N$^{\mathrm{O}}$ d'ordre : 2237

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ BORDEAUX I

ÉCOLE DOCTORALE DE MATHÉMATIQUES ET INFORMATIQUE

PAR **Hugo Akrout**

POUR OBTENIR LE GRADE DE

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES PURES

Systoles généralisées, familles de réseaux.

Soutenance prévue le 12 juillet 2000.

Après avis de :

P. BUSER, Professeur	Ecole polytechnique Fédérale de Lausanne
J. P. OTAL , Directeur de Recherche	Université d'Orléans

Devant la commission d'examen formée de :

C. BAVARD, Professeur	Université de Bordeaux	Directeur de thèse
R. KELLERHALS, Professeur	Université de Bordeaux	
J. MARTINET, Professeur	Université de Bordeaux	
P. PANSU, Professeur	Université de Paris-Sud	
P. SCHMUTZ SCHALLER, Professeur	Université de Genève	

A tous ceux qui ont contribué à être pour moi une famille

Remerciements

Tout d'abord, je voudrais adresser mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse, Christophe Bavard. Il a accepté de me faire confiance il y a cinq ans en m'apprenant la géométrie riemannienne. Il a toujours su être présent lorsque j'en avais besoin et je sais que ce travail n'aurait pu aboutir sans son aide et sans les nombreuses discussions que nous avons eues.

Ensuite, je voudrais exprimer ma reconnaissance envers Peter Buser et Jean Pierre Otal pour avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs remarques m'ont permis d'améliorer ce travail et d'ouvrir de nouvelles voix de recherche dans ce domaine.

Ruth Kellerhals, Jacques Martinet, Pierre Pansu et Paul Schmutz Schaller m'ont fait l'honneur de participer au jury, qu'ils en soient ici remerciés.

Je ne saurais oublier d'exprimer ma gratitude à Gilles Robert, pour ses conseils et pour les nombreuses discussions qui ont permis de faire avancer régulièrement ce travail, et à Phillipe Depouilly et David Lubicz pour la patience qu'ils ont su m'accorder pour les problèmes informatiques.

Cette thèse n'aurait peut-être jamais vu le jour sans Geneviève Bretenoux et Gérard Galusinski. Je ne saurais trop les remercier pour le soutien psychologique qu'ils m'ont accordé il y a sept ans de cela.

J'ai une pensée vers Alexandre Casamayou pour les corrections qu'il a apporté à ce travail, pour les discussions que nous avons eu ainsi que pour l'énergie qu'il a dépensée lors de la préparation de nos soutenances.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude envers les membres du bureau 155 qui m'ont supporté depuis trois ans : Isa, Manou et Carin. Manou, c'est promis, si je fais l'Olympia, je t'oublierai pas ! Carin, comment ça va, la vie ? Isa, tu es partie un peu tôt, mais on se reverra !

Les autres thésards du labo, et en particulier Hakam, Nielsou, Yannick et Steph m'ont soutenu tant sur le plan humain que sur le plan scientifique. Nos diverses discussions ont largement contribué à ma culture mathématique. Qu'ils sachent que j'ai pour eux une pensée toute particulière.

Je suis très reconnaissant envers Catherine et Sophie, qui ont su créer autour de moi l'atmosphère nécessaire à l'aboutissement de cette thèse.

Je voudrais également remercier les membres de Royal Ambré, Seb et Cyril, qui ont su comprendre que ce travail justifiait mes absences, ainsi que les amis qui m'ont soutenu durant ces années. Je pense en particulier à David, Abdellah, Corinne et Domi, Zabou, et Rico, qui m'a appris que la vie n'était peut-être pas aussi dure qu'elle en a l'air.

La liste de ceux que je désirerais remercier est trop longue pour cette page, je voudrais qu'ils sachent qu'ils ne sont pas oubliés.

Enfin, je remercie Mauricette Jaubert qui a eu la lourde tâche d'imprimer cette thèse, et Joëlle Pargade pour sa disponibilité et son efficacité au sein de l'école doctorale.

Introduction

L'objet de cette thèse est l'étude de certaines propriétés de fonctions généralisant l'invariant d'Hermite des réseaux et la systole des surfaces de Riemann. L'étude générale de ce type d'invariants a été initiée dans l'article de Ch. Bavard "Systole et invariant d'Hermite" [Ba1].

Les problèmes naturels associés à ces fonctions proviennent essentiellement des deux exemples précédents. Il s'agit entre autres de déterminer ou de caractériser les objets extrêmes (par exemples réseaux et surfaces extrêmes), c'est-à-dire ceux qui maximisent localement ces invariants. Par exemple, a-t-on des critères simples pour les caractériser ou les déterminer? Quelle est la régularité topologique de ces fonctions? Comment caractériser ou déterminer les points singuliers?

Dans la théorie généralisée, on étudie une fonction, appelée *systole généralisée*, définie sur une variété et qui est localement minimum d'un nombre fini de fonctions lisses, appelées *fonctions longueurs*. Le chapitre 1 redonne (sans démonstration) les motivations et les résultats connus relatifs à cette théorie.

0.0.1 Invariant d'Hermite et espaces symétriques irréductibles

Dans le cas de l'invariant d'Hermite classique, on savait depuis Voronoï [Vor] non seulement caractériser mais aussi déterminer les réseaux les plus denses. Il n'en est pas de même lorsqu'on se restreint à des réseaux devant posséder en plus certaines structures algébriques.

L'espace naturel pour étudier la densité des réseaux est l'espace des réseaux marqués. C'est aussi l'espace des matrices de Gram de ceux-ci, c'est-à-dire des matrices symétriques définies positives de déterminant 1. Cet espace est bien connu comme espace symétrique (de type non compact) isométrique à $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$.

Les matrices de Gram de certaines familles de réseaux munis de structures algébriques parcourent des sous-variétés de cet espace. Dans beaucoup de cas intéressants, la sous-variété est totalement géodésique, et même isométrique à un espace symétrique de type non compact. Dans le chapitre 2, on démontre le théorème suivant (voir chapitre 1 pour les définitions):

Théorème 1 *L'invariant d'Hermite restreint à une famille de réseaux dont les matrices de Gram parcourent une image isométrique d'un espace symétrique irréductible de type non compact non exceptionnel vérifie le théorème de Voronoï.*

Autrement dit, dans ces cas là, on dispose d'un critère pour caractériser les maxima locaux de cet invariant.

La démonstration de ce théorème se fait en utilisant la théorie générale de [Ba1]. Ch. Bavard a donné une condition (condition (C)) suffisante pour avoir, dans le cadre général, une caractérisation "à la Voronoï" des extréma locaux. Celle-ci implique aussi que les extréma locaux sont stricts. On trouve des systèmes d'inéquations relatifs à cette condition, puis on les démontre pour l'invariant d'Hermite classique restreint à chaque image isométrique d'un espace symétrique irréductible de type non compact (plus précisement une image isométrique de l'orbite de l'identité dans $SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ sous l'action d'un sous-groupe de Lie connexe de $SL(n,\mathbb{R})$).

On retrouve alors les résultats de A. M. Bergé et J. Martinet concernant les réseaux isoduaux, symplectiques et les réseaux stables sous l'action d'un groupe fini. On obtient aussi de nouveaux résultats relatifs à d'autres familles de réseaux, en particulier, des réseaux complexes et quaternioniques.

Il serait intéressant de trouver une condition géométrique permettant de réaliser le théorème de Voronoï dans le cadre général.

0.0.2 Invariant d'Hermite, systole et fonctions de Morse

Le chapitre 3 étudie les propriétés topologiques locales des systoles généralisées.

A. Ash a démontré que l'invariant d'Hermite était une fonction de Morse topologique. L'intérêt d'un tel résultat est que cette fonction est invariante sous l'action du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$ par changement de base des réseaux. Elle donne donc une fonction sur l'espace des réseaux non marqués $SL(n,\mathbb{Z})\backslash SL(n,\mathbb{R})/SO(n)$ et une formule d'Euler pour le groupe $SL(n,\mathbb{Z})$.

Dans le cadre des surfaces de Riemann marquées de genre g avec n pointes, la systole est une fonction naturelle sur l'espace de Teichmüller $T_{g,n}$ invariante sous l'action du groupe modulaire de Teichmüller $\Gamma_{g,n}$. Elle définit donc une fonction sur l'espace des modules, espace bien connu pour sa complexité.

En se replaçant dans la cadre de la théorie générale, on démontre au chapitre 3 le théorème suivant:

Théorème 2 *Une systole généralisée réalisée par des fonctions dont les Hessiens pour une connexion sont définis positifs est une fonction de Morse topologique.*

Les points critiques de ces fonctions sont les points *eutactiques* (voir chapitre 1). Ceux ci apparaissent aussi dans le critère de Voronoï. Le théorème ci-dessus montre qu'ils sont toujours isolés (tant que les fonctions ont des dérivées secondes définies positives). Il serait intéressant de connaître une méthode permettant de les déterminer.

En utilisant le résultat de S. Wolpert [Wol], ce théorème appliqué à la systole des surfaces de Riemman donne immédiatement le résultat suivant:

Corollaire *La systole définie sur l'espace de Teichmüller $T_{g,n}$ est une fonction de Morse topologique.*

On obtient une formule d'Euler pour le groupe modulaire $\Gamma_{g,n}$.

Dans le cas non compact ($n > 0$), P. Schmutz Schaller a récemment trouvé une fonction de Morse sur l'espace de Teichmüller invariante sous l'action d'un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire. Cependant, cette fonction n'est pas, en général, la systole.

Les fonctions longueurs des réseaux n'ont pas des dérivées secondes définies positives pour la connexion de Levi-Civita sur $SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$. Pour retrouver le résultat de A. Ash, on utilise une autre connexion (non complète sauf pour $n = 2$) sur l'espace des réseaux marqués introduite par Ch. Bavard [Ba2].

Table des matières

Chapitre 1

Systoles généralisées: exemples et définitions

1.1 L'invariant d'Hermite des réseaux marqués

1.1.1 Minimum des formes quadratiques

Soit Q une forme quadratique définie positive de déterminant 1 sur $\mathbb{R}^n$, un problème classique de géométrie des nombres consiste à déterminer le minimum de cette forme sur les vecteurs entiers non nuls.

Si M est une matrice de $SL(n, \mathbb{Z})$, ce minimum est le même pour les formes quadratiques Q et $\tilde{Q}(X, Y) = Q(MX, MY)$. Le problème est donc défini modulo l'action de ce groupe par équivalence des formes quadratiques.

On obtient une fonction μ_n définie sur l'ensemble des formes quadratiques de dimension n de déterminant 1 modulo l'action de $SL(n, \mathbb{Z})$ qui, à toute forme quadratique, associe son minimum sur les vecteurs entiers.

L'étude des maxima locaux de cette fonction remonte au milieu du XIX-ième siècle et débute dans les correspondances entre Ch. Hermite et J. G. C. Jacobi. En particulier, Ch. Hermite donne la borne

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}} D^{\frac{1}{n}}$$

pour le maximum sur les formes de dimension n et de déterminant D.

On normalise les formes à déterminant 1. Les formes pour lesquelles le minimum est un maximum local sont appelées *extrêmes*. Une forme quadratique pour laquelle le minimum est un maximum local strict est dite *strictement extrême*. Au début du siècle, G. Voronoï [Vor] caractérise les formes strictement extrêmes en fonction des représentations entières du minimum de celles-ci. Il donne un algorithme permettant de les déterminer.

1.1.2 Réseaux marqués et formes quadratiques

On considère un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$ de dimension n pour lequel on choisit une fois pour toute une base orthonormée $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Un réseau Λ de E est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n dans E. Autrement dit, il existe une famille libre $(e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\Lambda = \oplus_{i=1}^n \mathbb{Z} e_i$. Le couple $(\Lambda, (e_1, \dots, e_n))$ est appelé *réseau marqué*.

Pour tout réseau marqué $(\Lambda, (e_1, \dots, e_n))$, l'enveloppe convexe des vecteurs de la base est appelé *polytope fondamental* et son volume est le *déterminant* du réseau. La *norme* du réseau est alors le minimum des normes des vecteurs non nuls du réseau. Le problème de la détermination de la norme d'un réseau est clairement invariant par isométries et par changement de base de celui-ci.

L'invariant d'Hermite du réseau Λ est alors défini comme la norme du réseau sur la racine n-ième de son déterminant. Il est alors invariant par homothétie, ce qui permet de se limiter aux réseaux de déterminant 1.

A tout réseau marqué $(\Lambda, (e_1, \dots, e_n))$ de déterminant 1, on associe sa matrice de Gram

$$G = G((\Lambda, (e_1, \dots, e_n))) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle & \langle e_2, e_2 \rangle & \dots & \langle e_2, e_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \langle e_i, e_j \rangle & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \langle e_n, e_2 \rangle & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

La matrice de Gram d'un réseau est une matrice symétrique définie positive. Elle représente ainsi une forme quadratique et le problème de la détermination des formes quadratiques extrêmes (respectivement strictement extrêmes) se ramène à étudier les réseaux d'invariant d'Hermite extrême (respectivement strictement extrême).

Dans ce cadre, le théorème de Voronoï s'énonce ainsi:

Théorème 1.1.1 *Soit Λ un réseau, G sa matrice de Gram et $S(\Lambda)$ l'ensemble des vecteurs non nuls du réseau de norme minimale, alors pour que Λ soit strictement extrême il faut et il suffit qu'il vérifie les deux conditions suivantes:*

1. *Toute forme linéaire sur l'espace des matrices symétriques est combinaison linéaire des formes $\phi_u(X) = {}^t uXu$, $u \in S(\Lambda)$.*
2. *La restriction à cet espace de la forme linéaire trace $Tr(X)$ est combinaison linéaire à coefficients strictement positifs des formes $\phi_u(X) = {}^t uXu$, $u \in S(\Lambda)$.*

Les réseaux et formes quadratiques qui vérifient la propriété 1 sont dits *parfaits*. Ce sont les formes quadratiques déterminées par leur minimum et les représentations de ce minimum. Elle doivent posséder au moins

$$N + 1 = \frac{(n+1)n}{2}$$

représentations du minimum.

Les réseaux et formes quadratiques qui vérifient la propriété 2 sont dits *eutactiques*. Ils apparaissent topologiquement comme points critiques non-dégénérés de l'invariant d'Hermite (voir chapitre 3, voir aussi [As1]).

1.1.3 Réseaux marqués et fonctions longueurs

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des réseaux marqués de déterminant 1 en dimension n. Deux réseaux marqués sont dits équivalents s'il existe une isométrie de E qui envoie la base du premier sur la base du second. L'application qui associe à $(\Lambda, (e_1, \dots, e_n))$ sa matrice de Gram permet d'identifier $\mathcal{E}_n$ modulo isométries à l'espace P_n des matrices symétriques définies positives de déterminant 1.

L'espace P_n est naturellement une variété différentielle de dimension

$$N = \frac{(n-1)(n+2)}{2}.$$

Son espace tangent en A est l'ensemble des matrices symétriques telles que $Tr(A^{-1}X) = 0$. Il est muni d'une métrique riemannienne définie par

$$\langle X, Y \rangle_A = Tr(A^{-1}XA^{-1}Y).$$

L'application de $SL(n,\mathbb{R}) \times P_n$ dans P_n qui à (P, A) associe $P.A = PA\,{}^tP$ définit une action à gauche par isométries du groupe $SL(n,\mathbb{R})$ sur P_n. La classification des formes quadratiques réelles donne immédiatement que cette action est transitive. En remarquant que le stabilisateur de l'identité I_n pour cette action est $SO(n)$, on obtient (cf [Hel]) une isométrie entre P_n et l'espace symétrique

$$SL(n,\mathbb{R})/SO(n).$$

Les changements de base des réseaux correspondent à une action à droite $g.A = {}^tgAg$ du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$ sur P_n. On obtient ainsi l'espace des réseaux non marqués de déterminant 1

$$SL(n,\mathbb{Z})\backslash SL(n,\mathbb{R})/SO(n).$$

A tout vecteur réel $u = (u_1, \dots, u_n)$, on associe la fonction l_u définie sur P_n par $l_u(A) = {}^tuAu$. Le nombre $l_u(A)$ représente la norme au carré du vecteur $u = \sum u_i e_i$ lorsque e_i est une base du réseau représenté par A. En particulier, la norme au carré du réseau A est le minimum des nombres $l_u(A)$ sur les vecteurs entiers u non nuls. La fonction l_u est appelée *fonction longueur associée à u*.

