'importance de  $X_2^j$  dans la régression de  $X_1^i$  par rapport à  $X_2$ .

De plus :

$$\begin{aligned} ||P_1(X_1^i) - P_1(X_1^k)||^2 &= \langle P_1(X_1^i) - P_1(X_1^k), P_1(X_1^i) - P_1(X_1^k) \rangle \\ &= \langle (\Sigma_{12}^i - \Sigma_{12}^k) \Sigma_{22}^{-1} X_2, {}^t X_2 \Sigma_{22}^{-1} {}^t (\Sigma_{12}^i - \Sigma_{12}^k) \rangle \\ &= (\Sigma_{12}^i - \Sigma_{12}^k) \Sigma_{22}^{-1} {}^t (\Sigma_{12}^i - \Sigma_{12}^k) \end{aligned}$$

Là encore, il apparaît que les points représentant  $P_1(X_1^i)$  et  $P_2(X_1^k)$  seront d'autant plus proches que les variables  $X_1^i$  et  $X_1^k$  ont des covariances avec  $X_2^j$  voisines.

I<sub>4</sub>. Nous avons supposé jusqu'à maintenant que les matrices  $\Sigma_{12}$ ,  $\Sigma_{21}$ ,  $\Sigma_{11}$  et  $\Sigma_{22}$  étaient connues. Ce n'est pas toujours le cas et le plus souvent, elles doivent être estimées. L'hypothèse d'un vecteur X gaussien est alors intéressante puisqu'elle nous permet d'obtenir le résultat suivant : ([1] p. 298).

Appelons  $\Sigma$  la matrice  $\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{pmatrix}$  et S son estimation du maximum de vraisemblance. Alors dans le cas où toutes les valeurs propres de  $\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$  sont différentes, les vecteurs propres normés sont définis de manière unique si l'on s'astreint à leur imposer une première composante positive. Ceci permet d'assurer que les estimations du maximum de vraisemblance des vecteurs propres et des valeurs propres de  $\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} \Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21}$  sont ceux de  $S = S_{11}^{-1} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}$ .

I<sub>5</sub>. Exemple.

Pour illustrer ce que nous venons de dire, nous prendrons les données présentées par Anderson ([1] p. 303). Le lecteur pourra ainsi comparer l'intérêt de notre approche par rapport à la présentation habituelle du problème. L'étude porte sur les deux premiers fils d'un échantillon de 25 familles.

Le vecteur  $X_1$  a deux composantes ;  $X_1^1$  est la longueur de la tête du fils aîné ;  $X_1^2$  sa largeur.  $X_2$  a également deux composantes ;  $X_2^1$  est la longueur de la tête du fils cadet ;  $X_2^2$  sa largeur. Les calculs sont faits sur les variables centrées réduites. La matrice S est la suivante :

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,0000 & 0,7346 & | & 0,7108 & 0,7040 \\ 0,7346 & 1,0000 & | & 0,6932 & 0,7086 \\ \hline 0,7108 & 0,6932 & | & 1,0000 & 0,8392 \\ 0,7040 & 0,7086 & | & 0,8392 & 1,0000 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$S_{22}^{-1} S_{21} = \begin{pmatrix} 0,4058 & 0,3332 \\ 0,3635 & 0,4290 \end{pmatrix}$$

$$S_{11}^{-1} S_{12} = \begin{pmatrix} 0,4379 & 0,3986 \\ 0,3714 & 0,4157 \end{pmatrix}$$

et

$$S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} = \begin{pmatrix} 0,3014 & 0,3001 \\ 0,3184 & 0,3231 \end{pmatrix}$$

La première valeur propre de cette matrice est  $\lambda_1 = 0,6215$ . Le vecteur propre  $Y_1$  qui lui est associé tel que  $E(Y_1^2) = 1$  est :

$$Y_1 = 0,5045 X_2^1 + 0,5383 X_2^2 .$$

De la même manière le vecteur propre  $Y_2$  tel que  $E(Y_2^2) = 1$  associé à la seconde valeur propre  $\lambda_2 = 0,0029$  est :

$$Y_2 = 1,7680 X_2^1 - 1,7586 X_2^2 .$$

En inversant la matrice  $\begin{pmatrix} 0,5045 & 0,5383 \\ 1,7680 & -1,7586 \end{pmatrix}$ , on obtient :

