
Y. ESCOUFIER (*)

L'Analyse des tableaux de contingence simples et multiples

SOMMAIRE: 1. Rappel sur l'analyse en composantes principales. — 2. Analyse des correspondances d'une table de contingence. — 3. L'analyse des correspondances multiples. — 4. Conclusions. Bibliographie. Résumé. Summary.

I. RAPPEL SUR L'ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES.

I.1. Tout exposé devant posséder un point de départ, nous considérons connue la formulation matricielle de l'Analyse en Composantes Principales (A.C.P.) d'une matrice de données centrées X , $p \times n$, constituée des mesures de p variables faites sur n individus munis des mêmes poids égaux à $\frac{1}{n}$. Le lecteur pourra se rapporter à [Rao, 1965] pour les démonstrations. X^j sera le vecteur (colonne) de R^p des p mesures faites sur l'individu j . X_i sera le vecteur (ligne) de R^n des n observations de la variable i .

Soit $\frac{XX'}{n}$ la matrice de variance; nous la supposons de rang $q \leq p$.

La réalisation d'une A.C.P. peut être schématiser comme suit:

1) Calculer les vecteurs propres (Z^i ; $i = 1, \dots, q$) de $\frac{XX'}{n}$:

$$\forall i = 1, \dots, q : \frac{XX'}{n} Z^i = \lambda_i Z^i \quad \text{avec } (Z^i)' Z^j = \delta_{ij} \lambda_i$$

$$\text{et } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q > 0$$

2) Calculer les composantes principales:

$$\forall i = 1, \dots, q : Y_i = \frac{(Z^i)' X}{|\lambda_i|}$$

On peut alors établir les propriétés suivantes:

$$3) \forall i = 1, \dots, q : \frac{X' X}{n} Y_i = \lambda_i Y_i \text{ avec } \frac{Y_i' Y_j}{n} = \delta_{ij} \lambda_i$$

$$4) \forall i = 1, \dots, q : Z^i = \frac{X Y_i'}{n |\lambda_i|}$$

$$5) \left\| X - \sum_{i=1}^r \frac{Z^i Y_i}{|\lambda_i|} \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i$$

$$\text{et } \left\| \frac{X X'}{n} - \sum_{i=1}^r Z^i (Z^i)' \right\|^2 = \left\| \frac{X' X}{n} - \sum_{i=1}^r \frac{(Y_i)' Y_i}{n} \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i^2$$

Remarque: Nous notons Z^i , un vecteur de R^p analogue à un individu et Y_i , un vecteur de R^n analogue à une variable. Dans le vocabulaire français de l'Analyse de données, Z^i est le i ème axe principal; Y_i est la i ème composante principale. On peut aussi identifier les vecteurs $\left(L^i = \frac{Z^i}{|\lambda_i|}; i = 1, \dots, q \right)$; ce sont les facteurs principaux: d'après le second résultat, ils définissent les combinaisons linéaires à appliquer aux données initiales pour trouver les composantes principales.

1.2. Pour être capable de prendre en compte des individus munis de poids différents, nous introduisons une matrice diagonale positive D , $n \times n$, dont l'élément D_{ii} est le poids de l'individu i . On suppose que $\text{Trace}(D) = 1$ et que les lignes de X sont centrées par rapport à ces poids. La matrice de variance est maintenant $X D X'$ supposée de rang $q \leq p$. On peut alors réécrire les cinq lignes précédentes; on obtient:

$$1) \forall i = 1, \dots, q : X D X' Z^i = \lambda_i Z^i \text{ avec } (Z^i)' Z^j = \delta_{ij} \lambda_i \\ \text{et } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q > 0$$

$$2) \forall i = 1, \dots, q : Y_i = \frac{(Z^i)' X}{|\lambda_i|}$$

$$3) \forall i = 1, \dots, q : X' X D Y_i' = \lambda_i Y_i' \text{ avec } Y_i' D Y_j' = \delta_{ij} \lambda_i$$

$$4) \forall i = 1, \dots, q : Z^i = \frac{X D Y_i}{|\lambda_i|}$$

$$5) \text{ i) } \left\| X D^{1/2} - \sum_{i=1}^r \frac{Z^i Y_i D^{1/2}}{|\lambda_i|} \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i$$

$$\text{ii) } \left\| X D X' - \sum_{i=1}^r Z^i (Z^i)' \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i^2$$

$$\text{iii) } \left\| X' X D - \sum_{i=1}^r (Y_i)' Y_i D \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i^2$$

Remarque: La présence de la matrice D détruit la symétrie du problème. Si pour $r = q$, on peut encore écrire:

$$X = \sum_{i=1}^q \frac{Z^i Y_i}{|\lambda_i|}$$

et

$$X' X = \sum_{i=1}^q (Y_i)' Y_i$$

pour $r < q$, les formules d'approximation 5 i) et 5 iii) portant sur $X D^{1/2}$ et $X' X D$ et non X et $X' X$.

1.3. Envisageons maintenant le cas d'une transformation linéaire M , inversible, appliquée à la matrice des données X et écrivons l'A.C.P. de la matrice $M X$. Pour simplifier l'écriture nous poserons $Q = M' M$. Les deux premières lignes des résultats deviennent:

$$1) \forall i = 1, \dots, q : M X D X' M' U^i = \lambda_i U^i \text{ avec } (U^i)' U^j = \delta_{ij} \lambda_i$$

$$2) \forall i = 1, \dots, q : Y_i = \frac{(U^i)' M X}{|\lambda_i|}$$

On peut introduire les vecteurs $(Z^i = M^{-1} U^i; i = 1, \dots, q)$ et en déduire:

$$1') \forall i = 1, \dots, q : X D X' Q Z^i = \lambda_i Z^i \text{ avec } (Z^i)' Q Z^j = \delta_{ij} \lambda_i$$

$$2') \forall i = 1, \dots, q : Y_i = \frac{(Z^i)' Q X}{|\lambda_i|}$$

Remarque: Pour le cas où on voudrait considérer une matrice Q qui ne serait pas de plein rang, on se ramène aux résultats précédents en écrivant $Q = N \Delta N'$ où N est une matrice inversible et Δ une matrice diagonale possédant un nombre d'éléments diagonaux strictement positifs égal à son rang, les autres éléments diagonaux étant nuls. Tout ce qui est écrit reste vrai avec q égal au rang de $XDX'Q$.