Ce sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur P_n. De plus, pour toute matrice de Gram $A \in P_n$, et pour tout réel K, il existe un voisinage W de A tel que l'ensemble $E_K(W) = \cup_{q \in W}\{u, l_u(q) \leq K\}$ est fini. L'invariant d'Hermite de A est donc le minimum des $l_u(A)$ lorsque u parcourt $\mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$. Remarquons que μ est invariante sous l'action de $SL(n,\mathbb{Z})$ et donc est définie sur l'espace des réseaux non marqués alors que les longueurs l_u ne le sont pas. Déterminer les réseaux extrêmes (respectivement strictement extrêmes) revient alors à déterminer les maxima locaux (respectivement maxima locaux stricts) de μ sur P_n.

1.1.4 Résultats sur l'invariant d'Hermite

La différentielle de l_u en $A \in P_n$ est $d_A l_u.X = {}^t uXu$ et le gradient de l_u en A pour la métrique ci-dessus est $\nabla_u(A) = A^t u u^t A$. L'ensemble des vecteurs minimaux en A est

$$S(A) = \{u \in \mathbb{Z}^n, l_u(A) = \mu(A)\}$$

et le théorème de Voronoï se reformule de la manière suivante:

Théorème 1.1.2 *Un point A dans P_n est un maximum local strict de μ si est seulement si il vérifie les deux propriétés suivantes:*

1. *Les gradients des longueurs minimales en A engendrent affinement l'espace tangent en A. (A est parfait).*
2. *Le vecteur nul de l'espace tangent en A est dans l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradients des longueurs minimales en A. (A est eutactique).*

L'invariant d'Hermite est équivariant sous l'action du groupe

$$\Gamma = SL(n,\mathbb{Z}).$$

Celui-ci induit donc une fonction sur l'espace des réseaux non marqués

$$SL(n,\mathbb{Z}) \backslash SL(n,\mathbb{R}) / SO(n).$$

A. Ash [As1] a démontré que l'invariant d'Hermite était une fonction de Morse topologique sur l'espace P_n. On obtient ainsi une fonction de Morse explicite équivariante sous l'action du groupe $SL(n,\mathbb{Z})$. Les points de Morse de cette fonction sont les points eutactiques et l'indice en ces points est le rang des différentielles des longueurs minimales en ce point.

Sachant cela, on peut montrer une formule d'Euler pour la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe $\Gamma = SL(n,\mathbb{Z})$ [As2].

1.2 La systole des surfaces des Riemann

1.2.1 Surfaces marquées et géodésiques fermées

On considère une surface de Riemann X. Par la théorie des revêtements, on sait que celle-ci est biholomorphe à un quotient d'une surface simplement connexe par un sous-groupe d'isométries isomorphe à son groupe fondamental. D'après le théorème d'uniformisation, les seules surfaces de Riemann simplement connexes (à biholomorphisme près) sont la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, le plan complexe $\mathbb{C}$ et le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}, \Im(z) > 0\}$. Celles-ci sont munies d'une métrique de courbure constante et ainsi, une surface de Riemann hérite elle-même d'une telle métrique.

Dans presque tous les cas, le revêtement universel de X est $\mathbb{H}$. On sait alors que chaque classe d'homotopie libre de lacets de X contient une unique géodésique fermée qui réalise le minimum des longueurs des lacets de la classe.

La systole de la surface X est le minimum des longueurs des géodésiques fermées non triviales sur la surface. Celle-ci peut toujours être réalisée par la longueur d'une géodésique fermée simple. Le problème naturel est alors de caractériser (et déterminer) les surfaces ayant une systole maximale. Par analogie avec les réseaux, on dit d'une telle surface qu'elle est *extrême*.

1.2.2 Espace de Teichmüller et fonctions longueurs

Pour plus de détail, on pourra se référer par exemple à [I-T] ou [Nag].

L'étude de l'espace des surfaces de Riemann à biholomorphisme près (*"espace des modules"*) débute dans les travaux de Riemann lui même. La complexité de cet espace provient du fait qu'il n'est pas naturellement lisse. Au milieu du XX-ième siècle, O. Teichmüller a l'idée d'étudier celui-ci à travers un revêtement lisse : l'espace des surfaces de Riemann marquées par une base de leur groupe fondamental.

Si X est une surface de Riemann compacte de genre g, on marque X par une base de son groupe fondamental. Deux surfaces marquées sont dites équivalentes s'il existe un biholomorphisme entre ces surfaces qui préserve le marquage. L'espace de Teichmüller $T(X)$ de base X est défini comme l'ensemble des surfaces de Riemann marquées modulo cette relation d'équivalence.

On peut aussi le réaliser comme les classes d'équivalences d'homéomorphismes quasi-conformes modulo ceux homotopes à une application conforme. On peut donc voir un point dans l'espace de Teichmüller comme la classe d'un triplet (X, f, Y) où f est un homéomorphisme quasi-conforme entre X et Y.

Cet espace est muni d'une structure de variété analytique complexe. Si $g \geq 2$, sa dimension complexe est $3g - 3$. Il est aussi muni d'une métrique riemannienne de courbure négative (métrique de Weil-Petersson). Le groupe modulaire de Teichmüller, défini comme le groupe des difféomorphismes directs de X à homotopie près, agit biholomorphiquement sur celui-ci par isométries de Weil-Petersson et le quotient s'identifie naturellement à l'espace des modules de la surface X.

A tout représentant γ d'un élément du groupe fondamental de X et à toute surface marquée par un homéomorphisme quasi-conforme $f : X \to Y$ dans l'espace de Teichmüller $T(X)$, on associe la longueur $l_\gamma(Y)$ de l'unique géodésique fermée librement homotope à $f(\gamma)$ dans Y. On obtient ainsi une fonction l_γ définie sur $T(X)$ qui à $Y \in T(X)$ associe le réel $l_\gamma(Y)$.

Ces fonctions sont analytiques sur $T(X)$ et déterminent sa structure de variété analytique complexe. Elles ont des dérivées secondes définies positives le long de géodésiques de Weil-Petersson ([Wol]). De même que pour les réseaux, on démontre, grâce à un lemme de S. Wolpert, que pour K réel fixé, et pour toute surface, il existe un voisinage W de la surface dans $T(X)$ tel que l'ensemble $E_K(W) = \cup_{Y \in W}\{\gamma \in \Pi_1(X), l_\gamma(Y) \leq K\}$ soit fini. La systole d'une surface est donc le minimum des longueurs l_γ lorsque γ parcourt l'ensemble des classes d'homotopie libre de lacets de X (identifié aux classes de conjugaison du groupe fondamental de X). Remarquons enfin que la systole est invariante sous l'action du groupe modulaire de Teichmüller et induit ainsi une fonction sur l'espace des modules de X.

1.2.3 Résultats relatifs à la systole

L'étude des surfaces de Riemann extrêmes a été faite par P. Schmutz Schaller au début des années 1990 ([Sc3],[Sc4], voir aussi [Sc2], [Sc1] pour le nombre de systoles).

En particulier, il obtient une caractérisation “à la Voronoï” des maxima locaux de la systole en fonction des géodésiques fermées la réalisant. Il montre aussi que les surfaces extrêmes doivent posséder au moins $6g - 5 = dim(T(X)) + 1$ courbes réalisant la systole (voir [Sc3]).

En restreignant la famille de longueurs, il a réussit à trouver une fonction de Morse topologique sur l'espace de Teichmüller équivariante sous l'action d'un sous-groupe du groupe modulaire de Teichmüller ([Sc5]). Cependant, il ne peut conclure que dans le cas des surfaces non compactes et cette fonction ne donne pas en général une fonction de Morse équivariante sous l'action du groupe modulaire tout entier.

Le théorème démontré au chapitre 3 donne immédiatement que la systole est une fonction de Morse topologique sur l'espace de Teichmüller.

1.3 Systoles généralisées

En 1997, Ch. Bavard unifie les deux problèmes ci-dessus dans un cadre général. Dans cette thèse, on étudie certaines propriétés relatives à ces objets. Le but de cette section est de fixer les principales définitions et propriétés relatives à cette théorie. Pour plus de détails, on pourra se reporter à [Ba1].

1.3.1 Systoles généralisées

Une systole généralisée sur une variété s'exprime localement comme minimum d'un nombre fini de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. On adoptera la définition suivante :

Definition 1.3.1 *Soit $(l_u)_{u\in\mathcal{C}}$ une famille de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur une variété M. Pour $p \in M$ et K réel, on pose $\mathcal{C}_p^{\leq K} = \{u \in \mathcal{C}, l_u(p) \leq K\}$. La fonction $\mu = \inf_{u\in\mathcal{C}} l_u$ est une systole généralisée si pour tout point p de M et tout réel K, il existe un voisinage W de p tel que l'ensemble $\cup_{q\in W}\mathcal{C}_q^{\leq K}$ soit fini.*

Remarque

La systole généralisée μ s'exprime sur W comme minimum d'un nombre fini de fonctions lisses. En particulier, μ est continue.

Dans ce qui précède, on a vu que l'invariant d'Hermite des réseaux défini sur P_n et la systole des surfaces de Riemann définie sur l'espace de Teichmüller sont des exemples de tels objets.

Par analogie avec les deux exemples ci-dessus, les fonctions l_u sont appelées *fonctions longueurs* ou plus simplement *longueurs*. Pour $p \in M$, l'ensemble fini $S(p) = \{u \in \mathcal{C}, l_u(p) = \mu(p)\}$ est *l'ensemble des longueurs minimales* (ou encore *l'ensemble des systoles*) en p. Remarquons que, par continuité, μ s'exprime au voisinage de p comme minimum des fonctions de $S(p)$. L'ensemble des gradients des longueurs de $S(p)$ est appelé ensemble des *gradients minimaux* (en p).

1.3.2 Perfection, eutaxie, points extrêmes

On étend ici les notions de Voronoï dans le cadre des systoles généralisées. On suppose que M est munie d'une métrique riemannienne.

Donnons tout d'abord les définitions relatives aux longueurs.

Definition 1.3.2 *Soit $\mu = \min_{u\in\mathcal{C}} l_u$ une systole généralisée sur M et soit p un point de M. Soit $S(p)$ l'ensemble des longueurs minimales en p.*

- *Le point p est dit semi-eutactique si le vecteur nul de l'espace tangent T_pM en p appartient à l'enveloppe convexe des gradients minimaux en p.*
- *Le point p est dit eutactique si le vecteur nul de l'espace tangent T_pM en p appartient à l'intérieur affine de l'enveloppe convexe des gradients minimaux en p.*
- *Le point p est dit parfait si les gradients minimaux en p engendrent affinement l'espace tangent T_pM en p.*

Le *rang* d'un point est le rang des gradients minimaux en ce point.

Un point qui n'est pas semi-eutactique sera dit *ordinaire*.

Remarquons que ces définitions s'expriment tout aussi simplement en utilisant les différentielles des longueurs.

Remarquons aussi que pour un point parfait, le cardinal de l'ensemble des longueurs minimales est au moins $n + 1$, où n est la dimension de la variété.

Donnons ensuite les définitions relatives à la systole généralisée :

Definition 1.3.3 *Soit μ une systole généralisée sur une variété M,*

- *un point extrême est un maximum local de μ.*
- *un point strictement extrême est un maximum local strict de μ.*

Le problème naturel qui se pose dans ce cadre revient alors à essayer de caractériser (et déterminer si possible) les points strictement extrêmes.

1.3.3 Théorème de Voronoï, condition (C)

On cherche à caractériser les points extrêmes et les points strictement extrêmes par des conditions sur les gradients minimaux en ces points. De manière générale, on a la proposition suivante ([Ba1]):

Proposition 1.3.1

1. *Tout point extrême est semi-eutactique.*
2. *Tout point parfait et eutactique est strictement extrême.*

Pour trouver une réciproque au 2, on est amené à poser la condition suivante:

Definition 1.3.4 *On dit qu'une systole généralisée $\mu = \min_{l_u \in \mathcal{C}} l_u$ vérifie la condition (C) au point p si pour toute partie $T \in S(p)$ et pour tout vecteur tangent X annulant les différentielles des longueurs de T, il existe une courbe c tangente à X en p et $\varepsilon > 0$ tels que, pour toute longueur $l_u \in T$, la fonction $l_u \circ c$ soit strictement croissante sur l'intervalle* $[0, \varepsilon[$.

Lorsque M est munie d'une métrique, cette condition s'exprime naturellement en fonction des gradients de T.

Remarquons que celle-ci est trivialement vérifiée lorsqu'il existe une connexion qui rend les longueurs strictement convexes. En effet, il suffit de prendre pour c le germe géodésique associé à la connexion et définie par le point (p, X) du fibré tangent TM.

L'intérêt de cette condition réside dans la proposition suivante:

Proposition 1.3.2 *Lorsque la condition (C) est vérifiée en tout point semi-eutactique, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *p est extrême.*
2. *p est parfait et eutactique.*

3. p est strictement extrême.

On dit qu'une systole généralisée vérifie un théorème de Voronoï si les assertions 1., 2. et 3. de la proposition ci-dessus sont équivalentes.

La condition (C) devient ainsi une condition suffisante pour avoir un théorème de Voronoï relatif à une systole généralisée. Celle-ci est vérifiée pour la systole des surfaces de Riemann puisque les longueurs sont strictement convexes le long des géodésiques de Weil-Petersson ([Wol]).

Elle l'est aussi pour l'invariant d'Hermite sur P_n et sur les familles de réseaux orthogonaux et symplectiques ([Ba1]).

Remarquons que lorsque la condition (C) est vérifiée, les points extrêmes sont parfaits, donc possèdent au moins $dim(M)+1$ longueurs minimales. On retrouve donc les résultats relatifs à l'invariant d'Hermite et à la systole.

1.3.4 Singularités des systoles généralisées

Les longueurs sur P_n et sur l'espace de Teichmüller ont en commun d'avoir une dérivée seconde définie positive pour une connexion.

Pour P_n, cette connexion est donnée par Ch. Bavard [Ba2]. Si $n = 2$, c'est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique. Si $n \geq 3$, elle est non complète.

Pour l'espace de Teichmüller, S. Wolpert [Wol] a calculé les dérivées secondes des longueurs le long des géodésiques de Weil-Petersson et a montré que celles-ci étaient définies positives.

Dans le chapitre 3, on démontre le résultat suivant:

Théorème 1 *Soit μ une systole généralisée dont les dérivées secondes des longueurs pour une connexion sont définies positives. Alors μ est une fonction de Morse topologique dont les points de Morse d'indice r sont les points eutactiques de rang r.*

On en déduit le corollaire:

Corollaire *La systole est une fonction de Morse topologique sur l'espace de Teichmüller.*

On obtient ainsi une formule d'Euler pour la caractéristique d'Euler-Poincaré du groupe modulaire $\Gamma_{g,n}$ en fonction des surfaces eutactiques (voir chapitre 3).

En utilisant la connexion mentionnée ci-dessus, on retrouve le résultat de A. Ash ([As1]).

On peut aussi construire facilement des fonctions de Morse équivariantes sous l'action d'un sous-groupe discret d'isométries. En particulier, cela donne une formule d'Euler pour calculer la caractéristique d'Euler du sous-groupe (modulo un algorithme de détermination des points eutactiques).