$$X_2^1 = 0,9564 Y_1 + 0,2927 Y_2$$

$$X_2^2 = 0,9614 Y_1 - 0,2743 Y_2$$

et en utilisant  ${}^t(S_{22}^{-1} S_{21})$  :

$$P_1(X_1^1) = 0,8141 Y_1 + 0,0429 Y_2$$

$$P_1(X_1) = 0,7311 Y_1 - 0,0201 Y_2$$

Dans ce cas très simple, l'interprétation n'est pas particulièrement riche ; on pourra noter cependant que les points représentant  $X_2^1$  et  $X_2^2$  sont placés à une distance de l'origine des axes égale à leur variance (ici 1,0000). Les points représentant  $P_1(X_1)$  et  $P_2(X_1^2)$  sont placés de part et d'autres de l'axe  $Y_1$  et très près de celui-ci. Cette dernière proximité s'explique par l'analogie qu'il y a entre les trois équations :

$$Y_1 = 0,5045 X_2^1 + 0,5383 X_2^2$$

$$P_1(X_1^1) = 0,4858 X_2^1 + 0,3635 X_2^2$$

$$P_2(X_1^2) = 0,3332 X_2^1 + 0,4290 X_2^2$$

$P_1(X_1^1)$  est placé du même côté de  $X_2^1$  car  $X_2^1$  intervient plus dans la régression de  $P_1(X_1^1)$  que  $X_2^2$ . Il en va de même pour  $P_2(X_1^2)$  et  $X_2^2$ .

On notera enfin que la distance de  $P_1(X_1^1)$  à l'origine des axes représente la part de variation expliquée par  $X_2^1$  et  $X_2^2$  dans la variation totale de  $X_1^1$ . La même remarque vaut pour  $P_1(X_1^1)$ .

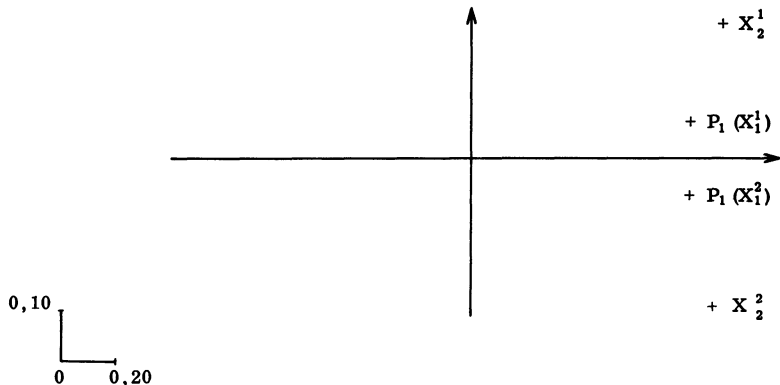
Remarque : En multipliant à gauche le vecteur  $\begin{pmatrix} 0,5045 \\ 0,5383 \end{pmatrix}$  qui définit le premier vecteur de  $S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$  par  $S_{11}^{-1} S_{12}$  on obtient le premier vecteur propre de  $S_{11}^{-1} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}$ , soit :

$$\tilde{Z}_1 = 0,4355 X_1^1 + 0,4111 X_1^2 .$$

En posant alors  $Z_1 = \frac{\tilde{Z}_1}{11\tilde{Z}_1.11}$ , on a vérifié que :

$$E(Y_1 Z_1) = \sqrt{\lambda_1} .$$

Analyse canonique



## II - L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES

II<sub>1</sub>. L'analyse factorielle des correspondances peut être présentée comme un cas particulier de l'analyse canonique dans lequel  $\Omega$  est un ensemble produit de deux ensembles finis  $I \times J$ ;  $I$  à  $p$  éléments ;  $J$  à  $q$  éléments ;  $\Omega = I \times J$  est probabilisé par la donnée des probabilités  $p(i, j)$  des couples  $(i, j)$  pour  $i = 1, \dots, p$  ;  $j = 1, \dots, q$ .