On en déduit:

$$3) \forall i = 1, \dots, q : X' Q X D Y_i' = \lambda_i Y_i' \text{ avec } Y_i D Y_i' = \delta_{ij} \lambda_i$$

$$4) \forall i = 1, \dots, q : Z^i = \frac{X D Y_i'}{\sqrt{\lambda_i}}$$

$$5) \text{ i) } \left\| M X D^{1/2} - \sum_{i=1}^r \frac{M Z^i Y_i D^{1/2}}{\sqrt{\lambda_i}} \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i$$

$$\text{ii) } \left\| X D X' Q - \sum_{i=1}^r Z^i (Z^i)' Q \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i^2$$

$$\text{iii) } \left\| X' Q X D - \sum_{i=1}^r (Y_i)' Y_i D \right\|^2 = \sum_{i=r+1}^q \lambda_i^2$$

Remarque: Comme précédemment, les approximations obtenues pour $r < q$ font intervenir les matrices M et D bien que pour $r = q$, on ait:

$$X = \sum_{i=1}^q \frac{Z^i Y_i}{\sqrt{\lambda_i}}$$

$$X D X' = \sum_{i=1}^q Z^i (Z^i)' \text{ et } X' Q X = \sum_{i=1}^q (Y_i)' Y_i.$$

Les Z^i qui permettent la reconstruction de la matrice de variance XDX' sont les axes principaux. Les composantes principales Y_i permettent la reconstruction de la matrice $X'QX$ des produits scalaires entre individus. Les combinaisons linéaires des données initiales qu'il faut prendre pour obtenir les composantes principales sont définies en 2' par $(L^i = \frac{Q Z^i}{\sqrt{\lambda_i}}; i = 1, \dots, q)$: ce sont les facteurs principaux: on peut noter que $(L^i)' Q^{-1} L^j = \delta_{ij}$.

Une telle A.C.P. qui fait intervenir X , Q et D sera appelée par la suite A.C.P. du triplet (X, Q, D) .

II. ANALYSE DES CORRESPONDANCES D'UN TABLEAU DE CONTINGENCE.

III 1. Notations et Enoncé du problème.

Soit P un tableau de contingence croisant les modalités d'une variable I avec celles d'une variable J . Identifiant les variables et le nombre de leurs modalités nous dirons que P est de dimension $I \times J$.

Définissons D_I , la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les poids marginaux des lignes de P . D_J est de la même manière associée aux colonnes de P . On a $Tr(D_I) = Tr(D_J) = 1$.

$$\text{Posons } X = D_I^{-1} P D_J^{-1}$$

Si 1_J est le vecteur $1 \times J$ d'éléments tous égaux à l'unité et $J_{J \times J}$ la matrice identité d'ordre J , le centrage des lignes de X par rapport aux poids D_J donne:

$$\hat{X} = X (J_{J \times J} - D_J 1_J 1_J) = X - 1_I 1_J$$

Remarques: On vérifie aisément les résultats suivants:

$$\hat{X} D_J 1_J' = 0; 1_J D_J 1_J' = 1; 1_I D_I 1_I' = 1$$

$$X D_J 1_J' = 1_I'; X' D_I 1_I' = 1_J'$$

Définition: On appelle Analyse des correspondances du tableau de contingence P , l'A.C.P. du triplet (\hat{X}, D_I, D_J) .

La justification intuitive de cette définition repose sur le choix des distances entre les modalités de I d'une part et celles de J d'autre part auquel conduit le triplet. En effet, calculons la distance entre deux modalités du I ; on a:

$$\begin{aligned} d^2(i, i') &= (\hat{X}_i - \hat{X}_{i'}) D_J (\hat{X}_i - \hat{X}_{i'})' \\ &= (X_i - X_{i'}) D_J (X_i - X_{i'})' \\ &= \sum_{j=1}^J P_{.j} \left(\frac{P(i, j)}{P_i \cdot P_{.j}} - \frac{P(i', j)}{P_{i'} \cdot P_{.j}} \right)^2 \\ &= \sum_{j=1}^J \frac{\left(\frac{P(i, j)}{P_i} - \frac{P(i', j)}{P_{i'}} \right)^2}{P_{.j}} \end{aligned}$$

Autrement dit la distance entre deux modalités i et i' est la distance du χ^2 de centre de la loi marginale $(P_{.j}; j = 1, \dots, J)$ calculée entre

les lois conditionnelles $(P(j/i); j=1, \dots, J)$ et $(P(j/i'); j=1, \dots, J)$. On a bien évidemment un résultat analogue pour $d^2(j, j')$.

On montre que ces distances jouissent de la propriété d'équivalence distributionnelle (voir par exemple Lebart, Morineau, Fenelon (1979)) c'est-à-dire que le regroupement de deux lignes (resp. 2 colonnes) proportionnelles ne modifie pas la distance entre 2 colonnes (resp. 2 lignes).

II.2. Propriétés de l'A.C.P. de (\hat{X}, D_I, D_J) .

Propriété 1: L'A.C.P. du triplet (\hat{X}, D_I, D_J) est équivalente à l'A.C.P. du triplet (\hat{X}', D_J, D_I) au sens où:

les axes principaux de (\hat{X}, D_I, D_J) sont les composantes principales de (\hat{X}', D_J, D_I) .

Les composantes principales de (\hat{X}, D_I, D_J) sont les axes principaux de (\hat{X}', D_J, D_I) .

Démonstration et commentaires: Le résultat provient du fait que \hat{X} qui a été centrée en ligne pour D_J se trouve centrée en colonnes pour D_I . Les équations qui conduisent aux axes principaux et aux composantes principales se correspondent parfaitement d'une étude à l'autre. Il en résulte que les résultats pourront être indifféremment obtenus par l'une ou l'autre des études: par exemple les axes principaux de (\hat{X}, D_I, D_J) fourniront une représentation des modalités de I ; les composantes principales de la même étude fourniront une représentation des modalités de J .

Propriété 2:

a) Le vecteur 1_J est composante principale de (\hat{X}, D_I, D_J) pour la valeur propre 0 et composante principale de (X, D_I, D_J) pour la valeur propre 1.

b) Si $Y_i \neq 1_J$ est composante principale de (\hat{X}, D_I, D_J) pour la valeur propre λ_i , il est composante principale de (X, D_I, D_J) pour la même valeur propre. Y_i est centrée pour D_J .

Démonstration et commentaires: le calcul permet de vérifier que:

$$\hat{X}' D_I \hat{X} D_J = X' D_I X D_J - 1_J' 1_J D_J$$

Les remarques du paragraphe II.1 établissent alors la partie a) de la propriété.

Pour établir la partie b), il suffit de se rappeler que d'après le paragraphe I, $1_J D_J Y_i' = 0$.

L'intérêt pratique de cette propriété est de permettre de limiter l'étude à (X, D_I, D_J) . On obtiendra une composante principale 1_J dont on ne tiendra pas compte puisque dans l'étude (\hat{X}, D_I, D_J) elle est associée à la valeur propre 0.