1.4 Autres exemples de systoles généralisées

1.4.1 Le k-invariant d'Hermite

Le k-invariant d'Hermite a été étudié tout d'abord par R. A. Rankin [Ran] puis repris par A. M. Bergé, J. Martinet [BM1] et R. Coulangeon [Cou]. Il s'agit du minimum des déterminants des sections k-dimensionnelles d'un réseau.

On a une famille de longueurs paramétrée par les familles $U = (u_1, \dots, u_k)$ de k-vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^n$ et définies sur P_n par

$$l_U(A) = det(\ {}^tUAU).$$

On pose

$$\mu_k = min_U l_U$$

On connaît le théorème de Voronoï pour cette systole généralisée ([Cou]) et la condition (C) est vérifiée ([Ba1]).

1.4.2 Restrictions de systoles généralisées

Soit $\mu = \min_{l_u \in \mathcal{C}} l_u$ une systole généralisée sur M. Si N est une sous-variété de M, la restriction de μ à N reste trivialement une systole généralisée.

Restrictions à l'orbite d'un sous-groupe

Si G est un sous-groupe de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$, il agit sur P_n et on peut s'intéresser à l'invariant d'Hermite restreint à l'orbite d'un point sous l'action de G. Par transitivité, on peut toujours se ramener à l'orbite de l'identité. Pour certains choix de sous-groupes G, on obtient différentes familles de réseaux possédant certaines propriétés algébriques. Ce genre d'exemple a été étudié par A. M. Bergé et J. Martinet pour certaines familles de réseaux (orthogonaux ($G = SO_0(p, q)$), symplectiques ($G = Sp(g, \mathbb{R})$), réseaux stables pour un groupe d'automorphismes (G est le commutant du groupe).....voir [BM3],[BM2]).

Le choix de différents G dans la liste donnée par E. Cartan (voir [Hel]) permet de plonger les espaces symétriques irréductibles non exceptionnels de type non compact dans P_n. Pour chaque sous-groupe, on obtient des familles de réseaux avec différentes propriétés algébriques.

Dans le chapitre 2, on démontre la condition (C) pour tous ces sous-groupes. En particulier, on a un théorème de Voronoï pour toutes ces familles de réseaux.

En général, les dérivées secondes ne sont pas définies positives et on ne dispose pas de la théorie de Morse dans ces exemples. Remarquons aussi que pour les réseaux symplectiques et orthogonaux, l'invariant d'Hermite n'est pas une fonction de Morse [Ba1].

Familles hyperboliques de réseaux symplectiques [Ba3]

Les réseaux symplectiques sont les réseaux qui admettent une isométrie σ de carré $-Id$ sur leurs duaux. Ils sont paramétrés par l'espace de Siegel $\mathcal{H}_g$. Pour $A \in P_g$, on associe une famille de réseaux symplectiques paramétrée par le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H}$ de la manière suivante:

$$\mathbb{H}A := \{zA \in \mathcal{H}_g, z \in \mathbb{H}\}$$

Pour chaque $A \in P_g$, la restriction des longueurs à ces familles donne une systole généralisée sur $\mathbb{H}$. Ces exemples ont été étudiés par Ch. Bavard. En particulier, il démontre un théorème de Voronoï pour ces familles. Les dérivées secondes des longueurs sont définies positives et on a une théorie de Morse pour cet exemple. Remarquons que les gradients des longueurs peuvent s'annuler, ce qui n'est pas le cas pour l'invariant d'Hermite classique et la systole des surfaces de Riemann.

1.4.3 Systole généralisée sur l'espace de Teichmüller

On donne ici un autre exemple de systole généralisée définie sur l'espace de Teichmüller.

Invariant d'Hermite des Jacobiennes

Pour X dans l'espace de Teichmüller, on lui associe sa Jacobienne, ou plutôt sa matrice des périodes $J(X)$. On obtient alors une sous-familles de réseaux symplectiques sur laquelle on peut restreindre les longueurs des réseaux. L'application qui à X associe $J(X)$ est différentiable et, à travers celle-ci, on obtient un autre exemple μ_J de systole généralisée sur l'espace de Teichmüller. P. Buser et P. Sarnak ([B-S]) ont donné l'inégalité

$$\mu_J(X) \leq \frac{3}{\pi} log(4g+3)$$

pour cette systole généralisée sur l'espace de Teichmüller T_g.

Chapitre 2

Théorème de Voronoï dans les espaces symétriques

2.1 Introduction

Soit G un sous-groupe de Lie connexe de $SL(n, \mathbb{R})$ stable par transposition, l'orbite dans P_n de l'identité sous l'action de G définie par

$$g.A := gA^t g$$

est une sous-variété totalement géodésique de P_n [Ebe]. La restriction de l'invariant d'Hermite classique à ces sous-variétés reste une systole généralisée.

On s'intéresse dans ce chapitre au problème de caractérisation des points extrêmes dans ce cas particulier. Plus précisément, les espaces symétriques irréductibles de type non compact se plongent dans P_n sous l'action de certains sous-groupes de $SL(n, \mathbb{R})$. Le but de ce chapitre est de montrer le théorème suivant:

Théorème 1 *L'invariant d'Hermite restreint à une image isométrique d'un espace symétrique irréductible non exceptionnel de type non compact vérifie un théorème de Voronoï.*

La liste des sous-groupes peut être consultée dans [Hel].

L'orbite de l'identité sous l'action de chaque sous-groupe, et donc chaque espace symétrique irréductible, correspond ainsi à une image isométrique d'une famille de matrices de Gram de réseaux marqués munis de certaines structures algébriques (voir section 2.3.1). Les notations sont celles de Helgason [Hel] :

• $P_n = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, $SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$ et $SU^*(2n)/Sp(n)$ donnent des familles de réseaux sur des anneaux d'entiers. C'est un cas particulier de réseaux stables sous l'action d'un sous-groupe discret de $SL(n, \mathbb{R})$.

• $SO_0(p,q)/SO(p)\times SO(q)$, $SU(p,q)/S(U_p\times U_q)$, $Sp(p,q)/Sp(p)\times Sp(q)$ correspondent à des familles de réseaux isoduaux réels, complexes et quaternioniques, c'est-à-dire munis d'une isométrie de carré id du réseau sur son dual pour certaines formes sesquilinéaires.

• $SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$ et $SO^*(2n)/U(n)$ paramètrent les réseaux autoduaux complexes et quaternioniques.

• $Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$ et $Sp(n,\mathbb{C})/Sp(n)$ sont formés par les réseaux symplectiques réels et complexes. C'est-à-dire munis d'une isométrie de carré $-id$ du réseau sur son dual.

Dans un premier temps, on donne des conditions générales pour avoir un théorème de Voronoï. Ensuite, on applique ces critères pour les espaces symétriques irréductibles. Remarquons que le théorème de Voronoï et la condition (C) étaient connus pour les familles P_n, $SO_0(p,q)/SO(p)\times SO(q)$, $Sp(n,\mathbb{R})/U(n)$. On avait le théorème de Voronoï pour les G-réseaux (voir [BM3],[BM2],[Ba1]). On le démontre ici pour tous les autres cas ci-dessus.

2.2 Critères généraux pour la condition (C)

2.2.1 Cas de longueurs quelconques

On se place dans le cadre général du chapitre 1. Compte tenu du caractère local du problème, le lemme suivant est immédiat:

Lemme 2.2.1 *La condition (C) est invariante par difféomorphisme local.*

En particulier, il est clair que pour que celle-ci soit vérifiée en p, il est nécessaire et suffisant qu'elle le soit pour une carte centrée en p. De plus, puisque toutes les longueurs minimales ont la même valeur en p, on peut supposer que cette valeur est nulle. On peut ainsi ramener le problème à des longueurs définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, toutes nulles en 0.

On note $d_0^i f$ la dérivée i-ième de f en 0 et pour $x_1, x_2, \ldots, x_r$ dans $\mathbb{R}^n$, on note $x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_r^{k_r}$ le vecteur

$$(\underbrace{x_1,\ldots,x_1}_{k_1 \text{ fois}},\underbrace{x_2,\ldots,x_2}_{k_2 \text{ fois}},\ldots,\underbrace{x_r,\ldots,x_r}_{k_r \text{ fois}})$$

de $(\mathbb{R}^n)^{k_1+k_2+\ldots+k_r}$.

Lemme 2.2.2 *Soit $f:(\mathbb{R}^n,0)\to(\mathbb{R},0)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ et $c(t)=t\mathbf{x}+t^2\mathbf{y}(t)$ une courbe différentiable. On pose*

$$y_k=\frac{\mathbf{y}^{(k)}(0)}{k!}$$

et

$$E_{i,m} = \left\{ (\alpha_{-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-2}) \in \mathbb{N}^m, \sum_{k=-1}^{m-2} \alpha_k = i, i + \sum_{k=0}^{m-2} (k+1)\alpha_k = m \right\}.$$

Alors la dérivée m-ième ($m \geq 2$) de $f \circ c$ en 0 est

$$a_m = m! \sum_{i=1}^{m} \sum_{(\alpha_{-1},\alpha_0,\ldots,\alpha_n)\in E_{i,m}} \frac{1}{\alpha_{-1}! \ldots \alpha_n!} d_0^i f. \left(x^{\alpha_{-1}} \prod_{k=0}^{m-2} y_k^{\alpha_k} \right).$$

Preuve. On commence par écrire les développements de f et c en 0:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} d_0^i f.x^i + o(x^m)$$

$$c(t) = tx + \sum_{j=0}^{m-2} t^{j+2} y_j + o(t^m).$$

On compose alors ces deux développements:

$$f \circ c(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!} d_0^i f.(tx + \sum_{j=0}^{m-2} t^{j+2} y_j)^i + o(t^m).$$

On utilise la formule de multinôme pour la forme i-linéaire symétrique $d_0^i f$ et on met t en facteur dans chaque terme:

$$f \circ c(t) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{\alpha_{-1},\ldots,\alpha_{m-2}, \sum \alpha_k = i} \frac{t^{\left(\alpha_{-1} + \sum_{j=0}^{m-2} \alpha_j (j+2)\right)}}{\alpha_{-1}! \ldots \alpha_{m-2}!} d_0^i f. \left(x^{\alpha_{-1}} \prod_{j=0}^{m-2} y_j^{\alpha_j} \right) + o(t^m).$$

On voit alors que l'exposant de t vaut m si et seulement si $(\alpha_{-1}, \ldots, \alpha_{m-2})$ appartient à $E_{i,m}$. ∎

Donnons ici les premiers a_i:

$$\begin{aligned}
a_1 &= d_0 f.x \\
a_2 &= 2 d_0 f.y_0 + d_0^2 f.x^2 \\
a_3 &= 6 d_0 f.y_1 + 6 d_0^2 f.x y_0 + d_0^3 f.x^3 \\
a_4 &= 24 d_0 f.y_2 + 12 d_0^2 f.y_0^2 + 24 d_0^2 f.x y_1 + 12 d_0^3 f.x^2 y_0 + d_0^4 f.x^4
\end{aligned}$$

Dans toute la suite de ce paragraphe, on se donne une famille finie $S(0) = \{l_u, u \in \mathcal{C}\}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 toutes nulles en 0.

Pour chaque longueur l_u, le lemme précédent donne une famille de coefficients $a_k(u)$ qui sont les dérivées de l_u le long de la courbe c et qui dépendent des variables y_i, $i \leq k$.

Lemme 2.2.3 *Soit $T \subset S(0)$ et $X \in \mathbb{R}^n$ annulant les différentielles des longueurs de T,*

1. *On suppose qu'il existe une famille d'entiers $m(u), u \in T$ telle que le système*
$$\mathcal{S} : \begin{cases} a_k(u) = 0 \text{ si } k < m(u) \\ a_{m(u)} > 0 \end{cases}$$
admette une solution en y_k. Alors la condition (C) est vérifiée pour X et T.
2. *On suppose que la condition (C) est vérifiée, alors pour tout X et T comme ci-dessus, le système*
$$\begin{cases} a_k(u) = 0 \text{ si } k < m(u) \\ a_{m(u)} \geq 0 \end{cases}$$
admet une solution en y_k.

Preuve. 1. Une solution y_k donne la courbe $c(t) = tx + t^2\left(\sum_k t^k y_k\right)$ réalisant la condition (C).

2. Si c est une courbe réalisant la condition (C), la première dérivée non nulle de $l_u \circ c$ ne peut pas être strictement négative puisque cette fonction est strictement croissante. On en déduit le lemme. ∎

Remarques

1. Si X est orthogonal aux gradients de T, les coefficients $a_1(u)$ sont nuls pour tout $u \in T$. Il suffit de résoudre le système pour les k supérieurs ou égaux à 2.
2. Lorsque la variété et les longueurs sont analytiques, le système $\mathcal{S}$ donne une condition nécessaire et suffisante pour réaliser la condition (C) par une courbe analytique. En effet, il doit forcément y avoir une dérivée non nulle pour que $f \circ c$ le soit.

L'écriture de $\mathcal{S}$ à l'ordre 2 et 4 sera utile pour vérifier la condition (C) dans les sous-variétés de P_n.

$\mathcal{S}$ à l'ordre 2
$$2d_0 l_u.y_0 + d_0^2 l_u.x^2 > 0$$

$\mathcal{S}$ à l'ordre 4

$$\begin{aligned}
a_2 = &\quad 2d_0f.y_0 + d_0^2f.x^2 = 0 \\
a_3 = &\quad 6d_0f.y_1 + 6d_0^2f.xy_0 + d_0^3f.x^3 = 0 \\
a_4 = &\quad 24d_0f.y_2 + 12d_0^2f.y_0^2 + 24d_0^2f.xy_1 + 12d_0^3f.x^2y_0 + d_0^4f.x^4 > 0
\end{aligned}$$

On peut aussi se limiter au cas $c(t) = tx + t^2y$, auquel cas, le système à l'ordre 4 se simplifie en:

$$\begin{aligned}
a_2 = &\quad 2d_0f.y + d_0^2f.x^2 = 0 \\
a_3 = &\quad 6d_0^2f.xy + d_0^3f.x^3 = 0 \\
a_4 = &\quad 12d_0^2f.y^2 + 12d_0^3f.x^2y + d_0^4f.x^4 > 0
\end{aligned}$$

2.2.2 Cas de fonctions convexes

On suppose maintenant que V est muni d'une métrique riemanienne.

On rappelle qu'une fonction est dite *convexe* (respectivement *strictement convexe*) si elle l'est le long de toute géodésique paramétrée par longueur d'arc. En particulier, elle est radialement convexe dans la carte exponentielle centrée en tout point. De plus, si W est une sous-variété totalement géodésique de V, la restriction à W d'une fonction convexe (respectivement strictement convexe) reste évidemment convexe (respectivement strictement convexe). Dans le cas de P_n, les longueurs sont des exponentielles de fonctions de Busemann [Ba1], et sont donc convexes. Dans le cas des longueurs géodésiques sur les surfaces de Riemann, celles-ci sont strictement convexes le long des géodésiques de Weil-Petersson [Wol]. La convexité permet de simplifier la réalisation de la condition (C). Par exemple, cette dernière est trivialement vérifiée lorsque la convexité est stricte puisqu'il suffit de choisir la géodésique définie par (p, X). On peut aussi se limiter à supposer seulement la stricte convexité radiale par rapport au gradient (c'est-à-dire convexité le long des géodésiques orthogonales au gradient de la fonction).

On note $\nabla_u(0)$ ou plus simplement ∇_u le gradient de l_u en 0, H_u (respectivement H_u^+) l'orthogonal de $\nabla_u(0)$, (respectivement le demi-espace positif défini par $\nabla_u(0)$), et N_u le cône isotrope de la dérivée seconde de l_u en 0. Si ∇_u est nul, $H_u = \mathbb{R}^n$ et H_u^+ est vide.