Le vecteur  $X_1$  est le vecteur des fonctions  $\delta_i$  définies sur  $I$  par :

$$\begin{cases} \delta_i(k) = 0 & \text{si } k \neq i \\ \delta_i(k) = 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$

De même le vecteur  $X_2$  est le vecteur des fonctions  $\eta_j$  définies sur  $J$  par :

$$\begin{cases} \eta_j(k) = 0 & \text{si } k \neq j \\ \eta_j(k) = 1 & \text{si } k = j \end{cases}$$

Explicitons dans ce cas particulier les éléments des différentes matrices.

$$(\Sigma_{11})_{i,k} = \langle \delta_i, \delta_k \rangle = \sum_{l=1}^p \sum_{h=1}^q \delta_i(l) \delta_k(h) p(l, h)$$

d'où :

$$(\Sigma_{11})_{i,k} = p(i) \quad \text{si} \quad i = k$$

$$(\Sigma_{11})_{i,k} = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k$$

$$(\Sigma_{12})_{i,j} = \langle \delta_i, \eta_j \rangle = \sum_{k=1}^p \sum_{l=1}^q \delta_i(k) \eta_j(l) p(k,l) = p(i,j) .$$

On en déduit :

$$(\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})_{i,j} = \frac{p(i,j)}{p(i)}$$

et

$$(\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})_{i,j} = \frac{p(i,j)}{p(j)}$$

D'où :

$$(\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12})_{j_1, j_2} = \sum_{i=1}^p \frac{p(i, j_1) p(i, j_2)}{p(i) p(j_1)} .$$

$\Pi_2$ . En particulier  $P_1(\delta_1) = \Sigma_{12}^i \Sigma_{22}^{-1} X_2 = \sum_{j=1}^q \frac{p(i,j)}{p(j)} \eta_j$ .

Ainsi, le point représentant  $P_1(\delta_1)$  sera le centre de gravité des points représentant les  $\eta_j$  affectés des masses :

$$\frac{p(i,j)}{p(j)} .$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} ||P_1(\delta_1) - P_1(\delta_k)||^2 &= (\Sigma_{12}^i - \Sigma_{12}^k) \Sigma_{22}^{-1} (\Sigma_{12}^i - \Sigma_{12}^k) \\ &= \sum_{j=1}^q \frac{(p(i,j) - p(k,j))^2}{p(j)} \\ &= \sum_{j=1}^q p(j) \left( \frac{p(i,j)}{p(j)} - \frac{p(k,j)}{p(j)} \right)^2 . \end{aligned}$$

Remarque  $\Pi_{2,a}$  : Si au lieu de projeter les éléments  $\delta_i$  et  $\delta_k$  on effectuait la projection de  $\frac{\delta_i}{p(i)}$  et  $\frac{\delta_k}{p(k)}$  on obtiendrait :

$$||P_1\left(\frac{\delta_i}{p(i)}\right) - P_1\left(\frac{\delta_k}{p(k)}\right)||^2 = \sum_{j=1}^q p(j) \left( \frac{p(i,j)}{p(i)p(j)} - \frac{p(k,j)}{p(k)p(j)} \right)^2$$

Ce résultat a été le but des travaux de M. Benzécri et de ses collaborateurs. Il les a conduit à proposer l'analyse factorielle des correspondances, méthode



dont il faut souligner l'intérêt puisqu'elle permet de prendre en compte des ensembles I et J d'éléments qui n'étaient pas abordables par les méthodes statistiques classiques.

Remarque  $\Pi_{2,b}$  : Dans le cas particulier que nous étudions, l'ensemble  $L_{x_1}^2 \cap L_{x_2}^2$  n'est pas vide : il contient les fonctions constantes sur  $I \times J$ . Nous aurons donc une valeur propre égale à 1 dont nous ne tiendrons pas compte.

$\Pi_3$ . Exemple : Nous traiterons un exemple très simple qui nous permettra de mettre en évidence les différents calculs à effectuer. Soit J un ensemble à 2 éléments ; I un ensemble à trois éléments ; sur une population de 50 individus, les éléments de I et de J sont apparus selon la table de correspondances suivantes :

	I			
J		$i_1$	$i_2$	$i_3$
$j_1$		1	2	17
$j_2$		14	13	3

On établit sans difficultés que :

$$\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = \begin{pmatrix} 1/20 & 2/20 & 17/20 \\ 14/30 & 13/30 & 3/30 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 1/15 & 14/15 \\ 2/15 & 13/15 \\ 17/20 & 3/20 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0,7392 & 0,2608 \\ 0,1739 & 0,8261 \end{pmatrix}$$

Le premier vecteur propre associée à la valeur propre 1 est sans intérêt (Remarque  $\Pi_{2,b}$ ).

La seconde valeur propre est égale à 0,5652. Il lui est associé le vecteur propre  $Y = 1,2243 \eta_1 - 0,8168 \eta_2$ . On vérifie aisément que  $\|Y\| = 1$ .