La symétrie en I et J du problème permet d'assurer que les axes principaux de (\hat{X}, D_I, D_J) sont ceux de (X, D_I, D_J) mis à part un axe principal 1_I associé à la valeur propre 0 dans la première étude et à la valeur propre 1 dans la seconde.

On a $1_I D_I Z^i = 0$, c'est-à-dire que les axes principaux sont centrés pour les poids D_I .

On voit aisément que le nombre des valeurs propres strictement positives de l'étude (X, D_I, D_J) ne peut dépasser le plus petit des nombres I et J , la valeur propre 1 étant prise en compte. Nous désignerons par la suite le nombre des valeurs propres différentes de 1 et de 0 par q .

Propriété 3: Soit Y_k^j la valeur de la composante principale k pour la modalité j de la variable J et Z_i^k la valeur de l'axe principal k pour la modalité i de la variable I , on a:

$$Y_k^j = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{i=1}^I Z_i^k \frac{P(i, j)}{P_j}$$

$$Z_i^k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^J Y_k^j \frac{P(i, j)}{P_i}$$

Démonstration et commentaires. Le résultat s'obtient en particulierisant à (X, D_I, D_J) les résultats 2' et 4 du paragraphe I.3.

Il signifie, par exemple pour Y_k^j , que au facteur $\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$ près, la coordonnée Y_k^j est le centre de gravité des coordonnées Z_i^k lorsqu'on affecte ces coordonnées des poids $\frac{P(i, j)}{P_j}$. En décidant de représenter les modalités de J par les éléments de $\sqrt{\lambda_k} Y_k$ et celles de I par ceux de Z^k , on obtient donc une représentation qui permet d'interpréter la proximité d'une modalité de J et celle d'une modalité de I en terme des probabilités conditionnelles $P(i, j) / P_j$.

Corollaire Pour tout $k = 1, \dots, q, \lambda_k < 1$

Démonstration: Supposer $\lambda_k > 1$ entraîne que les $\sqrt{\lambda_k} Y_k^j$ et donc les Y_k^j sont strictement à l'intérieur de l'intervalle couvert par les Z_i^k et que $\sqrt{\lambda_k} Z_i^k$ et donc les Z_i^k sont strictement à l'intérieur de l'intervalle couvert par les Y_k^j . Cette double inclusion étant impossible, le résultat est démontré.

Propriété 4:

$$P = D_I \underset{\circ}{1}_I \underset{\circ}{1}_J + \sum_{k=1}^q \frac{Z^k Y_k}{\sqrt{\lambda_k}} D_J$$

Démonstration et commentaires: Dans le cas général (remarque du paragraphe I.3), on a vu que $X = \sum_{k=1}^q \frac{Z^k Y_k}{\sqrt{\lambda_k}}$. La formule précédente s'obtient par application de ce résultat général à l'étude (X, D_I, D_J) , en se rappelant que $\underset{\circ}{1}_J$ (resp. $\underset{\circ}{1}_I$) est vecteur propre de $X' D_I X D_I$ (resp. $X D_J X' D_I$) pour la valeur propre 1.

II.3. Aides à l'interprétation.

La littérature française a pris l'habitude de rassembler sous ce titre un certain nombre de coefficients et de procédés qui permettent de mieux comprendre les résultats fournis par l'A.C.P. du triplet (X, D_I, D_J) .

II.3.a. Critères globaux.

Il résulte des résultats 5 du paragraphe I.3 que les quantités $\sum_{i=1}^r \lambda_i / \sum_{i=1}^q \lambda_i$ et $\sum_{i=1}^r \lambda_i^2 / \sum_{i=1}^q \lambda_i^2$ peuvent s'interpréter comme des indices de la qualité de l'approximation faite en se limitant aux r premiers axes principaux et composantes principales. Le résultat suivant donne au premier critère une signification particulière.

Propriété 5: Soit n l'effectif total sur lequel le tableau de contingence a été calculé. Alors, sous l'hypothèse de l'indépendance des deux variables $\left(n \times \sum_{i=1}^q \lambda_k\right)$ est distribué comme un chi-deux à $(I-1) \times (J-1)$ degrés de liberté.

Démonstration et commentaires. Ecrivons la propriété 4 pour un élément $P(i, j)$ du tableau P ; on a:

$$P(i, j) = P_i \cdot P_j \left(1 + \sum_{k=1}^q \frac{Z_i^k Y_k^j}{\sqrt{\lambda_k}}\right)$$

d'où

$$\frac{P(i, j) - P_i \cdot P_j}{\sqrt{P_i \cdot P_j}} = \sqrt{P_i \cdot P_j} \sum_{k=1}^q \frac{Z_i^k Y_k^j}{\sqrt{\lambda_k}}$$

En remarquant que

$$\sum_{i=1}^I P_i \cdot Z_i^k Z_i^l = \sum_{j=1}^J P_j Y_k^j Y_l^j = \delta_{kl} \lambda_k$$

on a

$$\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \frac{(P(i, j) - P_i \cdot P_j)^2}{P_i \cdot P_j} = \sum_{k=1}^q \lambda_k$$

ce qui établit le résultat.

La quantité $\sum_{k=1}^r \lambda_k / \sum_{k=1}^q \lambda_k$ s'interprète alors comme la part de la différence entre le tableau P et le tableau obtenu sous l'hypothèse d'indépendance qui est expliquée par les r premiers axes principaux et composantes principales.

II.3.b. Critères individuels.

Les axes principaux permettront une représentation des modalités de I . Les composantes principales permettront une représentation des modalités de J . Les critères précédents donnent une idée globale de la qualité de la représentation mais ne disent pas si telle modalité de I ou de J est bien représentée pas plus qu'ils ne disent l'importance de telle modalité de I ou de J dans la détermination des axes principaux et des composantes principales. Pour obtenir de tels renseignements, on fait la remarque suivante:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(X D_J X' D_I) &= 1 + \sum_{k=1}^q \lambda_k = 1 + \sum_{k=1}^q \text{Tr}(Z^k (Z^k)' D_I) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^I P_i \cdot (Z_i^k)^2 \end{aligned}$$

On est alors conduit à considérer:

$\frac{P_i \cdot (Z_i^k)^2}{\lambda_k}$: Contribution de la modalité i de la variable I à la valeur propre λ_k . C'est une mesure de l'importance de cette modalité dans la détermination de l'axe. Elle reçoit le nom de contribution absolue de la modalité à l'axe.