Lemme 2.2.4 *On suppose que les longueurs sont convexes. Pour $T \subset S(0)$ et pour X orthogonal aux gradients de T, on pose $T_1(X) := \{u \in T, X \in N_u\}$. On* *suppose que pour tout X orthogonal aux gradients des longueurs de T,*

$$\bigcap_{u\in T_1(X)} H_u^+ \neq \emptyset$$

alors la condition (C) est vérifiée.

Preuve. On choisit $y = y_0$ dans cette intersection et les autres y_i nuls. Si u n'est pas dans $T_1(X)$, la dérivée seconde de l_u agissant sur X est strictement positive par convexité donc, quitte à réduire y, on peut supposer que les coefficients $a_2(u)$ sont positifs pour $u \notin T_1(X)$. Si $u \in T_1(X)$, on a $a_2(u) = d_0 l_u.y > 0$ par choix de y. On obtient ainsi une solution de $\mathcal{S}$ à l'ordre 2. ■

Remarquons que cette condition est vérifiée en tout point ordinaire.

Par définition, le noyau d'une forme multilinéaire symétrique F est l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la forme p-linéaire qui à $(y_1, \ldots, y_p)$ associe $F(x, y_1, \ldots, y_p)$ soit identiquement nulle :

$$N_F := \{x \in \mathbb{R}^n, \text{pour tout } (y_1, \ldots, y_p),\ F(x, y_1, \ldots, y_p) \equiv 0\}.$$

Proposition 2.2.1 *On suppose les longueurs convexes. Pour $T \subset S(0)$ et X orthogonal aux gradients de T, on pose $T_1(X) = \{u \in T, X \in N_u\}$. On suppose que pour tous T et X, on a les conditions suivantes:*

1. *Pour tout $u \in T_1(X)$, N_u contient le noyau des dérivées de l_u d'ordre supérieur ou égal à 2.*
2. *L'ensemble*

$$E = \left[\bigcap_{u\in T_1(X)} H_u^+\right] \cup \left[\left(\bigcap_{u\in T_1(X)} H_u\right) \cap \left(\bigcap_{u\in T_1(X)} (\mathbb{R}^n \backslash N_u)\right)\right]$$

est non vide.

alors la condition (C) est vérifée.

Preuve. On choisit y dans E et on regarde $\mathcal{S}$ à l'ordre 4. Remarquons que E est stable par multiplication par un scalaire strictement positif et que E ne contient pas le vecteur nul.

Si u n'est pas dans $T_1(X)$, par convexité, on a $d_0^2 l_u.X^2 > 0$ et on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $2\varepsilon d_0 l_u.y + d_0^2 l_u.X^2 > 0$.

Si $u \in T_1(X)$ et $y \in \bigcap_{u\in T_1(X)} H_u^+$, alors

$$2\varepsilon d_0 l_u.y + d_0^2 l_u.X^2 = 2\varepsilon d_0 l_u.y > 0$$

Supposons donc que $u \in T_1(X)$ et que

$$y \in \left(\bigcap_{u \in T_1(X)} H_u \right) \cap \left(\bigcap_{u \in T_1(X)} (\mathbb{R}^n \backslash N_u) \right).$$

D'après l'hypothèse (1), le système $\mathcal{S}$ s'écrit:

$$\begin{aligned} a_2 &= \quad 0 \\ a_3 &= \quad 0 \\ a_4 &= \quad d_0^2 f.y^2 > 0 \text{ par convexité} \end{aligned}$$

La courbe $c(t) = tX + t^2 y$ réalise alors la condition (C). ■

2.3 La condition (C) dans les sous-variétés totalement géodésiques de P_n

2.3.1 Généralités

Soit G un sous-groupe de Lie connexe de $SL(n, \mathbb{R})$, on s'intéresse à l'orbite de I sous l'action de G induite par celle de $SL(n, \mathbb{R})$. Lorsque G est stable par transposition, on obtient une sous-variété totalement géodésique de P_n (cf [Ebe] p 131) correspondant à l'espace des paramètres de certaines familles de réseaux. Remarquons que G agit par isométries sur P_n et sur $G.I$. Par transitivité, on se ramène dans tous les cas à étudier la condition (C) en l'identité pour des longueurs paramétrées par $\mathbb{R}^n$.

Plus précisément, si $\Lambda = {}^tP_0.\mathbb{Z}^n$ est un réseau marqué, les matrices de Gram de la famille $G.\Lambda$ parcourent l'image isométrique $P_0(G.I)\ {}^tP_0$ de $G.I$. Par transitivité, il est alors équivalent d'étudier l'invariant d'Hermite restreint à cette sous-variété et d'étudier le minimum sur $G.I$ des fonctions $l_{{}^tP_0.u}$, $u \in \mathbb{Z}^n$.

En prenant différents sous-groupes, on obtient des sous-variétés totalement géodésiques de P_n isométriques aux espaces symétriques irréductibles de type non compact.

L'espace tangent en I à P_n est l'espace $S_n^0(\mathbb{R})$ des matrices réelles symétriques de trace nulle et la carte exponentielle en I est donnée par l'exponentielle habituelle des matrices. L'expression des longueurs dans cette carte est donnée par

$$\tilde{l}_u(X) = {}^tu e^X u$$

On note $I_{p,q}$, J_{2n}, L_{4n}, $K_{p,q}$ et T_{2n} les matrices suivantes:

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

$$J_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{4n} = \begin{pmatrix} J_{2n} & 0 \\ 0 & -J_{2n} \end{pmatrix}$$

$$K_{p,q} = \begin{pmatrix} I_{p,q} & 0 \\ 0 & I_{p,q} \end{pmatrix}$$

$$T_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Si G un sous-groupe de $SL(n,\mathbb{C})$, on plonge naturellement G comme sous-groupe de $SL_{2n}(\mathbb{R})$ par l'application $\Phi_{\mathbb{C}}$ définie de $M_n(\mathbb{C})$ dans $M_{2n}(\mathbb{R})$ par

$$\Phi_{\mathbb{C}}(Z = X + iY) = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix}$$

et on regarde l'action de G sur P_n donnée par $\Phi_{\mathbb{C}}(G)$.

On note aussi $\theta_{\mathbb{C}}$ l'application de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{R}^{2n}$ définie par

$$\theta_{\mathbb{C}}(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

Rappelons ici les propriétés de $\Phi_{\mathbb{C}}$ et $\theta_{\mathbb{C}}$ utiles par la suite

Lemme 2.3.1 *Soient Z_1, Z_2 des matrices de $M_n(\mathbb{C})$,*

1. *$\Phi_{\mathbb{C}}$ est injective.*
2. *$\Phi_{\mathbb{C}}(Z_1 Z_2) = \Phi_{\mathbb{C}}(Z_1)\Phi_{\mathbb{C}}(Z_2)$.*
3. *${}^t\Phi_{\mathbb{C}}(Z_1) = \Phi_{\mathbb{C}}({}^t\overline{Z_1})$.*
4. *${}^t\theta_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}_1)\Phi_{\mathbb{C}}(Z)\theta_{\mathbb{C}}(\mathbf{z}_2) = \Re({}^t\overline{\mathbf{z}_1} Z \mathbf{z}_2)$*
5. *$\theta_{\mathbb{C}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.*
6. *$det(\Phi_{\mathbb{C}}(Z)) = |det(Z)|^2$, en particulier, $\Phi_{\mathbb{C}}(SL(n,\mathbb{C}))$ est un sous-groupe de $SL(2n,\mathbb{R})$.*

Soit $\mathbb{H}$ le corps des quaternions, pour $h \in \mathbb{H}$, on écrit $h = z_1 + jz_2$ avec $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On note $\pi(z_1 + jz_2) = z_1$. On décompose de même les vecteurs de $\mathbb{H}^n$ et les matrices de $M_n(\mathbb{H})$. On pose

$$\begin{array}{cccc} \Phi_{\mathbb{H}} : & M_n(\mathbb{H}) & \to & M_{2n}(\mathbb{C}) \\ & Z_1 + jZ_2 & \mapsto & \begin{pmatrix} Z_1 & -\overline{Z_2} \\ Z_2 & \overline{Z_1} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\theta_{\mathbb{H}}(z_1 + jz_2) = (z_1, z_2)$$

$$i(z_1 + jz_2) = z_1 + j\overline{z_2}$$

Les propriétés de $\theta_{\mathbb{H}}$ et $\Phi_{\mathbb{H}}$ suivantes sont immédiates:

Lemme 2.3.2 *Soit $H \in M_n(\mathbb{H})$ et $h \in \mathbb{H}^n$*

1. $\Phi_{\mathbb{H}}(H)\theta_{\mathbb{H}}(h) = \theta_{\mathbb{H}}(Hh)$
2. ${}^t\overline{\theta_{\mathbb{H}}(h_1)}T\theta_{\mathbb{H}}(h_2) = \pi(-j\ {}^ti(h_1)h_2)$

Soit G un sous-groupe de Lie de $SL(n, \mathbb{R})$, on note V_G l'orbite de l'identité sous l'action de G. Le stabilisateur de l'identité dans G est $G \cap O(n)$ et on obtient une sous-variété isométrique à

$$G/G \cap O(n).$$

Dans le cas d'un sous-groupe complexe, à travers $\Phi_{\mathbb{C}}$, on a

$$Stab_G(I) = \{g \in G, {}^t\overline{g}g = I\} = G \cap U(n).$$

L'espace tangent en I à V_G est donné par l'image de l'algèbre de Lie de G par l'application qui à g associe ${}^tg + g$. Dans le cas d'un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{C})$, l'espace tangent en I à V_G est l'image par $\Phi_{\mathbb{C}}$ de l'ensemble $Sym(\mathfrak{g}) := \{{}^t\overline{g} + g, g \in \mathfrak{g}\}$, où $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie de G dans $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = S_n^0(\mathbb{C})$.

Pour un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ qui donne une sous-variété totalement géodésique de P_n, on a le lemme suivant:

Lemme 2.3.3 *Soit X une matrice symétrique de trace nulle orthogonale aux gradients de $T \subset S(I)$, on suppose qu'il existe Y dans l'espace tangent en I à $G.I$ telle que, pour tout $u \in S(I)$ avec $Xu = 0$,*

$$\mathcal{S}_1 : \begin{cases} {}^tuYu & = & 0 \\ Yu & \neq & 0 \end{cases}$$

Alors $G.I$ vérifie la condition (C).

Preuve. On regarde la condition (C) dans la carte exponentielle en I, le système $\mathcal{S}$ à l'ordre 4 s'écrit

$$\begin{array}{rl} 2{}^tuYu + |Xu|^2 = & 0 \\ 6{}^tu(XY + YX)u + {}^tuX^3u = & 0 \\ 24|Yu|^2 + 4{}^tu(X^2Y + XYX + YX^2)u + |X^2u|^2 > & 0. \end{array}$$

On remarque que $X \in N_u$ si et seulement si $Xu = 0$, donc que $u \in T_1(X)$ si et seulement si $Xu = 0$. Le vecteur X est alors dans le noyau des dérivées supérieures de l_u. On peut appliquer la proposition 2.2.1. La condition

$$Y \in \left(\bigcap_{u \in T_1(X)} H_u \right) \cap \left(\bigcap_{u \in T_1(X)} (\mathbb{R}^n \backslash N_u) \right)$$

s'écrit

$$\begin{aligned} tuYu &= 0 \qquad (Y \in H_u) \\ Yu &\neq 0 \qquad (Y \notin N_u) \end{aligned}$$

pour tout $u \in T_1(X)$. ■

E. Cartan a donné la liste des espaces symétriques irréductibles. En étudiant chaque cas, on démontre le théorème suivant:

Théorème 2.3.1 *L'invariant d'Hermite restreint à un espace symétrique irréductible non exceptionnel de type III ou IV plongé dans P_n vérifie un théorème de Voronoï.*

Donnons de suite la liste des cas à considérer. Les notations pour les groupes sont celles de Helgason [Hel].

Type III: $P_n = SL(n, \mathbb{R})/SO(n)$, $SU(p,q)/S(U_p \times U_q)$, $SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q)$, $SU^*(2n)/Sp(n)$, $SO^*(2n)/U(n)$, $Sp(p,q)/Sp(p) \times Sp(q)$, $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$.

Type IV: $SL_n(\mathbb{C})/SU(n)$, $SO(n, \mathbb{C})/SO(n)$, $Sp(n, \mathbb{C})/Sp(n)$.

Rappelons que dans tous les cas, par transitivité, on se ramène à une famille finie de longueurs paramétrées par $\mathbb{R}^n$ (plus précisément de la forme $l_{^tP_0u}(A)$, $u \in \mathbb{Z}^n$, $A \in G.I$) au voisinage de l'identité.

On ne traitera pas le cas des espaces P_n, $SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q)$, $Sp(n, \mathbb{R})/U(n)$ pour lesquels la condition (C) est connue [Ba1].

2.3.2 G-réseaux et réseaux sur des anneaux d'entiers

Soit ρ une représentation d'un groupe fini G dans $SL(n, \mathbb{Z})$, on s'intéresse aux réseaux marqués invariants sous $\rho(G)$.

On se donne donc un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{Z})$ et on note $\mathcal{E}_G$ l'ensemble des réseaux marqués stables par G. Soit $(\Lambda_0, (e_1^0, \dots, e_n^0))$ un réseau stable par G, alors $\Lambda = {}^tP.\Lambda_0$ est stable par G si et seulement si pour tout $g \in G$, $g\,{}^tP.\Lambda_0 = {}^tP.\Lambda_0 = {}^tPg.\Lambda_0$. La matrice $g^{-1}\,{}^tP^{-1}g\,{}^tP$ est donc un automorphisme du réseau

Λ_0. On voit donc que, pour P suffisament proche de I, P doit appartenir au commutant de ${}^tG$ dans $SL(n,\mathbb{R})$. L'ensemble des G-réseaux $\mathcal{E}_G$ est donc réunion d'orbites du commutant de ${}^tG$ dans $SL(n,\mathbb{R})$.

Réseaux complexes

Soit (E,H) un espace Hermitien, on considère les $\mathbb{Z}[i]$-modules de rang maximal dans E. Tout $\mathbb{Z}[i]$-module est aussi un réseau dans l'espace Euclidien associé à (E,H) et la norme d'un tel réseau et égale à sa norme pour la forme Hermitienne H. Soit $P_n^{\mathbb{C}}$ l'espace des matrices de “Gram” complexes, c'est-à-dire l'espace des matrices Hermitiennes de déterminant 1 et soit $\mathcal{E}$ l'espace des $\mathbb{Z}[i]$-modules marqués. A une base $e_i = {}^t\,\overline{P}.\varepsilon_i$, on associe la matrice $P{}^t\overline{P} \in P_n^{\mathbb{C}}$. Ceci permet d'identifier $\mathcal{E}$ modulo isométrie complexe à $P_n^{\mathbb{C}}$. D'autre part, à travers $\Phi_{\mathbb{C}}$, on vérifie que $P_n^{\mathbb{C}}$ s'identifie aussi à l'orbite de l'identité dans P_{2n} sous l'action du sous-groupe $\Phi_{\mathbb{C}}(SL(n,\mathbb{C}))$ qui est le commutant dans $SL(2n,\mathbb{R})$ de la matrice J_{2n}.

On peut identifier ces réseaux aux réseaux stables pour la représentation de $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ définie par $\rho(1) = J_{2n}$.

Les $\mathbb{Z}[i]$-modules marqués sont ainsi paramétrés par

$$V_{SL(n,\mathbb{C})} = SL(n,\mathbb{C}).I$$

On regarde le stabilisateur de l'identité pour cette action. On a

$$Stab_{SL(n,\mathbb{C})}(I) = SL(n,\mathbb{C}) \cap U(n) = SU(n)$$

et

$$V_{SL(n,\mathbb{C})} \simeq SL(n,\mathbb{C})/SU(n)$$

Puisque ${}^tJ_{2n} = -J_{2n}$, ce sous-groupe est stable par transposition.