La base des  $\eta_j$  est une base orthogonale ; donc la coordonnée de  $\eta_1$  sur Y est 1,2243 et la coordonnée de  $\eta_2$  est -0,8168. On en déduit les coordonnées de  $P_1(\delta_1)$  sur Y. En effet,

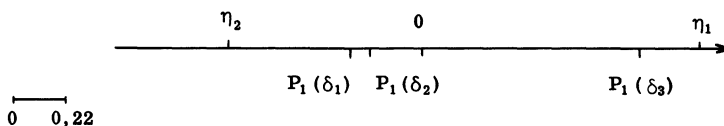
$$P_1(\delta_1) = \Sigma_{12} \Sigma_{22} X_2 = \frac{1}{20} \eta_1 + \frac{14}{30} \eta_2$$

et la coordonnée sur Y est donc :

$$\frac{1,2243}{20} - \frac{14 \times 0,8168}{30} = -0,3200$$

On établit de la même manière que la coordonnée de  $P_1(\delta_2)$  sur  $Y$  est  $-0,2314$  et celle de  $P_1(\delta_3)$  :  $1,0747$ . Les points se placent donc sur l'axe  $Y$  dans un ordre conforme aux relations qui existent entre les éléments des ensembles  $I$  et  $J$ .

Analyse des correspondances



### III - GENERALISATION A DES ALEAS VECTORIELS

III<sub>1</sub>. Nous nous proposons dans ce paragraphe de généraliser l'analyse canonique à des aléas vectoriels. Au lieu de considérer comme en I des vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  dont les composantes  $X_1^i$  et  $X_2^j$  sont des variables aléatoires centrées sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , nous supposons maintenant que  $X_1$  et  $X_2$  sont des familles de vecteurs aléatoires centrés sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ; c'est dire que les  $X_1^i$  et  $X_2^j$  sont des vecteurs aléatoires. Les composantes des vecteurs seront supposées de variances finies ( $X^{i,k} \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ).

Soit  $X^{i,k}$ , la  $k^{\text{ième}}$  composante du  $i^{\text{ième}}$  vecteur de la famille  $\alpha$ ; ( $\alpha = 1, 2$ ;  $i = 1, \dots, n_\alpha$ ;  $k = 1, \dots, n_\alpha^i$ ). Dans un travail précédent [5], nous avons associé au vecteur  $X_\alpha^i$ , l'opérateur  $V_\alpha^i$  de  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$  en lui-même, défini par :

$$V_\alpha^i(Y) = \frac{1}{n_\alpha^i} \sum_{k=1}^{n_\alpha^i} E(X_\alpha^{i,k} Y) X_\alpha^{i,k}.$$

L'intérêt de cet opérateur réside, pour une part, dans les propriétés suivantes, dont on trouvera les démonstrations dans le travail cité.

Propriété III<sub>1,a</sub>: L'opérateur  $V_\alpha^i$  a les mêmes vecteurs propres que l'opérateur  $\Lambda_\alpha^i$  défini par la matrice des variances et covariances du vecteur  $X_\alpha^i$ ; ses valeurs propres sont égales à celles de  $\Lambda_\alpha^i$  divisées par  $n_\alpha^i$ .

Dans la mesure donc, où les éléments propres de  $\Lambda_\alpha^i$  sont caractéristiques de  $X_\alpha^i$ ,  $V_\alpha^i$  est caractéristique de ce dernier vecteur.

Propriété III<sub>1,b</sub>: L'opérateur  $V_\alpha^i$  appartient à la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt (la somme des carrés des valeurs propres est finie) et, sur cette classe, on peut définir un produit scalaire qui la munit d'une structure d'espace de Hilbert.

En particulier, on en déduit une distance entre opérateur qui est nulle si et seulement si les deux opérateurs en cause ont les mêmes éléments propres.