$\frac{P_i \cdot (Z_i^k)^2}{\sum_{i=1}^q P_i \cdot (Z_i^k)^2} = \frac{(Z_i^k)^2}{\sum_{i=1}^q (Z_i^k)^2}$: Contribution de l'axe principal k à la reconstruction de la modalité i de I . Analogue au carré d'un cosinus, cette quantité reçoit le nom de contribution relative de l'axe k à la modalité i de I . Elle permet de savoir si la modalité est bien représentée.

On a de même:

$\frac{P_j \cdot (Y_j^k)^2}{\lambda_k}$: Contribution absolue de la modalité j de J à la composante principale k .

$\frac{(Y_j^k)^2}{\sum_{i=1}^q (Y_i^k)^2}$: Contribution relative de la composante principale k à la modalité j de J .

L'étude de ces quantités est très importante en particulier quand les poids marginaux sont très différents car la seule étude visuelle des représentations peut conduire à des erreurs d'interprétation.

II.3.c. Points supplémentaires.

L'utilisation de points supplémentaires est une pratique qui s'avère particulièrement riche pour interpréter les résultats d'une analyse des correspondances. Le principe, qui est valable également en A.C.P., découle d'une réflexion sur la formule:

$$\forall_k = 1, \dots, q : Z^k = \frac{X D_j Y'_k}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{D_I^{-1} P Y'_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

$D_I^{-1} P$ est le tableau des lois conditionnelles des modalités de J lorsqu'on conditionne par les modalités de I . Soit alors N un tableau de contin-

gence croisant une variable qualitative K avec la variable J ; le calcul de:

$$\frac{D^{-1} N Y'_k}{\sqrt{\lambda_k}}$$

permettra de représenter les modalités de la variable K .

L'expression $Z^k = \frac{X D_j Y'_k}{\sqrt{\lambda_k}}$ permet d'interpréter les $\sqrt{\lambda_k} Z_i^k$ comme des covariances entre la composante principale Y_k et les lignes de X lorsque les modalités de J sont affectés des poids D_j .

Cette remarque permettra de donner un sens à la représentation obtenue pour les modalités de la variable K . Elle peut également conduire à représenter une variable quantitative X_0 définie sur les modalités de J , par l'unique point $Z_0^k = \frac{X_0 D_j Y'_k}{\sqrt{\lambda_k}}$. Si X_0 est réduite, Z_0^k s'interprète comme une corrélation.

On a, bien évidemment, des propriétés symétriques en raisonnant avec

$$\forall_k = 1, \dots, q : Y_k = \frac{(Z^k)' D_I X}{\sqrt{\lambda_k}} = \frac{(Z^k)' P D_J^{-1}}{\sqrt{\lambda_k}}$$

II.4. Exemple.

Nous prendrons pour exemple un tableau de contingence étudié par L.A. Goodman (1979). Ce tableau de dimensions 4×6 a l'avantage

TABLEAU I

CROSS-CLASSIFICATION OF SUBJECTS ACCORDING TO THEIR MENTAL HEALTH AND THEIR PARENTS' SOCIOECONOMIC STATUS

Mental Health Status	Parents' Socioeconomic Status					
	A	B	C	D	E	F
Well.	64	57	57	72	36	21
Mild Symptom Formation.	94	94	105	141	97	71
Moderate Symptom Formation	58	54	65	77	54	54
Impaired	46	40	60	94	78	71

d'être de dimensions raisonnablement petites ce qui facilite sa présentation. De plus les résultats obtenus pourront être comparés aux résultats qu'obtient L.A. Goodman par une approche différente.

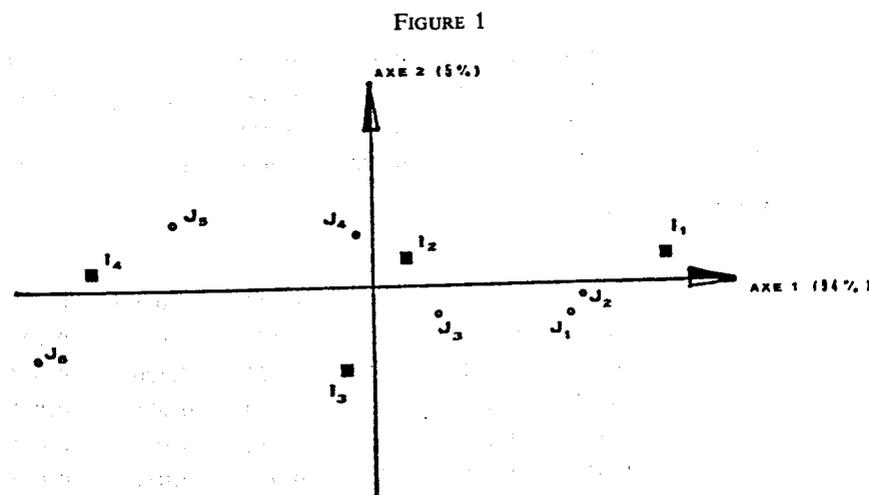
Le tableau est donné sous la forme d'un tableau d'effectifs. On vérifiera que l'effectif total est égal à 1660 individus. On peut alors calculer le tableau des fréquences. Le tableau n'ayant que 4 lignes, la méthode fournira 3 valeurs propres, 3 axes principaux et 3 composantes principales en plus des solutions triviales associées à la valeur propre 1. Ces éléments sont fournis dans le tableau n. 2:

TABLEAU 2

Valeurs propres		0,0260	0,0014	0,0003
Pourcentage		94%	5%	1%
Axes principaux (coordonnées des modalités de I)	I_1	0,260	0,012	0,023
	I_2	0,030	0,024	— 0,019
	I_3	— 0,013	— 0,069	— 0,002
	I_4	— 0,236	0,019	0,016
Composantes principales (coordonnées des modalités de J)	J_1	0,181	— 0,018	0,028
	J_2	0,185	— 0,011	— 0,026
	J_3	0,059	— 0,021	— 0,010
	J_4	— 0,008	0,042	0,011
	J_5	— 0,164	0,044	— 0,009
	J_6	— 0,287	— 0,061	0,005

En arrondissant les valeurs propres au 4ième chiffre après la virgule on trouve une somme de 0,0277 d'où un chi-deux de 45,98 très largement significatif. On est donc conduit à penser que les variables ne sont pas indépendantes et il est logique d'étudier la nature des dépendances. Pour y parvenir, étudions les représentations des modalités de I et de J fournis par les deux premiers axes principaux et par les deux premières composantes principales. Selon la pratique usuelle identifions l'axe horizontal à Z^1 et Y_1 et l'axe vertical à Z^2 et Y_2 ce qui permet d'avoir simultanément les représentations des modalités de I et de J . Notons que, représentant la modalité i de I par le point de coordonnées (Z_i^1, Z_i^2)

et la modalité j de J par le point de coordonnées (Y_1^j, Y_2^j) , on n'a pas ici la propriété de centre de gravité. La figure 1 donne cette représentation.