Réseaux quaternioniques

De même, soit (E,S) un espace vectoriel quaternionique à droite munit d'une forme sesquilinéaire. Par définition, le déterminant d'une matrice de $M_n(E)$ sera celui de la matrice complexe associée à travers $\Phi_{\mathbb{H}}$. On considère alors les $\mathbb{Z}[i,j,k]$-modules à droite de rang n. Ces modules peuvent être considérés en particulier comme des $\mathbb{Z}[i]$-modules de rang $2n$. De la même manière que pour les réseaux complexes, on peut identifier l'espace de ces $\mathbb{Z}[i,j,k]$-modules avec un sous-espace de $P_{2n}^{\mathbb{C}}$. Cet espace s'identifie à l'ensemble des matrices qui commutent avec la multiplication à droite par j, on vérifie que c'est l'orbite de l'identité sous l'action de $SU^*(2n)$ dans $P_{2n}^{\mathbb{C}}$ où $SU^*(2n)$ le sous-groupe de $SL_{2n}(\mathbb{C})$ formé des matrices qui commutent avec la transformation réelle

$$\psi(z_1,\ldots,z_{2n}) = (\overline{z_{n+1}},\ldots,\overline{z_{2n}},-\overline{z_1},\ldots,-\overline{z_n})$$

Remarquons que on peut ici prendre la représentation de

$$Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

définie par $\rho(i) = L_{4n}$, $\rho(j) = J_{4n}$.

On vérifie alors que $\Phi_{\mathbb{C}}(SU^*(2n))$ s'identifie au commutant dans $SL_{4n}(\mathbb{R})$ des matrices J_{4n} et L_{4n}. Le stabilisateur de I est $U(2n) \cap SU^*(2n) = Sp(n)$ (voir [Hel] pp 343, 344).

Proposition 2.3.1 *Soit G un sous-groupe de $SL(n, \mathbb{R})$ stable par transposition et défini par des relations de commutation dans $M_n(\mathbb{R})$, alors V_G vérifie la condition (C).*

Preuve. Par linéarité, l'algèbre de Lie de G et l'espace tangent en I à V_G sont définis par les mêmes relations. Si X est une matrice de $T_I V_G$, on pose

$$Y = \frac{Tr(X^2)}{n} I - X^2$$

et $c(t) = tX + t^2 Y$. On vérifie que Y appartient à l'espace tangent en I. De plus,

$$< \nabla_u(I), Y >= {}^t u Y u = 2\frac{Tr(X^2)}{n} |u|^2 > 0$$

pour tout $u \in S(I)$. On a donc $Y \in \bigcap_{u \in T_1(X)} H_u^+$ et on applique le lemme 2.2.4. ∎

Le corollaire suivant est alors immédiat:

Corollaire 2.3.1

$$V_{SL(n,\mathbb{C})} \simeq SL(n, \mathbb{C})/SU(n)$$

et

$$V_{SU^*(2n)} \simeq SU^*(2n)/Sp(n)$$

vérifient la condition C.

Exemples

1. Ce lemme permet de retrouver la condition (C) dans P_n qui est seulement l'orbite du commutant de l'identité. Plus généralement, celle-ci est vérifiée pour les réseaux G-stables lorsque G est un sous-groupe fini de $SL(n, \mathbb{Z})$ (cf [BM2] pour le théorème de Voronoï).
2. Soit V le sous-ensemble de P_n formé par les réseaux qui se décomposent en somme orthogonale $\Lambda_1 \perp \ldots \perp \Lambda_k$ avec Λ_i de dimension n_i. En choisissant une base de chaque Λ_i, on voit que la matrice de Gram de Λ se décompose en une matrice diagonale par blocs de taille $n_i, 1 \leq i \leq k$. En particulier, on peut trouver une matrice g de $SL(n, \mathbb{R})$ qui commute avec la matrice diagonale par blocs $D = diag(I_{n_1}, 2I_{n_2}, \ldots, kI_{n_k})$ et telle que $Gram(\Lambda) = g.I$. D'un autre coté, l'orbite de I sous l'action du commutant de D est l'ensemble des matrices symétriques G de déterminant 1 telles que $G = DGD^{-1}$. On vérifie alors par récurrence sur k que $G.I = V$. La famille de réseaux formées par les réseaux qui se décomposent en somme orthogonale $\Lambda = \Lambda_1 \perp \ldots \perp \Lambda_k$ vérifie la condition (C).

2.3.3 Familles de réseaux orthogonaux

Soit E un espace Euclidien et σ une isométrie de E telle que $\sigma^2 = Id$, $\sigma \neq \pm Id$. Un réseau Λ est σ-orthogonal si σ est une isométrie de Λ sur son dual. Quitte à choisir une base de E, on peut supposer que la matrice de σ est $I_{p,q}$. Les réseaux σ-orthogonaux forment alors une ou deux orbites du groupe $SO_0(p,q)$ ([BM3]). On obtient des sous-variétés totalement géodésiques isométriques à l'espace symétrique

$$SO_0(p,q)/SO(p) \times SO(q).$$

Réseaux orthogonaux complexes

Si Λ est un $\mathbb{Z}[i]$-module dans un espace Hermitien E, on note $\Lambda_{\mathbb{C}}^*$ son dual complexe, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs y tels que $H(x,y) \in \mathbb{Z}[i]$ pour tout $x \in \Lambda$. Quitte à choisir une base, on peut supposer que Λ est un $\mathbb{Z}[i]$-module dans $\mathbb{C}^n$. On note $\Lambda_{\mathbb{C}}$ ce $\mathbb{Z}[i]$-module et $\Lambda_{\mathbb{R}}$ le réseau image de $\Lambda_{\mathbb{C}}$ par $\theta_{\mathbb{C}}$. On vérifie facilement que le dual de $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est l'image du dual complexe de $\Lambda_{\mathbb{C}}$. Supposons maintenant que $\Lambda_{\mathbb{C}}$ admette un automorphisme Hermitien σ de $\Lambda_{\mathbb{C}}$ sur $\Lambda_{\mathbb{C}}^*$ tel que $\sigma^2 = Id$, alors le réseau $\Lambda_{\mathbb{R}}$ est σ-orthogonal.

Soit $\mathcal{E}$ l'espace des réseaux σ-orthogonaux complexes, en procédant comme dans [BM3], on vérifie que si Λ est un tel réseau et si $g \in SL(n,\mathbb{C})$,

$$g.\Lambda \in \mathcal{E} \Leftrightarrow {}^t\overline{g}\sigma g \in \sigma.Aut(\Lambda)$$

Par connexité de $SU(p,q)$, la composante connexe dans $\mathcal{E}$ d'un tel réseau est l'orbite de ce réseau sous l'action de $SU(p,q)$, et $\mathcal{E}$ est réunion finie de telles orbites. De plus, par transitivité de $SL(n,\mathbb{R})$, toutes les orbites sont isométriques à l'orbite de l'identité $SU(p,q).I$. Le stabilisateur de l'identité est $S(U_p \times U_q)$ et on obtient ainsi une réunion d'images isométriques de

$$V_{SU(p,q)} \simeq SU(p,q)/S(U_p \times U_q)$$

On a

$$SU(p,q) = \{g \in SL_{p+q}(\mathbb{C}), {}^t\overline{g}I_{p,q}g = I_{p,q}\}$$

$$S(U_p \times U_q) = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix}, g_1 \in U(p), g_2 \in U(q), det(g_1)det(g_2) = 1 \right\}$$

$$\mathfrak{s}u(p,q) = \{g \in M^0_{p+q}(\mathbb{C}), {}^t\overline{g}I_{p,q} + I_{p,q}g = 0\}$$

$$Sym(\mathfrak{s}u(p,q)) = \left\{ g = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ {}^t\overline{Z} & 0 \end{pmatrix}, Z \in M_{p,q}(\mathbb{C}) \right\}$$

Proposition 2.3.2 *$V_{SU(p,q)} \simeq SU(p,q)/S(U_p \times U_q)$ vérifie la condition (C)*

Preuve. Le système $\mathcal{S}_1$ s'écrit à travers $\Phi_{\mathbb{C}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Re({}^t\overline{z}Y_{\mathbb{C}}z) = &\quad 0 \\ Y_{\mathbb{C}}z = &\quad 0 \end{aligned}$$

$Y_{\mathbb{C}}$ doit se décomposer sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & Y \\ {}^t\overline{Y} & 0 \end{pmatrix}$. De même, si X est une matrice orthogonale aux gradients de T, X se décompose sous la forme $\begin{pmatrix} 0 & X \\ {}^t\overline{X} & 0 \end{pmatrix}$ à travers $\Phi_{\mathbb{C}}$ et $T_1(X) = \{u \in T, Xu = 0\}$ s'identifie par $\theta_{\mathbb{C}}$ à l'ensemble $\tilde{T_1} := \{(z_1, z_2, , Xz_2 = {}^t\overline{X}z_1 = 0\}$.

Soit A (respectivement B) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^p$ (respectivement $\mathbb{C}^q$) engendré par les z_1 tels que $(z_1, z_2) \in \tilde{T_1}$ (respectivement les z_2 tels que $(z_1, z_2) \in \tilde{T_1}$). Les sous-espaces A et B sont différents de $\mathbb{C}^p$ et $\mathbb{C}^q$. Il existe $u : \mathbb{C}^q \to \mathbb{C}^p$ avec $u(A) \subset B^\perp$, ${}^t\overline{u}(B) \subset A^\perp$ et $u(z_1)$ ou ${}^t\overline{u}(z_2)$ non nul dès que $(z_1, z_2) \in \tilde{T_1}$ (on rappelle que $\tilde{T_1}$ est *fini*). Si Y_1 est la matrice de u dans les bases canoniques , on vérifie que la matrice

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ {}^t\overline{Y_1} & 0 \end{pmatrix}$$

résoud $\mathcal{S}_1$. ∎

Réseaux orthogonaux quaternioniques

Soit σ une isométrie de carré Id sur un espace quaternionique muni d'une forme sesquilinéaire (E, S). On s'intéresse aux réseaux quaternioniques tels que σ soit une isométrie de Λ sur son dual

$$\Lambda^*_{\mathbb{H}} = \{y \in E, S(x, y) \in \mathbb{Z}[i, j] \text{ pour tout } x \in \Lambda\}$$

Comme pour les orthogonaux complexes, on vérifie que l'espace des paramètres de tels réseaux s'identifie à une réunion d'images isométriques de

$$V_{Sp(p,q)} \simeq Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q).$$

$$Sp(p, q) = \{g \in Sp(p + q, \mathbb{C}), {}^t gK_{p,q}\overline{g} = K_{p,q}\}$$

$$\mathfrak{sp}(p, q) = \{g \in \mathfrak{sp}(p + q, \mathbb{C}), {}^t gK_{p,q} + K_{p,q}\overline{g} = 0\}$$

$$Sym(\mathfrak{sp}(p, q)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z_1 & 0 & Z_2 \\ {}^t\overline{Z_1} & 0 & {}^tZ_2 & 0 \\ 0 & \overline{Z_2} & 0 & -\overline{Z_1} \\ {}^t\overline{Z_2} & 0 & -{}^tZ_1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Proposition 2.3.3 *$V_{Sp(p,q)} \simeq Sp(p, q)/Sp(p) \times Sp(q)$ vérifie la condition (C)*

Preuve. A travers $T\Phi_{\mathbb{H}}$, on identifie $Sym(\mathfrak{sp}(p,q))$ à

$$\left\{ H \in M_n(\mathbb{H}), H = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 + jZ_2 \\ {}^tZ_1 + j{}^t\overline{Z_2} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

et le système $\mathcal{S}_1$ s'écrit

$$\begin{aligned} \pi(-j{}^ti(h)Hh) = & \quad 0 \\ Hh \neq 0 & \end{aligned}$$

où on a identifié $T_1(X)$ à un sous-ensemble fini de $\mathbb{H}^n$.

On décompose les vecteurs de $\mathbb{H}^n$ en (h_1, h_2) et soit A (respectivement B) le sous-espace engendré par les h_1 tels que $(h_1, h_2) \in T_1(X)$ (respectivement les h_2 tels que $(h_1, h_2) \in T_1(X)$) et soit N un supplémentaire de B dans $\mathbb{H}^n$. On munit $\mathbb{H}^n$ de la forme ${}^ti(h)h'$. Il existe une application linéaire u de B dans $A^\perp$ telle que $u(h_2) \neq 0$ si $h_2 \neq 0$. D'autre part, $\cup_{h_1 \neq 0} h_1^\perp$ est une réunion finie d'hyperplans, donc il existe une application v de N dans $\mathbb{H}^p$ telle que $v(N) \not\subset \cup_{h_1 \neq 0} h_1^\perp$. On pose

$$\phi = \begin{cases} u \text{ sur } B \\ v \text{ sur } N \end{cases}$$

Soit Y la matrice de ϕ, on pose

$$H = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ {}^ti(Y) & 0 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que H résoud $\mathcal{S}_1$ ■

2.3.4 Réseaux autoduaux

Soit $(E, <.,.>)$ un espace complexe (respectivement quaternionique) muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Quitte à prendre une base orthogonale, on peut supposer que $E = \mathbb{C}^n$ (respectivement $E = \mathbb{H}^n$), $< x, y >= {}^txy$ (respectivement $({}^tz_1 - j{}^t\overline{z_2})(z_1' + jz_2')$). Si Λ est un réseau de E, on note Λ^0 son dual par rapport à la forme $<.,.>$ et à l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ (respectivement $\mathbb{Z}[i,j,k]$). On s'intéresse aux réseaux tels que $\Lambda = \Lambda^0$. Comme précédemment, on peut vérifier que l'on obtient des images isométriques de

$$V_{SO(n,\mathbb{C})} \simeq SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$$

(respectivement $V_{SO^*(2n)} \simeq SO^*(2n)/U(n)$).

$$\begin{aligned} SO(n,\mathbb{C}) &= \{g \in SL(n,\mathbb{C}), {}^tgg = I\} \\ \mathfrak{so}(n,\mathbb{C}) &= \{g \in M_n^0(\mathbb{C}), {}^tg + g = 0\} \\ Sym(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C})) &= \left\{iY, Y \in M_n(\mathbb{C}), {}^tY + Y = 0\right\} \end{aligned}$$

Proposition 2.3.4 *$V_{SO(n,\mathbb{C})} \simeq SO(n,\mathbb{C})/SO(n)$ vérifie la condition (C).*

Preuve. L'espace tangent en I est

$$T_I V_{SO(n,\mathbb{C})} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -Y \\ Y & 0 \end{pmatrix}, Y +^t Y = 0 \right\}.$$

On décompose $u \in \mathbb{R}^{2n}$ en (a,b), alors $T_1(X) = \{(a,b), Xa = Xb = 0\}$.

Soit α l'endomorphisme représenté par X dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors $\ker \alpha^\perp$ est stable par α. Soit e_i une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle X s'écrit $\begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec X_1 inversible. Soit β un endomorphisme de $\ker X$ sur $(\ker X)^\perp$ tel que $\beta(a_i) \neq 0, \beta(b_i) \neq 0$ dès que a_i et b_i sont non nuls, Y_1 la matrice de β dans la base e_i. On pose

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & Y_1 \\ -^t Y_1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\tilde{\beta}$ l'endomorphisme représenté par y dans la base e_i. Si Y_2 est la matrice de $\tilde{\beta}$ dans la base canonique, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} 0 & -Y_2 \\ Y_2 & 0 \end{pmatrix}$$

résoud $\mathcal{S}_1$ dans l'image par $\Phi_\mathbb{C}$ de $Sym(\mathfrak{so}(n,\mathbb{C}))$. ∎

Proposition 2.3.5 *$V_{SO^*(2n)} \simeq SO^*(2n)/U(n)$ vérifie la condition (C).*

$$SO^*(2n) = \{g \in SO(2n,\mathbb{C}),^t \overline{g} J_{2n} g = J_{2n}\}$$

$$\mathfrak{so}^*(2n) = \{g \in M_{2n}(\mathbb{C}),^t g + g = 0,^t \overline{g} J_{2n} + J_{2n} g = 0\}$$

$$Sym(\mathfrak{so}^*(2n)) = \left\{ i \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & -Y_1 \end{pmatrix}, Y_1, Y_2 \text{ réelles}, Y_1 +^t Y_1 = 0, Y_2 +^t Y_2 = 0 \right\}$$

Preuve. Soit $X \in T_I V_{SO^*(2n)}$, X s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & -\tilde{X} \\ \tilde{X} & 0 \end{pmatrix}$$

et $\tilde{X}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & -X_1 \end{pmatrix} = T\Phi_\mathbb{C}(\tilde{X}_\mathbb{C}) = T\Phi_\mathbb{C}(X_2 + iX_1)$$

$T_1(X)$ s'identifie à un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}^n$.