**Propriété III<sub>1,c</sub>** : Pour deux opérateurs  $V_\alpha^i$  et  $V_\beta^j$ , ce produit scalaire peut s'écrire :

$$\langle V_\alpha^i, V_\beta^j \rangle = \frac{\sum_{k=1}^{n_\alpha^i} \sum_{l=1}^{n_\beta^j} [E(X_\alpha^{i,k} X_\beta^{j,l})]^2}{n_\alpha^i n_\beta^j}$$

Appelons H la classe des opérateurs de Hilbert-Schmidt. En identifiant les  $X_\alpha^i$  aux opérateurs  $V_\alpha^i$  qui leur sont associés, nous pouvons énoncer le problème de l'analyse canonique pour des aléas vectoriels de la manière suivante :

Trouver U de norme unité dans le sous-espace de H engendré par les  $V_1^i$  ( $i = 1, \dots, n_1$ ) et V de norme unité dans le sous-espace de H engendré par les  $V_2^j$  ( $j = 1, \dots, n_2$ ) tel que  $\langle U, V \rangle$  soit maximum.

Ce problème qui est exactement le même que celui que nous avons posé en I nous conduira aux mêmes solutions à savoir les éléments propres de la matrice  $\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}$  dans laquelle :

$$(\Sigma_{11})_{kl} = \langle V_1^k, V_1^l \rangle$$

$$(\Sigma_{12})_{kl} = (\Sigma_{21})_{lk} = \langle V_1^k, V_2^l \rangle$$

et :

$$(\Sigma_{22})_{kl} = \langle V_2^k, V_2^l \rangle$$

**III<sub>2</sub>. Exemple.** Pour illustrer ce paragraphe, nous avons retenu une famille  $X_1$  de trois vecteurs  $X_1^1, X_1^2$  et  $X_1^3$  ayant chacun trois composantes ;  $X_2$  est une famille de trois vecteurs à deux composantes chacun.  $X_\alpha^i$  ( $\alpha = 1, 2$  ;  $i = 1, 2, 3$ ) est le vecteur des notes obtenues par un étudiant pour la matière i pendant l'année  $\alpha$ .

Nous nous proposons d'étudier globalement les liaisons entre les ensembles de notes  $X_2^1, X_2^2, X_2^3$  et leur influence sur les ensembles  $X_1^1, X_1^2, X_1^3$  sur la base d'une population de 110 étudiants.

La matrice  $\Sigma$  est donnée par la table III<sub>2,a</sub> :

Table III<sub>2,a</sub>

	$X_1^1$	$X_1^2$	$X_1^3$	$X_2^1$	$X_2^2$	$X_2^3$
$X_1^1$	0,3918					
$X_1^2$	0,0678	0,4051				
$X_1^3$	0,0746	0,0667	0,4227			
$X_2^1$	0,1603	0,0782	0,0645	0,6235		
$X_2^2$	0,0508	0,0198	0,0190	0,0285	0,5040	
$X_2^3$	0,1276	0,1349	0,1471	0,0558	0,0189	0,5964

On en déduit successivement :

$$\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} = \begin{pmatrix} 0,2366 & 0,1050 & 0,0811 \\ 0,0803 & 0,0253 & 0,0242 \\ 0,1893 & 0,2156 & 0,2383 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0,3767 & 0,1219 & 0,2355 \\ 0,1199 & 0,0256 & 0,2535 \\ 0,0614 & 0,0177 & 0,2434 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 0,1067 & 0,0330 & 0,1020 \\ 0,0348 & 0,0109 & 0,0312 \\ 0,1118 & 0,0328 & 0,1572 \end{pmatrix}$$

La table III<sub>2,b</sub> donne les vecteurs propres normés au sens du produit scalaire que nous avons défini :

V <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	V <sub>3</sub>
0,7285	0,9346	0,4953
0,2314	0,3838	- 1,3316
0,9571	- 0,8839	- 0,0875

Il faut comprendre :  $V_1 = 0,7285 X_2^1 + 0,2314 X_2^2 + 0,9571 X_2^3$ .

Notons que les valeurs propres sont respectivement 0,2510 ; 0,0238 et 0. On peut en déduire déjà que la liaison entre les deux familles de vecteurs est assez faible.

En inversant la matrice des coefficients des V<sub>i</sub> sur les X<sub>2</sub><sup>j</sup>, on obtient les coefficients des X<sub>2</sub><sup>j</sup> sur les V<sub>i</sub>. La table III<sub>2,c</sub> les fournit :

Table III<sub>2,c</sub>

X <sub>2</sub> <sup>1</sup>	X <sub>2</sub> <sup>2</sup>	X <sub>2</sub> <sup>3</sup>
0,5212	0,1435	0,6134
0,5343	0,2362	- 0,4638
0,2445	- 0,6578	- 0,0271

Il faut comprendre :  $X_2^1 = 0,5212 V_1 + 0,5343 V_2 + 0,2445 V_3$ .