Nous rapportant au tableau des contributions (Tableau n. 3) nous pouvons faire les remarques suivantes:

a) l'axe principal n. 1 est dû essentiellement à l'opposition des modalités 1 et 4 de I , tandis que l'axe principal n. 2 est dû essentiellement à la modalité 3 de cette variable.

De même la composante principale n. 1 est déterminée par une opposition des modalités 1 et 2 aux modalités 5 et 6 de la variable J , tandis que la composante principale n. 2 est due essentiellement aux modalités 4, 5, 6 de J .

b) On pourra s'étonner de voir que la modalité 3 de J qui est bien représentée sur la composante principale 1 (contribution relative égale à 0,852) contribue si peu à la définition de cette composante (contribution absolue égale à 0,023). Un retour aux données montre que ceci vient de ce que le vecteur des probabilités conditionnelles $\left(\frac{P(i, 3)}{P_i} : i = 1, \dots, 4\right)$ est très voisin du vecteur des probabilités marginales $(P_i : i = 1, \dots, 4)$. On peut dire que ce n'est pas pour cette modalité de J que se font les écarts significatifs à l'hypothèse d'indépendance des deux variables.

TABLEAU 3

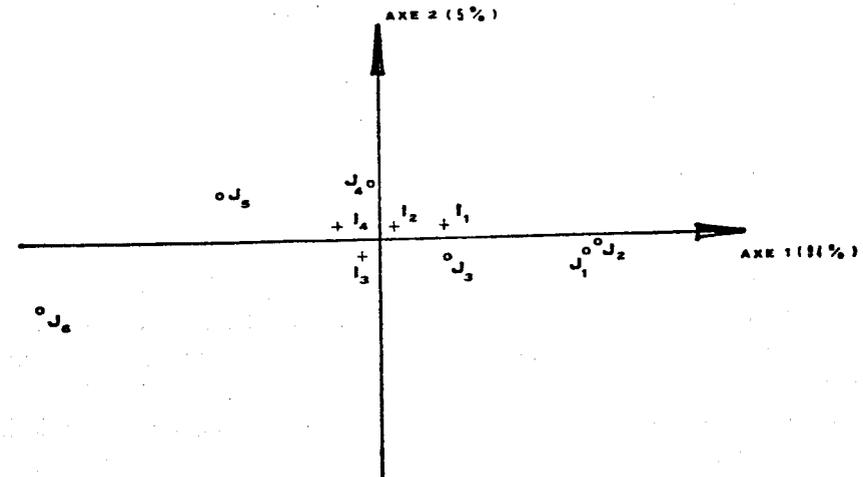
Axes principaux	Contributions absolues			Contributions relatives		
	1	2	3	1	2	3
I_1	0,479	0,020	0,317	0,990	0,002	0,008
I_2	0,012	0,147	0,478	0,479	0,306	0,215
I_3	0,002	0,773	0,008	0,040	0,958	0,002
I_4	0,507	0,061	0,198	0,989	0,006	0,004
Composantes principales	1	2	3	1	2	3
J_1	0,199	0,042	0,401	0,967	0,011	0,022
J_2	0,194	0,014	0,371	0,975	0,004	0,021
J_3	0,023	0,062	0,065	0,852	0,120	0,027
J_4	0,001	0,297	0,094	0,040	0,898	0,062
J_5	0,168	0,220	0,058	0,932	0,065	0,004
J_6	0,416	0,364	0,010	0,955	0,044	0,000

c) On a un phénomène un peu analogue mais moins net pour la seconde modalité de I . Certes ici la contribution absolue pour le troisième axe principal n'est pas négligeable (0,478), mais la valeur propre correspondante ne représente que 1% du Chi-deux ce qui minimise beaucoup la signification qu'on pourrait attacher à cette contribution.

d) On peut aussi remarquer la similitude de comportement des modalités 1 et 2 de J : points représentatifs voisins, contributions absolues et relatives presque égales. Un retour au tableau de données montre que ceci s'explique par le peu de différences des vecteurs $\left(\frac{P(i, 1)}{P_{.1}} : i = 1, \dots, 4\right)$ et $\left(\frac{P(i, 2)}{P_{.2}} : i = 1, \dots, 4\right)$

Regardons maintenant la représentation obtenue en prenant $(\sqrt{\lambda_1} Z_i^1, \sqrt{\lambda_2} Z_i^2)$ pour la modalité i de I et (Y_1^j, Y_2^j) pour la modalité j de J (Figure n. 2). Cette représentation place les modalités de I au centre de gravité des modalités de J affectés des poids $\frac{P(i, j)}{P_{.i}}$.

FIGURE 2



On voit bien sûr le nuage des points représentant les modalités de I se contracter. Les premières modalités de I restent du côté des premières modalités de h et inversement les dernières modalités de I restent du côté des dernières modalités de J . Mais la situation n'est pas aussi caricaturale qu'on pourrait le penser: La modalité 1 de I n'est pas à côté de la modalité de 1 de J . Ce serait le cas si $\frac{P(1, 1)}{P_{.1}}$ était presque égal à 1. Le retour aux données montre bien que ceci n'est pas vrai. On peut donc conclure que si la dépendance entre les variables I et J est réelle, elle n'est pas absolue.

Nous n'avons pas la place ici pour étudier en détail les formules de reconstitution du tableau initial. Le lecteur intéressé pourra vérifier que l'approximation de $P(i, j)$ par $P_{.i} P_{.j}$ sous-estime les éléments du tableau proches de la diagonale principale et surestime les éléments éloignés de la diagonale principale.

Le tableau $\frac{Z^1 Y_1}{\sqrt{\lambda_1}}$ rectifie très fortement ces erreurs d'approximation.

De manière plus précise le premier axe principal et la première composante principale permettent une reconstruction approchée des $P(i, j)$ par:

$$P^*(i, j) = P_{.i} P_{.j} \left(1 + \frac{Z_i Y_1^j}{\sqrt{\lambda_1}} \right)$$

Comme dans cet exemple les $(Z_i^1; i = 1, \dots, I)$ et les $(Y_j^1; j = 1, \dots, J)$ sont tous largement inférieurs à 1, on peut écrire:

$$P^*(i, j) \simeq P_i \cdot P_j \exp \left(\frac{Z_i^1}{(\lambda_i)^{1/4}} \frac{Y_j^1}{(\lambda_j)^{1/4}} \right)$$

On retrouve donc une approximation voisine de celle fournie par le modèle II de L.A. Goodman (1979).