La condition (C) pour $SO^*(2n)$ se ramène alors au problème suivant : soit X une matrice complexe antisymétrique, z_i une famille finie de vecteurs non nuls de

$KerX$, il existe Y antisymétrique telle que $Yz_i \neq 0$ et ${}^tz_iYz_i = 0$. La matrice X étant antisymétrique, elle s'écrit

$$ {}^tG \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} G $$

avec $G \in SL_n(\mathbb{C})$ et X_1 inversible. $G^{-1}z_i$ est donc de la forme $(0, \alpha_i)$. On choisit alors Y_0 telle que $Y_0\alpha_i \neq 0$ et on pose

$$ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & Y_0 \\ -{}^tY_0 & 0 \end{pmatrix} $$

On vérifie que $Y = {}^tG^{-1}\tilde{Y}G^{-1}$ résout le système associé.

■

2.3.5 Réseaux symplectiques

Pour terminer, on regarde les réseaux réels (respectivement complexes) σ-isoduaux pour une isométrie (respectivement une isométrie complexe) σ de carré $-Id$. L'ensemble de ces réseaux est l'orbite de l'identité sous l'action de $Sp(n, \mathbb{R})$ (respectivement $Sp(n, \mathbb{C})$).

$$ Sp(n, \mathbb{C}) = \{g \in Gl_{2n}(\mathbb{C}), {}^t gJ_{2n}g = j_{2n}\} $$
$$ \mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}) = \{g \in M_n(\mathbb{C}), {}^t gJ_{2n} + J_{2n}g = 0\} $$
$$ Sym(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})) = \left\{ \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ \overline{Z_2} & -\overline{Z_1} \end{pmatrix}, {}^t\overline{Z_1} = Z_1, {}^t Z_2 = Z_2 \right\} $$

Proposition 2.3.6 *$V_{Sp(n,\mathbb{C})} \simeq Sp(n, \mathbb{C})/Sp(n)$ vérifie la condition (C).*

Preuve. Les éléments de $Sym(\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C}))$ sont de la forme $T\Phi_{\mathbb{H}}(Z_1 + jZ_2)$ avec ${}^tZ_1 = Z_1$, ${}^t\overline{Z}_2 = Z_2$. On identifie $T_1(X)$ à un sous-ensemble de $\mathbb{H}^n$ et on définit A comme le sous-espace de $\mathbb{H}^n$ engendré par les éléments de $T_1(X)$. Quitte à changer de base, on peut supposer que X est de la forme

$$ \begin{pmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} $$

On choisit alors $Y_0 = Z_1 + jZ_2$ telle que $Yh \neq 0$ pour $h \in T_1(X)$ et on pose

$$ Y = \begin{pmatrix} 0 & Z_1 + jZ_2 \\ {}^tZ_1 + j{}^t\overline{Z_2} & 0 \end{pmatrix}. $$

■

Chapitre 3

Singularités des systoles généralisées

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on démontre le théorème suivant:

Théorème 2 *Soit μ une systole généralisée donnée par des longueurs possédant des Hessiens définis positifs pour une connexion. Alors μ est une fonction de Morse topologique dont les points de Morse d'indice r sont les points eutactiques de rang r.*

La systole et l'invariant d'Hermite vérifient les hypothèses du théorème. On obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire *La systole des surfaces de Riemann est une fonction de Morse sur l'espace de Teichmüller.*

On retrouve aussi le résultat de A. Ash [As1] sur l'invariant d'Hermite des réseaux.

La systole des surfaces de Riemann a été longuement étudiée par P. Schmutz Schaller ([Sc1],[Sc2] voir aussi [Sc3],[Sc4]). Récemment, en se restreignant à certaines familles de géodésiques fermées, il a découvert une fonction de Morse sur l'espace de Teichmüller invariante sous l'action d'un sous-groupe d'indice fini du groupe modulaire [Sc5]. Cependant, cette fonction n'est pas définie sur les espaces de Teichmüller correspondants à des surfaces compactes. Il obtient également une classification des points critiques pour le genre 2 (cas compact).

Les démonstrations de A. Ash et P. Schmutz Schaller s'appuient sur l'existence d'un sous-ensemble particulier correspondant à des "minima" de la fonction. Cet ensemble est l'image de $(\mathbb{R}^{*+})^k$ par une application de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le rang en un point est donné par le rang des gradients d'une certaine famille de longueurs en l'image de ce point. Les démonstrations de A. Ash et de P. Schmutz Schaller nécessitent que cet ensemble soit une sous-variété. Par linéarité, cette condition est vérifée pour l'invariant d'Hermite. Pour les surfaces de Riemann, P. Schmutz Schaller est amené à réduire la famille des fonctions pour obtenir un rang constant. Ceci explique que sa méthode ne semble pas aboutir en général pour la systole.

La démonstration du théorème 2 est totalement indépendante des démonstrations ci-dessus. Elle s'appuie sur des hypersurfaces topologiques H qui correspondent, pour les points de Morse, à des “maxima” de la fonction (voir (1) ci-dessous où H est défini par $t = 0$).

3.2 Généralités

La notion de fonction de Morse est bien connue dans le cadre différentiable. Commençons par rappeler la définition d'une fonction de Morse topologique. Soit f une fonction continue définie sur une variété M de classe $\mathcal{C}^0$ et de dimension n, un point p de M est dit *régulier* s'il existe une carte topologique ϕ en p telle que $f \circ \phi^{-1} - f(p)$ soit une projection (restriction d'une forme linéaire non nulle). On dira que p est une singularité topologique pour f si p n'est pas un point régulier.

Un point p de M sera dit *singularité de Morse d'indice* r ou encore *point de Morse d'indice* r s'il existe une carte topologique ϕ en p telle que

$$f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = f(p) - \sum_{i=1}^{r} x_i^2 + \sum_{i=r+1}^{n} x_i^2$$

La fonction $f \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n) - f(p)$ est donc restriction d'une forme quadratique de signature $(n - r, r)$.

La fonction f est une *fonction de Morse topologique* si tout point de M est régulier ou de Morse. Une carte dans laquelle f est une projection ou une forme quadratique sera dite *carte de Morse*. D'après M. Morse [Mor], cette définition est cohérente, c'est-à-dire que la nature du point et l'indice ne dépendent que de f et pas de la carte choisie. Remarquons aussi que même dans le cadre différentiable, cette notion est plus générale. Par exemple $f(x) = x^4$ est une fonction de Morse topologique sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas une fonction de morse classique. En regardant dans une carte de Morse, on voit que les points de Morse sont forcément isolés dans M. En général [Mor], on se limite à une variété compacte, mais les définitions ci-dessus étant locales, elles ont un sens dans toute variété.

La démonstration du théorème 2 se ramène à démontrer le résultat suivant (on munit $\mathbb{R}^n$ de la métrique euclidienne canonique):

Soit $l_1, \dots, l_r$ une famille de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 telles que $l_i(0) = 0$ pour tout i et dont les dérivées secondes en 0 *sont définies positives. Soit $\mu = min_i(l_i)$ alors*

- *si* 0 *n'est pas eutactique,* 0 *est régulier pour μ.*

- *si* 0 *est eutactique de rang* r*, c'est un point de Morse d'indice* r *pour* μ.

En effet, tout d'abord, on remarque que, par continuité, si le Hessien d'une fonction est défini positif en un point p, il le reste au voisinage de p. En particulier, si f est une fonction dont le Hessien pour une connexion est défini positif, à travers la carte exponentielle en p associée à cette connexion, on obtient une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ dont le Hessien est défini positif en 0, et donc sur un voisinage de 0.

Seules les longueurs minimales contribuent localement à la définition de μ. A travers la carte exponentielle, on est donc ramené à étudier le minimum d'une famille finie de fonctions définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$ toutes nulles en 0, et dont les dérivées secondes sont définies positives.

Dans toute la suite, on utilisera le théorème d'invariance du domaine de Brouwer sous la forme suivante, (pour une démonstration, voir par exemple [I-T] page 67):

Soit U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$*, et* $f : U \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue et injective. Alors* $f(U)$ *est ouvert et* f *est un homéomorphisme de* U *sur* $f(U)$*.*

La démonstration du théorème 2 se fait alors en plusieurs étapes.

Tout d'abord, on traite facilement le cas où tous les gradients minimaux sont nuls et le cas des points ordinaires.

On traite ensuite le cas des points semi-eutactiques non eutactiques dont 0 est un sommet de l'enveloppe convexe des gradients minimaux. On s'appuie sur une hypersurface topologique pour recoller deux cartes régulières. On en déduit qu'un tel point est un point régulier.

Pour finir, on sépare en deux l'enveloppe convexe des gradients de manière à obtenir deux familles de fonctions pour lesquelles le point est ordinaire pour une et semi-eutactique avec 0 comme sommet de l'enveloppe convexe des gradients pour l'autre. On utilise alors une hypersurface topologique H pour recoller ces deux cartes et montrer que, modulo action d'un homéomorphisme, μ est de la forme

$$\mu|_H - |t|^2. \tag{1}$$

Le point fondamental est alors de remarquer que $\mu|_H$ vérifie encore les hypothèses du théorème. On peut ainsi conclure par récurrence sur le rang des gradients.

Dans toute la suite, on fait la convention suivante:

Convention Un point semi-eutactique sera un point semi-eutactique **non** eutactique.

3.3 Cas de quelques points particuliers

Dans toute la suite, μ est une systole généralisée définie au voisinage de 0 par des fonctions $l_1, \dots, l_r$ toutes nulles en 0 dont les Hessiens sont définis positifs. L'espace $\mathbb{R}^n$ est munit de la métrique euclidienne canonique. On note $d_x^k l_i$ la dérivée k-ième de l_i en x.

Lemme 3.3.1 *Soit $f_i :]a, b[\to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ une famille de fonctions strictement croissantes, et soit f une fonction continue telle que pour tout x, il existe i, $f(x) = f_i(x)$, alors f est strictement croissante sur $]a, b[$.*

Preuve. Le résultat est clair si $n = 1$.

Supposons le lemme vrai pour $n - 1$ fonctions. Soit $a < t_1 < t_2 < b$, $f(t_1) = f_1(t_1)$, et $f(t_2) = f_2(t_2)$. On pose

$$t_3 = sup\{t \in [t_1, t_2], f(t) = f_1(t)\}$$

Par continuité de f, on a $f(t_1) \leq f(t_3)$.

Si $t_3 < t_2$, alors sur l'intervalle $]t_3, t_2[$, f vérifie les hypothèses du lemme pour les $n-1$ fonctions $f_2, \dots, f_n$. Elle est donc strictement croissante sur cet intervalle et par continuité sur l'intervalle $[t_3, t_2]$. On a donc

$$f(t_1) \leq f(t_3) < f(t_2).$$

Si $t_3 = t_2$, soit u_n une suite strictement croissante de $\{t \in]t_1, t_2], f(t) = f_1(t)\}$ qui tend vers t_2. Alors $f(u_n) = f_1(u_n)$ est strictement croissante. On a donc

$$f(t_1) = f_1(t_1) < f_1(u_1) < lim_{n \to \infty} f(u_n) = f(t_2).$$

On conclut par récurrence sur n. ■

Si X est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$, on note H_X l'orthogonal de X et pour $p \in H_X$, on pose

$$I_p(t) = \{p + tX, p \in X^\perp, |p| < \epsilon, |t| < \epsilon\}$$

Lemme 3.3.2 *Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$ et f une fonction continue telle que pour tout p orthogonal à X, la fonction $f_p(t) = f(p + tX)$ soit injective. Alors l'application ϕ définie par*

$$\phi(p, t) = p + f(p + tX)X$$

est un homéomorphisme local.

Preuve. L'application ϕ est clairement continue.

Si $\phi(p+tX) = \phi(p_1+t_1X)$, alors $p = p_1$ et $f(p+tX) = f(p+t_1X)$. Le long des segments $I_p(t)$, f est injective. On a donc $t = t_1$ et ϕ est injective.

Le théorème d'invariance du domaine de Brouwer assure alors que ϕ est un homéomorphisme sur son image. ■

Soit p un point semi-eutactique (et donc par convention non eutactique) tel que 0 soit un sommet de l'enveloppe convexe des gradients minimaux, on pose $S^0 = \{i, \nabla_i = 0\}$ et $S^+ = \{i, \nabla_i \neq 0\}$. On définit alors $\mu^0 = \min_{i \in S^0} l_i$ et $\mu^+ = \min_{i \in S^+} l_i$.

Corollaire 3.3.1 *Soit X un vecteur tel que pour tout $i \in S^+$, $\langle \nabla_i, X \rangle > 0$ et soit H_X l'orthogonal de X. Alors l'application ϕ de $H_X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$\phi(p,t) = p + \left(\mu^+(p+tX) - \mu^0(p+tX)\right) X$$

est un homéomorphisme local.

Preuve. Pour tout point p, il existe $u \in S^+$ et $v \in S^0$ tels que

$$\mu^+(p+tX) - \mu^0(p+tX) = l_u(p+tX) - l_v(p+tX).$$

D'autre part, les fonctions $l_u - l_v$ sont strictement croissantes sur tous les segments $I_p(t)$ pour t dans un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ et p petit. En effet, d'après le choix de X, les produits scalaires de leurs gradients en 0 avec X sont strictement positifs.

D'après le lemme 3.3.1, la fonction $\mu^+ - \mu^0$ est strictement croissante donc injective le long des segments $I_p(t)$, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, p petit. Le lemme 3.3.2 assure que ϕ est un homéomorphisme local.

■

Corollaire 3.3.2 *Si tous les gradients minimaux en un point sont nuls, le point est de Morse d'indice 0.*

Preuve. Puisque les dérivées secondes des longueurs sont définies positives, ces fonctions sont strictement croissantes radialement. Le lemme 3.3.1 assure que μ est strictement croissante radialement.

On définie l'application θ par

$$\theta(x) = \sqrt{\mu(x)} \frac{x}{|x|}$$

prolongée par 0 en 0.

Cette application est clairement continue (car $\mu(0) = 0$) et injective car μ est radialement monotone. C'est donc un homéomorphisme local. De plus, $\mu(x) = |\theta(x)|^2$. ■

Rappelons qu'un point p est ordinaire si le vecteur nul n'est pas dans l'enveloppe convexe des gradients minimaux. C'est équivalent à dire qu'il existe un vecteur X tel que pour tout $i \in S(p)$, $\langle X, \nabla_i \rangle > 0$.

Lemme 3.3.3 *Les points ordinaires sont réguliers.*

Preuve. On se ramène en $0 \in \mathbb{R}^n$. Soit X tel que $\langle X, \nabla_i \rangle > 0$ pour tout $i \in S(0)$, alors par continuité, il existe un voisinage de 0 tel que ces produits scalaires restent positifs sur ce voisinage pour tout $i \in S(p)$. Toutes les longueurs l_i sont donc strictement croissantes le long des segments $I_p(t)$ pour ϵ suffisamment petit. D'après le lemme 3.3.1, μ est strictement croissante le long de ces segments. En particulier, μ est injective le long de ces segments.