On peut également calculer les coordonnées de P<sub>1</sub>(X<sub>1</sub><sup>1</sup>)<sub>1,2,3</sub> sur les axes V<sub>1</sub>, V<sub>2</sub>, V<sub>3</sub>.

Pour les deux premiers axes, les résultats sont consignés dans la table III<sub>2,d</sub> :

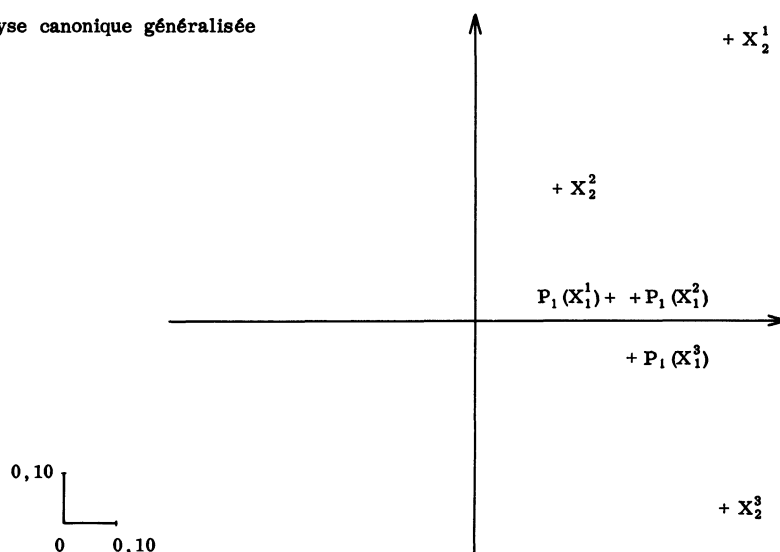
Table III 2. d

	$P_1(X_1^1)$	$P_1(X_1^2)$	$P_1(X_1^3)$
$V_1$	0,2510	0,1906	0,1919
$V_2$	0,0576	0,0379	-0,0615

Que peut-on déduire d'une représentation des points correspondant aux  $X_2^1$  et au  $P_1(X_1)$  dans un plan rapporté à  $V_1$  et  $V_2$  ?

On peut voir tout d'abord que les vecteurs  $X_2^1$ ,  $X_2^2$  et  $X_2^3$  sont peu liés entre eux puisque des liaisons étroites se traduiraient par une grande proximité de ces points. On constate également que les points représentant  $P_1(X_1^1)$ ,  $P_1(X_1^2)$  et  $P_1(X_1^3)$  restent assez éloignés des points représentant  $X_2^1$ ,  $X_2^2$ ,  $X_2^3$  : c'est dire que ces derniers expliquent peu les précédents. On perçoit toutefois l'influence prépondérante de  $X_2^3$  dans  $P_1(X_1^3)$  et celle de  $X_2^1$  dans  $P_1(X_1^1)$  par leur position par rapport à l'axe  $V_1$ .

Analyse canonique généralisée



#### IV - CONCLUSION

A une époque où le nombre des données disponibles augmente sans cesse, la méthode proposée dans la troisième partie de ce travail peut permettre des traitements qui ne supposent ni choix effectués sans critères objectifs parmi les variables, ni réduction de l'information disponible par passage à des moyennes ou autres caractéristiques.

De plus, il paraît certain qu'un raisonnement analogue permettra une généralisation de toutes les méthodes d'analyse multidimensionnelle à des familles de vecteurs. C'est dans ce sens que nous travaillons.

Je tiens à remercier M. Le Professeur B. CHARLES de l'aide morale et technique qu'il m'a sans cesse apporté ; sans lui ce travail n'aurait pas été possible.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] T.W. ANDERSON - An Introduction to multivariate statistical analysis .  
John Xiley and Sons, 1958.
- [2] J.P. BENZECRI - Distance distributionnelle et métrique du  $\chi^2$  en Analyse factorielle des correspondances. Polycopié, 1970.
- [3] B. CORDIER - L'analyse factorielle des correspondances - Thèse de Doctorat de 3ème cycle - Université de Rennes, 1965.
- [4] B. ESCOFFIER (CORDIER) - Sur l'Analyse des correspondances. Note polycopiée, 1970.
- [5] Y. ESCOUFIER - Echantillonnage dans une population de variables aléatoires réelles - Thèse de Doctorat d'Etat - Université de Montpellier. 1970.