Nous avons plusieurs fois invité à un retour aux données pour éclairer les résultats obtenus. C'est parce que l'Analyse des Correspondances est une méthode exploratoire des données qu'il est logique de faire ce retour. Les résultats suggèrent une structure et invitent donc à un nouveau regard, une nouvelle lecture, une voie nouvelle d'exploration des données, voie qu'on n'aurait vraisemblablement pas envisagée à priori. Rien n'empêche lorsque la nature du problème s'y prête de bâtir une nouvelle expérience pour confirmer les hypothèses qui surgissent pendant la phase d'exploration.

II.5. Autres présentations.

La présentation que nous avons faite de l'Analyse des correspondances dans les paragraphes précédent n'est pas la seule possible. Elle a l'avantage de respecter parfaitement la symétrie en I et J du problème et de découler simplement de l'A.C.P. D'autres présentations mettront en évidence d'autres aspects des données.

a) On peut remarquer que les triplets $(P D_J^{-1}, D_I^{-1}, D_J)$ et $(D_I^{-1/2} P D_J^{-1}, J_{I \times I}, D_J)$ conduisent à la même équation que le triplet (X, D_I, D_J) pour les composantes principales donc aux mêmes composantes principales, donc à la même représentation des modalités de J . Le premier a l'avantage de bien faire apparaître les lois conditionnelles $(P D_J^{-1})$ et leur comparaison par la métrique du Chi-deux (D_I^{-1}) .

Le second a l'avantage de simplifier l'exposé mathématique puisque la métrique est ici l'identité $J_{I \times I}$. Ils ont l'inconvénient de perdre la symétrie du problème.

Il faudra rechercher la représentation des modalités de I soit par les composantes principales de $(P' D_I^{-1}, D_J^{-1}, D_I)$ soit par celles de $(D_J^{-1/2} P' D_I^{-1}, J_{J \times J}, D_I)$. On retrouvera bien sûr les formules de transition entre les représentations des modalités de I et celles de J .

b) Introduisons U_1 et U_2 les matrices $I \times n$ et $J \times n$ des variables indicatrices associées aux deux variables.

Soit D la matrice diagonale d'éléments diagonaux égaux à $1/n$. On vérifie aisément que:

$$P = U_1 D U_2'; \quad D_I = U_1 D U_1'; \quad D_J = U_2 D U_2'$$

En transformant les notations pour retrouver des présentations classiques de la statistique multivariable, on peut poser:

$$U_1 D U_2' = S_{12}; \quad U_1 D U_1' = S_{11}; \quad U_2 D U_2' = S_{22}$$

L'équation donnant les $(Y_i; i = 1, \dots, q)$ s'écrit alors

$$S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12} Y_i' = \lambda_i Y_i'$$

et les $(Z^i; i = 1, \dots, q)$ se calcule par la formule

$$Z^i = \frac{S_{11}^{-1} S_{12} Y_i'}{\sqrt{\lambda_i}}$$

On reconnaît dans ces deux expressions les formules de l'Analyse Canonique: (Y_i, Z^i) est le i ème couple de facteurs canoniques dans l'Analyse canonique des matrices (non centrées) U_2 et U_1 . On peut donc dire que l'Analyse des correspondances est une analyse canonique particulière. Dans cette approche, il est logique d'interpréter Y_i et Z^i comme des codages des modalités de J et I . Ces codages permettent de définir les variables canoniques $Z^i U_1 / \sqrt{\lambda_i}$ et $Y_i U_2 / \sqrt{\lambda_i}$ dont la corrélation est égale à $\sqrt{\lambda_i}$. Cette interprétation de la valeur propre, outre qu'elle établit que λ_i est inférieure à 1 est intéressante dans les applications.

On peut rapprocher de cette approche, la démarche de codage réciproque qui consiste à chercher Z^k, Y_k, β_k de telle sorte que

$$Y_k = \beta_k (Z^k)' P D_J^{-1} \text{ et } Z^k = \beta_k D_I^{-1} P Y_k'$$

En remplaçant par exemple Y_k' par sa valeur dans la seconde expression, on obtient

$$Z^k = (\beta_k)^2 D_I^{-1} P D_J^{-1} P' Z^k$$

ce qui établit que Z^k est l'axe principal défini dans les paragraphes précédents et $\beta_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}$.

III. L'ANALYSE DES CORRESPONDANCES MULTIPLES.

III.1. Soit $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ \dots \\ U_2 \\ \dots \\ U_k \end{pmatrix}$ la matrice $\left(\sum_{k=1}^K P_k \right) \times n$, obtenue en juxtaposant les variables indicatrices des modalités de K variables qualitatives; on suppose que la k ième variable a P_k modalités.

Le tableau U est un tableau de nombres non négatifs que les praticiens ont assez rapidement envisagé de soumettre à l'Analyse des Correspondances le considérant comme un tableau particulier d'effectifs. Le but de ce paragraphe est de justifier cette pratique. La propriété 9 établira que pour $K = 2$, les résultats de cette approche sont ceux développés dans les paragraphes précédents. Les propriétés précédentes explicitent la signification mathématique de cette pratique.

Définissons

$$D_{\Sigma} = n \begin{pmatrix} D_1 & \dots & 0 \\ & D_2 & \\ & & \dots \\ 0 & \dots & D_k \end{pmatrix}$$

et $D_n = K J_{n \times n}$

D_{Σ} est la matrice dont les éléments diagonaux sont les sommes des lignes de U . D_n est la matrice dont les éléments diagonaux sont les sommes des colonnes de U .

Définition: On appelle Analyse des Correspondances Multiples, l'Analyse des correspondances de U , c'est-à-dire l'A.C.P. du triplet $(D_{\Sigma}^{-1} U D_n^{-1}, D_{\Sigma}, D_n)$.

Propriété 6: Les composantes principales sont les vecteurs propres de

$$\frac{1}{Kn} \left(\sum_{k=1}^K U_k D_k^{-1} U_k \right)$$

Démonstration et commentaires: Appliquant les résultats du paragraphe I₃ au triplet considéré, on vérifie qu'une composante principale $\eta_l \in R^n$ est définie par:

$$D_n^{-1} U' D_{\Sigma}^{-1} U \eta_l = \mu_l \eta_l$$

Le résultat s'obtient en remplaçant U , D_n et D_{Σ} par leurs valeurs en fonction des U_k et des D_k . En interprétant $\frac{1}{n} U_k D_k^{-1} U_k$ comme le

projecteur orthogonal sur le sous espace de R^n engendré par les indicatrices de la k ième variable, on voit que les composantes principales sont proportionnelles aux vecteurs propres de la somme des projecteurs.