On pose $\phi(p + tX) = p + \mu(p + tX)X$. Le lemme 3.3.2 assure que ϕ est un homéomorphisme local.

De plus, $\mu(p+tX) = P_X(\phi(p+tX))$ où P_X est la projection orthogonale sur X. ■

Corollaire 3.3.3 *Soit p un point semi-eutactique tel que 0 soit un sommet de l'enveloppe convexe des gradients minimaux, soit $S^0 = \{i, \nabla_i = 0\}$ et $S^+ = \{i, \nabla_i \neq 0\}$, soit $\mu^0 = \min_{i \in S^0} l_i$ et $\mu^+ = \min_{i \in S^+} l_i$, alors l'ensemble $\{\mu^0 = \mu^+\}$ est une hypersurface (topologique).*

Preuve. On choisit un vecteur X tel que pour tout $i \in S^+$, $\langle \nabla_i, X \rangle > 0$ et soit H_X l'orthogonal de X. On regarde l'application ϕ de $H_X \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$ définie dans le corollaire 3.3.1. On voit que $p + tX \in H$ si et seulement si $\phi(p+tX) = p$. Autrement dit, $H = \phi^{-1}(H_X)$ est une hypersurface topologique. ■

Lemme 3.3.4 *Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que $d_0 f.X \geq 0$, $d_0 g.X < 0$. Soit*

$$\phi(p + tX) = p + (f - g)(p + tX).X,$$

$H_X = X^\perp$ et $\tilde{f}$ la restriction $f \circ \phi^{-1}$ à H_X. Si la dérivée seconde de f est définie positive, il en est de même de celle de $\tilde{f}$.

Preuve. On calcule la différentielle de ϕ^{-1} restreinte à H_X :

$$d_p\phi^{-1}.H = H + \frac{(d_{\phi^{-1}(p)}g - d_{\phi^{-1}(p)}f).H}{(d_{\phi^{-1}(p)}f - d_{\phi^{-1}(p)}g).X}X$$

et la différentielle seconde en 0 de ϕ^{-1} restreinte à H_X:

$$d_0^2\phi^{-1}.(H, K) = \frac{d_0^2 g.(d_0\phi^{-1}.H, d_0\phi^{-1}.K) - d_0^2 f.(d_0\phi^{-1}.H, d_0\phi^{-1}.K)}{(d_0 f - d_0 g).X}X.$$

On reporte alors dans

$$d_p(f \circ \phi^{-1}).H = d_{\phi^{-1}(p)}f.d_p\phi^{-1}.H$$

$$d_0^2(f \circ \phi^{-1}).H^2 = d_0^2 f.(d_0\phi^{-1}.H)^2 + d_0 f.(d_0^2\phi^{-1}.H^2)$$

pour obtenir les dérivées premières et secondes de $\tilde{f}$ en 0 :

$$d_0\tilde{f}.H = \frac{d_0 g.H\ d_0 f.X - d_0 g.X\ d_0 f.H}{(d_0 f - d_0 g).X} \tag{$*1$}$$

$$d_0^2\tilde{f}.H^2 = \frac{d_0 f.X\ d_0^2 g.\left((d_0\phi^{-1}.H)^2\right) - d_0 g.X\ d_0^2 f.\left((d_0\phi^{-1}.H)^2\right)}{(d_0 f - d_0 g).X}. \tag{$*2$}$$

Il suffit alors de remarquer que $d_0 f.X \geq 0$, $d_0 g.X < 0$ et que $d_0\phi^{-1}$ est un isomorphisme linéaire.

■

Rappelons que par convention, un point semi-eutactique est un point semi-eutactique non eutactique.

Lemme 3.3.5 *Les points semi-eutactiques dont* 0 *est un sommet sont réguliers.*

Preuve. Soit X un vecteur tel que pour tout $u \in S^+$, $\langle \nabla_u, X\rangle > 0$. On définit, pour $p \in X^\perp$

$$\phi(p + tX) = p + (\mu^+ - \mu^0)(p + tX).X.$$

D'après le corollaire 3.3.1, ϕ est un homéomorphisme.

Soit $\tilde{\mu}^0 = \mu^0 \circ \phi^{-1}$, soit $x = \phi^{-1}(y)$. Il existe $i \in S^+(x), j \in S^-(x)$ tels que $y = \phi(x) = \phi_{ij}(x)$ où ϕ_{ij} est définie par

$$\phi_{ij}(p + tX) = p + (l_i - l_j)(p + tX)X$$

On a donc $\tilde{\mu}^0(y) = \mu^0(x) = l_j(x) = l_j \circ \phi_{ij}^{-1}(y)$. La fonction $\tilde{\mu}^0$ coïncide ainsi avec une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de la forme $l_j \circ \phi_{ij}^{-1}$, $i \in S^+$, $j \in S^0$.

Soit $l_{ij} = l_j \circ \phi_{ij}^{-1}$, la dérivée de l_{ij} est :

$$d_y l_{ij}.Y = d_x l_j.d_y\phi_{ij}^{-1}.Y$$

En particulier, elle est nulle en 0.

En utilisant le fait que $d_0 l_j = 0$, on obtient

$$d_0^2 l_{ij}(X, Y) = d_0^2 l_j(d_0\phi_{ij}^{-1}.X, d_0\phi_{ij}^{-1}.Y)$$

comme dérivée seconde en 0 de l_{ij}.

Les dérivées premières des l_{ij} en 0 sont donc nulles et leurs dérivées secondes sont définies positives. On en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout Y de norme 1, chaque fonction $l_{ij}(sY)$ est strictement croissante en s. D'après le lemme 3.3.1, la fonction $\tilde{\mu}^0(sY) = \mu^0 \circ \phi^{-1}(sY)$ est strictement croissante pour $s \in [0, \varepsilon[$.

On pose

$$\theta(y) = \sqrt{\tilde{\mu}^0(y)} \frac{y}{|y|}$$

prolongée par $\theta(0) = 0$. Alors θ est continue, et par monotonie de $\tilde{\mu}^0$, injective. C'est donc un homéomorphisme. De plus, θ fixe H_X.

Pour $p \in H_X$, on pose

$$\gamma_p(t) = \begin{cases} \phi^{-1}\theta^{-1}(\theta(p) + tX) & \text{si } t \geq 0 \\ \phi^{-1}(p + tX) & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

alors

$$\mu \circ \gamma_p(t) = \begin{cases} \mu^+ \circ \gamma_p(t) & \text{si } t < 0 \\ \mu^0 \circ \gamma_p(t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

En remarquant que $\phi^{-1}(p+tX)$ et $\phi^{-1}\theta^{-1}(\theta(p)+tX)$ coïncident en $t = 0$, on en déduit que $\gamma(p,t) = \gamma_p(t)$ est continue.

Supposons que $\gamma_p(t) = \gamma_{p_1}(t_1)$. Si t et t_1 sont de même signe, alors par injectivité de ϕ et θ, et en utilisant que θ fixe H_X, $p = p_1$, $t = t_1$. Si $t \leq 0$ et $t_1 \geq 0$, alors $\theta^{-1}(\theta(p_1) + t_1X) = p + tX$, puis $\theta(p_1) + t_1X = \theta(p + tX)$. En prenant le produit scalaire avec X, on obtient que t_1 et t sont de même signe donc nuls, et finalement, $p = p_1$. On en déduit que $\gamma(p,t) = \gamma_p(t)$ est continue et injective, donc un homéomorphisme local.

On vérifie que μ est strictement croissante le long des courbes γ_p.

L'application définie par $\rho(p,t) = p + \mu(\gamma_p(t))X$ est donc une carte topologique et $\mu \circ \gamma \circ \rho^{-1}$ est la projection sur X. ■

3.4 Hypersurface maximale

Dans toute la suite, on dira qu'un vecteur X vérifie H_1 si les deux conditions suivantes sont réalisées :

• si $\nabla_i \neq 0$ alors $\langle X, \nabla_i \rangle \neq 0$.
• les ensembles $S^+ = \{i, \langle X, \nabla_i \rangle > 0\}$ et $S^- = \{i, \langle X, \nabla_i \rangle < 0\}$ sont non vides.

Remarquons que le seul cas où l'on ne peut pas trouver un tel X est le suivant :

• tous les gradients sont positivement colinéaires, certains ou tous éventuellement nuls.

Pour un vecteur X vérifiant H_1, on pose :

• $S^+ = \{i, \langle X, \nabla_i \rangle > 0\}$ et $\mu^+ = min_{i \in S^+} l_i$.
• $S^- = \{i, \langle X, \nabla_i \rangle < 0\}$ et $\mu^- = min_{i \in S^-} l_i$.

- $S^0 = \{i, \nabla_i = 0\}$ et $\mu^0 = min_{i \in S^0} l_i$.
- $S^{+0} = S^+ \cup S^0$ et $\mu^{+0} = min_{i \in S^{+0}} l_i$.

Remarquons que d'après le choix de X, seul S^0 peut être vide, et dans ce cas $\mu^{+0} = \mu^+$.

Sauf mention contraire, on suppose dans cette partie qu'il existe un vecteur X vérifiant H_1.

3.4.1 Hypersurface maximale

Lemme 3.4.1 *L'application définie par*

$$\phi(p + tX) = p + (\mu^{+0} - \mu^-)(p + tX)X$$

est un homéomorphisme local. En particulier, l'ensemble $H = \{p \in \mathbb{R}^n, \mu^{+0}(p) = \mu^-(p)\}$ est une hypersurface topologique au voisinage de 0.

Preuve. La démonstration est la même que celle du corollaire 3.3.1 avec la fonction $\mu^{+0} - \mu^-$ en remarquant que pour $j \in S^-$, $\langle \nabla_j, X \rangle < 0$. En particulier, pour $i \in S^{+0}, j \in S^-$, on a $\langle \nabla_i - \nabla_j, X \rangle > 0$. ■

Dans la suite, cette hypersurface sera appelée *hypersurface maximale* (de μ par rapport à X).

Lemme 3.4.2 *Soit ϕ l'homéomorphisme défini par*

$$\phi(p + tX) = p + (\mu^{+0} - \mu^-)(p + tX)X$$

On pose $H = \{\mu^{+0} = \mu^-\}$ et $H_X = X^\perp$, alors

1. *$H = \phi^{-1}(H_X)$*
2. *Si $\tilde{\mu} = \mu \circ \phi^{-1}$, alors*

$$\tilde{\mu} = \min_{u \in S^{+0}, v \in S^-} f_u \circ \phi_{uv}^{-1}$$

En particulier, $\tilde{\mu}|_{H_X}$ est une systole généralisée dont les Hessiens des longueurs sont définis positifs.

Preuve. 1. est évident d'après la définition de ϕ.
2. De la même manière que pour le lemme 3.3.5, on montre que

$$\tilde{\mu} = \min_{u \in S^{+0}, v \in S^-} f_u \circ \phi_{uv}^{-1}$$

On utilise le corollaire 3.3.4 pour conclure. ■

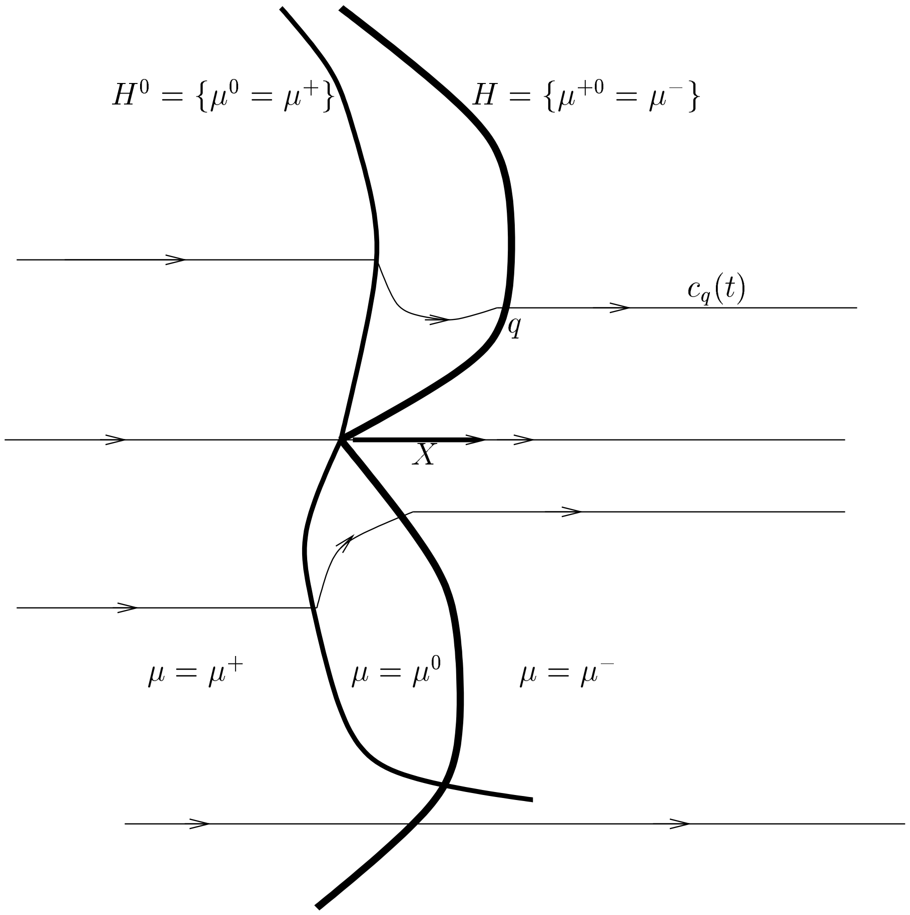

Figure 1.

3.4.2 Comportement en dehors de l'hypersurface

Soit $\gamma_p(t)$ les courbes du lemme 3.3.5 pour l'invariant μ^{+0}. L'application définie par $\gamma : (p,t) = \gamma_p(t)$ est un homéomorphisme. En particulier, tout point q de l'hypersurface maximale $H = \{\mu^{+0} = \mu^-\}$ s'écrit $q = \gamma(p(q), t(q)) = \gamma_{p(q)}(t(q))$.

Pour $q \in H$, soit c_q la courbe définie par

$$c_q(t) := \begin{cases} \gamma_{p(q)}(t) & \text{si } t \leq t(q) \\ q + (t - t(q))X & \text{si } t(q) \leq t \end{cases}$$

(voir Figure 1)

Lemme 3.4.3 *L'application c de $H \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $\mathbb{R}^n$ définie par*

$$c(q,t) = c_q(t)$$

est un homéomorphisme au voisinage de 0.

Preuve. Cette application est clairement continue en dehors de H. Les deux courbes $\gamma_q(t)$ et $q+(t-t(q))\,X$ coïncident sur $H=\{(q,t(q))\}$. On en déduit que c est continue en tout point de H et finalement continue partout.

On considère les ensembles

$$E_1 = \left\{(q,t), t>t(q), \mu(c_q(t)) = \mu^-(c_q(t)) < \mu^{+0}(c_q(t))\right\}$$

$$E_2 = \left\{(q,t), t<t(q), \mu(c_q(t)) = \mu^-(c_q(t)) < \mu^{+0}(c_q(t))\right\}$$

$$E_3 = \{(q,t), t>t(q), \mu(\gamma_{p(q)}(t)) = \mu^{+0}(\gamma_{p(q)}(t)) < \mu^-(\gamma_{p(q)}(t)\}$$

$$E_4 = \{(q,t), t<t(q), \mu(\gamma_{p(q)}(t)) = \mu^{+0}(\gamma_{p(q)}(t)) < \mu^-(\gamma_{p(q)}(t)\}.$$

Ces ensembles sont ouverts et fermés dans $\{(q,t), t>t(q)\}$ et $\{(q,t), t<t(q)\}$. En effet, la condition $t\neq t(q)$ implique que sur les ensembles E_1, E_2, E_3 et E_4, les conditions $\mu^{+0}<\mu^-$ et $\mu^{+0}\leq\mu^-$ sont équivalentes. Ces ensembles sont donc fermés par continuité de μ, μ^{+0} et μ^-. De plus, si $\mu^-<\mu^{+0}$ en un point x, cette inégalité reste vraie au voisinage de x. Ceux-ci sont donc aussi ouverts car μ coïncide avec μ^{+0} ou μ^- en tout point.