Propriété 7: Les représentations des modalités de la k ième variable sont obtenues par projection orthogonale des composantes principales sur le sous espace de R^n engendré par les indicatrices de cette variable.

Démonstration et commentaires:

Soit $\xi^l \in R^{\left(\sum_{k=1}^K P_k \right)}$ l'axe principal correspondant à la composante principale η_l . Les formules générales donnent:

$$\xi^l = \frac{D_{\Sigma}^{-1} U \eta_l}{\sqrt{\mu_l}}$$

En notant

$$\xi^l = \begin{pmatrix} \xi_1^l \\ \xi_2^l \\ \dots \\ \xi_k^l \end{pmatrix} \text{ on a alors:}$$

$$\xi_k^l = \frac{1}{n} \frac{D_k^{-1} U_k \eta_l}{\sqrt{\mu_l}}$$

et

$$U_k' \xi_k^l = \frac{1}{n} \frac{U_k' D_k^{-1} U_k \eta_l}{\sqrt{\mu_l}}$$

La nature particulière de U_k fait que $U_k' \xi_k^l$ n'a que P_k valeurs distinctes qui sont les valeurs des composantes de ξ_k^l .

Il faut souligner l'analogie qui existe entre les résultats présentés dans les propriétés 6 et 7 et l'Analyse Canonique Généralisée telle qu'elle est décrite par J.R. Kettenring (1976).

Propriété 8: Les composantes de ξ_k^l sont centrées pour les poids D_k . On voit aisément que:

$$1_k D_k \xi_k^l = \frac{1}{n} \frac{1_k U_k \eta_l}{\sqrt{\mu_l}} = \frac{1}{n} \frac{1_n \eta_l}{\sqrt{\mu_l}}$$

Or $\frac{1}{n} \sum \eta_i^l$ est nul puisque d'après les résultats généraux η_i est orthogonal à $\frac{1}{n}$ pour la métrique D_n .

Propriété 9: Dans le cas particulier où $K = 2$, les représentations des modalités des deux variables fournies par l'Analyse des correspondances multiples sont les mêmes que les représentations des modalités fournies par l'Analyse des correspondances.

Démonstration et commentaires. On a vu que:

$$\frac{1}{n} (U_1' D_1^{-1} U_1 + U_2' D_2^{-1} U_2) \eta_i^l = \mu_i \eta_i^l$$

On en déduit en multipliant à gauche par $D_1^{-1} U_1$

$$\xi_1^l + D_1^{-1} P \xi_2^l = 2 \mu_i \xi_1^l$$

et de même en multipliant à gauche par $D_2^{-1} U_2$

$$D_2^{-1} P' \xi_1^l + \xi_2^l = 2 \mu_i \xi_2^l$$

En rapprochant ces deux résultats, on a:

$$D_1^{-1} P \xi_2^l = (2 \mu_i - 1) \xi_1^l$$

et

$$D_2^{-1} P' \xi_1^l = (2 \mu_i - 1) \xi_2^l$$

ou encore

$$D_1^{-1} P D_2^{-1} P' \xi_1^l = (2 \mu_i - 1)^2 \xi_1^l$$

et

$$D_2^{-1} P' D_1^{-1} P \xi_2^l = (2 \mu_i - 1)^2 \xi_2^l$$

On en déduit en particulier

$$(\xi_1^l)' D_1 \xi_1^l = \frac{(\xi_2^l)' P' D_1 P \xi_2^l}{(2 \mu_i - 1)^2} = (\xi_2^l)' D_2 \xi_2^l = \frac{\mu_i}{2n}$$

Nous venons de retrouver les résultats des propriétés 2 et 3 avec des écritures légèrement différentes.

La normalisation des représentations a changé:

On remarque en outre que:

$$(2 \mu_i - 1)^2 = \lambda_i$$

L'analyse des correspondances de $U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$ fera donc apparaître $2q$ valeurs propres différentes de 0 et 1.

$$\text{A } \mu_i = \frac{1 + \sqrt{\lambda_i}}{2} \text{ correspond } \mu_i^* = \frac{1 - \sqrt{\lambda_i}}{2}.$$

La somme des valeurs propres est égale à q ; μ_i est toujours plus grand que λ_i ; mais λ_i/q reste inférieur à $1/q$. Il faut en tenir compte pour interpréter les résultats.

Propriété 10: La valeur de η_i pour un individu est, au coefficient $\sqrt{\mu_i}$ près, le point moyen des valeurs de ξ_k^l pour les modalités des variables prises par cet individu.

Ecrivons l'équation qui donne une composante principale à partir d'un axe principal; on a:

$$\eta_i = \frac{(\xi^l)' U D_n^{-1}}{\sqrt{\mu_i}}$$

soit

$$\eta_i = \frac{1}{K \sqrt{\mu_i}} \sum_{k=1}^K (\xi_k^l)' U_k$$

Remarque: On appelle Tableau de Burt associé aux K variables le tableau

$$B = \begin{pmatrix} D_1 & P_{12} & \dots & P_{1K} \\ P_{21} & D_2 & \dots & P_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{K1} & P_{K2} & \dots & D_K \end{pmatrix}$$

On montre aisément que les axes principaux de l'analyse des correspondances de B sont à la norme près les mêmes que ceux fournis par l'analyse des correspondances de U . En particulier, quand $K = 2$, on peut indifféremment faire l'analyse des correspondances de P , de U , ou de B .

III.2. Remarques et extensions.

L'intérêt essentiel de la généralisation qui vient d'être vue résulte dans le fait qu'elle ne demande pas l'écriture d'un nouveau programme. Elle est entièrement obtenue par l'application au tableau U d'un programme écrit pour réaliser l'analyse d'un tableau de contingence P .

L'analyse de K variables qualitatives ne fait intervenir dans les calculs que les interactions des variables prises deux à deux ($U_k D U_l$). Le seul moyen de faire apparaître des interactions d'ordre supérieur est la technique des points supplémentaires qui permettra de projeter dans les plans factoriels obtenus les modalités de variables construites par le croisement de plusieurs variables initiales.

La propriété d'équivalence distributionnelle (Voir II.1) établit qu'on peut regrouper les colonnes de deux individus présentant les mêmes modalités pour toutes les variables sans modifier la représentation des modalités. Ceci conduit à étendre les résultats à des individus munis de poids. Pratiquement le résultat s'obtient en remplaçant les 1 par le poids de l'individu concerné.

La méthode du paragraphe précédent fournit une représentation des modalités de chacune des variables, une représentation des individus mais ne fournit par une représentation pour les variables elles-mêmes.

L'article de P. Cazes et al. (1976) propose d'étudier globalement les proximités entre les variables qualitatives par la diagonalisation de la matrice C , de dimensions $K \times K$, d'élément:

$$C_{k,l} = Tr(A_k A_l) = \left(\frac{\chi_{kl}^2}{n} + 1 \right)$$

où A_k est le projecteur $\frac{1}{n} U_k D_k^{-1} U_k$

et χ_{kl}^2 est le Chi-deux de contingence entre les variables k et l .

Soit alors $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_K \end{pmatrix}$ le premier vecteur propre de C associé à la plus grande valeur propre δ . On démontre que la représentation des individus obtenue par la diagonalisation de $W = \sum_{k=1}^K L_k A_k$ est optimale au sens où:

$$\sum_{k=1}^K (Tr(W A_k))^2 = \delta^2 \text{ et } Tr(W^2) = \delta$$

Un calcul simple montre que cette représentation est proportionnelle à celle fournie par l'analyse des correspondances du tableau:

$$\begin{pmatrix} L_1 U_1 \\ \vdots \\ L_k U_k \end{pmatrix}$$

Dans le même esprit, T. Foucart (1978) propose une méthode pour comparer plusieurs tableaux de contingence P_1, \dots, P_R , croisant les deux mêmes variables qualitatives I et J . Utilisant l'équivalence entre l'analyse des correspondances du tableau de contingence P_r et celle du tableau de Burt:

$$B_r = \begin{pmatrix} D_{I,r} & P_r \\ P_r' & D_{J,r} \end{pmatrix}$$

où $D_{I,r}$ (resp. $D_{J,r}$) est la matrice diagonale des poids des lignes (resp. des colonnes) de P_r , T. Foucart commence par comparer les B_r au travers de la diagonalisation de la matrice C , de dimensions $R \times R$, d'élément

$$C_{r,s} = Tr(B_r B_s)$$

Le premier vecteur propre de C permet de définir un tableau de contingence

$$P = \left(\sum_{r=1}^R L_r P_r \right) / \left(\sum_{r=1}^R L_r \right)$$

qui fournit une représentation intermédiaire des liens entre les modalités des deux variables.

Les modalités des variables dans les tableaux P_r sont étudiées au moyen de leur projection comme points supplémentaires dans la représentation fournie par P .

IV. CONCLUSION.

Ce texte a essayé de faire une présentation qui se suffise à elle-même pour l'Analyse des correspondances d'un tableau de contingence et l'Analyse des correspondances multiples. Il a montré rapidement que

d'autres présentations étaient possibles; il a indiqué quelques unes des extensions possibles. Dans les références le lecteur intéressé pourra trouver des ouvrages qui lui permettront d'avoir une vue plus complète du sujet et des articles qui le mettront sur la voie des extensions. Il trouvera aussi dans les différentes bibliographies des textes cités, le nom d'auteurs que notre présentation ne nous a pas conduit à nommer, mais qui ont pourtant contribué à un moment ou à un autre au développement de l'Analyse des Correspondances.

BIBLIOGRAPHIE

- BENZECRI J.P. (1973). *L'analyse des données*. Dunod, Paris (2 tomes).
- BOUROCHE, J.M., G. SAPORTA (1980). *L'analyse des données*. Collection Que Sais-je? PUF.
- CAILLIEZ, F., PAGES, J.P. (1976). *Introduction à l'analyse des données*. SMASH (9 rue Duban, 75016 Paris).
- CAZES, P., BONNEFOUS, S., BAUMERDER, A., PAGES, J.P. (1976). *Description cohérente des variables qualitatives prises globalement et de leur modalités*. S.A.D. 2/1976, p. 48-62.
- CAZES, P., BAUMERDER, A., BONNEFOUS, S., et PAGES J.P. (1977). *Codage et analyse des tableaux logiques. Introduction à la pratique des variables qualitatives*. Cahiers du BURO, n. 27, Université Paris VI.
- DAUDIN, J.J., TRECOURT P. (1980). *Analyse factorielle des correspondances et modèle Log-Linéaire: comparaison des deux méthodes sur un exemple*. R.S.A. Vol. XXVIII, n. 1, p. 4-54.
- DEVILLE, J.C., SAPORTA, G. (1979). *Analyse harmonique qualitative*. In *Data Analysis and Informatics*, ed. by E. Diday et al., North-Holland, p. 375-389.
- FOUCART, T. (1978). *Sur les suites de tableaux de contingence indexés par le temps*. SAD n. 2/1978, p. 67-85.
- GOODMAN, L.A. (1979). *Simple models for the analysis of association in cross-classifications having ordered categories*. JASA, 74, n. 367, p. 537-552.
- HILL, M.G. (1974). *Correspondence analysis: a neglected multivariate method*. Appl. Stat., n. 3, p. 340-354.
- KETTENRING, J.R. (1971). *Canonical analysis of several sets of variables*. Biometrika, 58, n. 3, p. 433-451.
- LEBART, L., MORINEAU, A., TABARD, N. (1977). *Techniques de la description statistique: méthodes et logiciels pour l'analyse des grands tableaux*. Dunod, Paris.
- LEBART, L., MORINEAU, A., FENELON, J.P. (1979). *Traitement des données statistiques*. Dunod, Paris.

PAGES, J.P., ESCOUFIER, Y., CAZES, P. (1976). *Opérateurs et analyse des tableaux à plus de deux dimensions*. Cahiers du BURO, n. 25. Université Paris VI.

PAGES, J.P., CAILLIEZ, F., ESCOUFIER, Y. (1979). *Analyse factorielle: un peu d'histoire et de géométrie*. R.S.A., XXVII, n. 1, p. 6-28.

RAO, C.R. (1965). *The use and interpretation of principal component analysis in applied research*. Sankhya A, 26, p. 329-358.

RÉSUMÉ

Ce texte a été préparé pour être présenté à ROME les 25 et 26 juin 1981 dans le cadre d'une réunion internationale sur l'Analyse des Tableaux de Contingence Multidimensionnels. Il contient un rapide rappel d'Analyse des composantes principales; une présentation complète de l'Analyse des correspondances comme cas particulier de l'Analyse en composantes principales; un exemple d'application à un tableau 4×6 ; une présentation de l'Analyse des correspondances multiples comme extension au tableau des indicatrices de l'analyse d'un tableau de contingence et quelques indications sur les extensions récentes.

SUMMARY

This article has been written for a meeting on "Analysis of Multidimensional Contingency Tables" held in ROMA (June 25-26 1981). It gives a self-contained presentation of Correspondences Analysis and Multiple Correspondences Analysis deduced from the general properties of Principal Components Analysis. An application to a 4×6 contingency table is included. Some recent developments are mentioned.