Par connexité de $\{(q,t), t>t(q)\}$ et $\{(q,t), t<t(q)\}$, les quatre ensembles ci-dessus leurs sont égaux ou vides. En regardant en $q=0$, on obtient $c_0(t)\in E_1$ pour $t>0$, et $c_0(t)\in E_4$ pour $t<0$.

On a donc

$$\mu(c_q(t)) = \begin{cases} \mu^{+0}(c_q(t)) & \text{si } t\leq t(q) \\ \mu^-(c_q(t)) & \text{si } t(q)\leq t \end{cases}$$

Supposons que $\gamma_{p(q)}(t) = q_1+(t_1-t(q_1))X = x$, $t\leq t(q)$, $t_1\geq t(q_1)$ alors $\mu(x)=\mu^{+0}(x)=\mu^-(x)$ et donc x est dans H. On en déduit que $(q,t)=(q_1,t_1)$, puis que c est injective. Par le théorème d'invariance du domaine, c est un homéomorphisme au voisinage de 0. ■

3.5 Singularités topologiques des systoles généralisées

3.5.1 Singularités possibles

Théorème 3.5.1 *Les singularités topologiques d'une systole généralisée dont les longueurs ont des Hessiens définis positifs sont des points de Morse.*

Preuve. On conserve les notations de la section 4. On suppose qu'on peut choisir X vérifiant H_1. On considère

$$\theta(q,t) = \left(q, \sqrt{\mu(q)-\mu(c_q(t))}sgn(t-t(q))\right).$$

où $sgn(x)$ est le signe de x pour $x\neq 0$, $sgn(0)=0$.

On vérifie que le long de c_q, μ est strictement croissante jusqu'à $t(q)$ puis strictement décroissante ensuite. On en déduit que θ est continue injective, donc un homéomorphisme local.

L'application L de $H\times]-\varepsilon,\varepsilon[$ définie par $L(q,t)=\mu(q)-|t|^2$ vérifie $\mu=L\circ\theta$. On a donc $\mu\circ\theta^{-1}=\mu|_H-|t|^2$. D'après le lemme 3.4.2, $\mu|_H$ se comporte comme une systole généralisée dont les longueurs ont des Hessiens définis positifs.

Par récurrence, μ est topologiquement équivalente à une fonction de la forme $\tilde{\mu}-\sum_{i=1}^{i=r}|x_i|^2$ et $\tilde{\mu}$ est une systole généralisée dont les Hessiens des longueurs sont définis positifs et pour laquelle aucun vecteur ne vérifie H_1.

Les gradients minimaux sont donc tous positivement colinéaires.

S'ils sont tous nuls, la fonction $\tilde{\mu}$ admet un minimum isolé en 0 et est équivalente à $\sum_{j=1}^{j=n-r}|x_i|^2$.

Sinon, $\tilde{\mu}$ est régulière car 0 est un point semi-eutactique pour lequel le vecteur nul est un sommet de l'enveloppe convexe des gradients minimaux. Dans ce cas, μ est régulière. ■

3.5.2 Détermination de l'indice

Dans toute cette partie, $(v_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs et X est un vecteur tel que :

- $\langle X,v_i\rangle=0$ implique $v_i=0$.
- les ensembles $S^+=\{i,\langle X,v_i\rangle>0\}$ et $S^-=\{i,\langle X,v_i\rangle<0\}$ sont non vides.

On pose $S^{+0}=S^+\cup\{i,v_i=0\}$. Pour $i\in S^{+0}$, $j\in S^-$, on pose

$$v_{ij}:=\langle X,v_i\rangle v_j-\langle X,v_j\rangle v_i.$$

Lemme 3.5.1 *On suppose que $\sum_i\alpha_iv_i=0$, alors*

$$\sum_{i\in S^{+0},j\in S^-}\alpha_i\alpha_jv_{ij}=0.$$

Preuve. Soit

$$S=\sum_{i\in S^{+0},j\in S^-}\alpha_i\alpha_jv_{ij}$$

En exprimant v_{ij} dans S, on obtient:

$$S=\sum_{i\in S^{+0}}\alpha_i\langle X,v_i\rangle\left(\sum_{j\in S^-}\alpha_jv_j\right)-\left(\sum_{i\in S^{+0}}\alpha_iv_i\right)\left\langle X,\sum_{j\in S^-}\alpha_jv_j\right\rangle.$$

On remplace alors $\sum_{j\in S^-}\alpha_jv_j$ par $-\sum_{i\in S^{+0}}\alpha_iv_i$. ■

Corollaire 3.5.1 *On reprend les notations des sections précédentes. Soit $\tilde{\mu}$ la restriction à H_X de la systole généralisée $\min_{ij}l_i\circ\phi_{ij}^{-1}$ du lemme 3.4.2. Alors*

- *si 0 est eutactique pour μ, il l'est pour $\tilde{\mu}$.*

– *Si* 0 *est semi-eutactique non eutactique pour* μ*, il l'est pour* $\tilde{\mu}$*.*

Preuve. D'après la relation (*1), les gradients minimaux de $\tilde{\mu}$ sont positivement colinéaires aux vecteurs $\langle \nabla_i, X\rangle \nabla_j - \langle \nabla_j, X\rangle \nabla_i$. D'après le lemme précédent, une relation de semi-eutaxie (respectivement d'eutaxie) sur les ∇_i donne une relation de semi-eutaxie (respectivement d'eutaxie) sur les ∇_{ij}.

De plus, si Y est tel que $\langle Y, \nabla_i\rangle \geq 0$ (respectivement $\langle Y, \nabla_i\rangle \geq 0$ pour tout i et $\langle Y, \nabla_{i_0}\rangle > 0$), alors pour $i \in S^{+0}, j \in S^-$, on a

$$\langle \nabla_{ij}, Y\rangle = \langle \nabla_i, X\rangle\langle \nabla_j, Y\rangle - \langle \nabla_j, X\rangle\langle \nabla_i, Y\rangle \geq 0$$

(respectivement

$$\langle \nabla_{ij}, Y\rangle = \langle \nabla_i, X\rangle\langle \nabla_j, Y\rangle - \langle \nabla_j, X\rangle\langle \nabla_i, Y\rangle \geq 0$$

pour tout $i \in S^{+0}, j \in S^-$ et

$$\langle \nabla_{i_0 j}, Y\rangle > 0 \text{ pour tout } j \in S^- \text{ si } i_0 \in S^{+0}$$
$$\text{ou}$$
$$\langle \nabla_{i i_0}, Y\rangle > 0 \text{ pour tout } i \in S^{+0} \text{ si } i_0 \in S^-).$$

On en déduit qu'un point semi-eutactique non eutactique se projette sur un point semi-eutactique non eutactique. ∎

Lemme 3.5.2 *Le rang de la famille* (v_{ij}) *est* $rang(v_i) - 1$

Preuve. L'espace engendré par les v_{ij} est contenu dans l'intersection de l'espace engendré par les v_i et de l'orthogonal de X. Puisque X n'est pas orthogonal à tous les v_i, c'est un sous-espace strict de l'espace vectoriel $Vect(v_i)$ engendré par les v_i. On a donc $rang(v_{ij}) \leq rang(v_i) - 1$.

On suppose tout d'abord qu'il existe une base $(v_1, \ldots, v_r)$ de $Vect(v_i)$ (où $r = rang(v_i)$) avec $v_1, \ldots, v_p \in S^-$ et $v_{p+1}, \ldots, v_r \in S^+$. Remarquons qu'il suffit pour cela qu'il existe un vecteur de S^+ et un vecteur de S^- non colinéaires. On vérifie que la famille

$$(v_{i,1})_{i=p+1\ldots r} \cup (v_{p+1,i})_{i=2\ldots p}$$

est libre. La rang de (v_{ij}) est donc aussi supérieur à $r - 1$.

Si on suppose que tous les v_i sont colinéaires, alors v_{ij} est nul pour tout i, j et le lemme est immédiat (rappelons que les v_i ne sont pas tous nuls par hypothèse). ∎

En combinant le théorème 3.5.1, le corollaire 3.5.1 et le lemme 3.5.2, on déduit le théorème suivant:

Théorème 3.5.2 *Soit* $\mu = min_{u \in C} l_u$ *une systole généralisée. On suppose qu'il existe une connexion telle que les Hessiens des longueurs soient définis positifs, alors* μ *est une fonction de Morse topologique dont les points de Morse d'indice* r *sont les points eutactiques de rang* r*.*

3.6 Applications et exemples

Dans cette section, on suppose que μ est une systole généralisée qui est une fonction de Morse dont les points de Morse d'indice r sont les points eutactiques de rang r.

3.6.1 Propriétés générales

Lorsque les Hessiens des longueurs sont définis positifs, le théorème 3.5.2 assure que μ vérifie cette hypothèse. Elle vérifie aussi un théorème de Voronoï.

Lorsque μ est une fonction de Morse topologique, on voit facilement, en prenant une carte de Morse, que les points extrêmes sont strictement extrêmes et que ce sont les points de Morse d'indice maximal.

D'après l'hypothèse faite, on sait que ceux-ci sont les points eutactiques de rang maximal $dim(X)$. Un tel point est forcément parfait. On retrouve donc un théorème de Voronoï.

3.6.2 Fonctions de Morse équivariantes

La calcul de la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un sous-groupe discret d'isométries fait naturellement intervenir des quotients de variétés par des groupes. La théorie ci-dessus permet de connaître facilement l'homologie d'un tel quotient.

Remarque

Si $(l_u)_{u\in\mathcal{C}}$ est une famille de longueurs sur M, et si Γ est un sous-groupe de difféomorphismes de M, quitte à saturer la famille de longueurs par les fonctions $l_u \circ g$, $u \in \mathcal{C}$, $g \in \Gamma$, on peut faire agir Γ naturellement à droite sur les longueurs par composition. Si $x = g.y$, alors $\mu(x) = l_u(x) = l_u \circ g^{-1}(y) \geq \mu(y)$, on obtient l'égalité en remplaçant g par g^{-1}. La systole généralisée μ est donc définie sur le quotient. Si Γ est sans torsion, μ induit une fonction de Morse topologique sur le quotient $\Gamma\backslash M$ ayant un point critique d'indice r pour chaque Γ-orbite de point eutactique de rang r.

Exemple

Partant d'une fonction f définie sur une variété M dont le Hessien pour une connexion est défini positif et d'un sous-groupe Γ sans torsion de transformations affines de M, il est facile de construire une fonction de Morse sur le quotient $\Gamma\backslash M$. On regarde en effet la famille de longueurs définie par $l_g = f \circ g$. Puisque g est une transformation affine, ces fonctions ont des Hessiens définis positifs. On suppose que pour tout réel K et tout point $p \in M$, il existe un voisinage W de p tel que l'ensemble $\cup_{q\in W}\{g \in \Gamma, f \circ g(q) \leq K\}$ est fini, alors la systole généralisée définie par la famille (l_g) donne une fonction de Morse sur le quotient $\Gamma\backslash M$.

Lorsque M est une variété riemannienne complète de courbure négative ou nulle, on peut prendre pour f le carré de la distance à un point et la connexion de Levi-Civita.

Proposition 3.6.1 *Soit $\mu = min_u l_u$ une systole généralisée sur une variété simplement connexe M. On suppose que μ est une fonction de Morse topologique dont les points de Morse d'indice r sont les points eutactiques de rang r. Soit Γ un sous-groupe discret virtuellement sans torsion de difféomorphismes de M agissant à droite sur les longueurs. On suppose qu'il n'y a qu'un nombre fini de points eutactiques modulo Γ et que ceux-ci sont tous dans un compact $\mu^{-1}([a,c])$ modulo Γ. Soit $\mathcal{E}$ un système de représentants des points eutactiques modulo Γ, alors la caractéristique d'Euler-Poincaré de Γ est*

$$\chi(\Gamma) = (-1)^{dim(M)} \sum_{p\in E} \frac{(-1)^{ind(p)}}{|\Gamma_p|}$$

où Γ_p est le stabilisateur de p dans Γ.

Preuve. Soit Γ_0 un sous-groupe sans torsion d'indice fini de Γ, μ donne une fonction de Morse $\tilde{\mu}$ sur le quotient $\tilde{M} = \Gamma_0 \backslash M$. La fonction $-\tilde{\mu}$ définie sur $\tilde{M}$ vérifie les hypothèses suivantes:

- Le nombre de points critiques est fini et pour chacun d'eux, son indice est $dim(M) - ind(p)$.
- Il existe un compact $-\tilde{\mu}^{-1}([-c,-a])$ qui les contient.

On adapte alors le lemme 3.5 de [MSW] pour démontrer que $\tilde{M}$ a le type d'homotopie d'un CW-complexe ayant une k-cellule pour chaque point critique d'indice k. En particulier,

$$\chi(\tilde{M}) = (-1)^{dim(M)} \sum_{p \ modulo\ \Gamma_0} (-1)^{ind(p)}.$$

On conclut en divisant par l'indice de Γ_0 dans Γ et en regroupant les classes modulo Γ ce qui fait apparaître les stabilisateurs. ■

Remarquons que d'après le théorème 3.5.2, la proposition 3.6.1 s'applique si les longueurs ont des Hessiens définis positifs pour une connexion et si Γ est un sous-groupe de transformations affines.

3.6.3 Une formule d'Euler pour le groupe modulaire

Soit $\Gamma_{g,n}$ le groupe modulaire de Teichmüller pour les surfaces de Riemann de signature (g,n). Ce groupe est l'ensemble des classes d'isotopie de difféomorphismes directs de la surface. Il agit donc naturellement sur les groupes d'homologie $H_1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$. On note $\Gamma_X(m)$ le noyau de l'homomorphisme

$$\Gamma_{g,n} \to Aut(H_1(X,\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}))$$

On sait que $\Gamma_X(m)$ est un sous-groupe d'indice fini sans torsion de $\Gamma_{g,n}$ ([Iva]).

Si toutes les systoles d'une surface S ne s'intersectent pas, on peut trouver une surface S' telle que la longueur de chaque géodésique de S' correspondant aux systoles de S est inférieure. Si on connecte S et S' par une géodésique de Weil-Petersson, on obtient, par stricte convexité, un vecteur X ayant un produit scalaire strictement positif avec tous les gradients minimaux en S. La surface S est donc ordinaire. On en déduit qu'une surface semi-eutactique ou eutactique S admet deux systoles qui se coupent. Le lemme du collier assure qu'il existe ε tel que $syst(S) > \varepsilon$. D'après D. Mumford [Mum] (et L. Bers pour les surfaces non compactes [Ber]), on en déduit que les surfaces eutactiques sont dans un compact modulo $\Gamma_{g,n}$.

Les longueurs ont des dérivées secondes définies positives pour la métrique Weil-Petersson [Wol]. On a donc les deux corollaires suivants :

Corollaire 3.6.1 *La systole est une fonction de Morse topologique sur l'espace de Teichmüller dont les points de Morse de rang r sont les surfaces eutactiques de rang r.*

La dimension $6g-6+2n$ de $T_{g,n}$ étant paire, on en déduit la formule d'Euler:

Corollaire 3.6.2

$$\chi(\Gamma_{g,n}) = \sum_{q\in\mathcal{E}} \frac{(-1)^{rang(q)}}{|(\Gamma_{g,n})_q|}$$

où $\mathcal{E}$ est un système de représentants des eutactiques modulo $\Gamma_{g,n}$.

3.6.4 L'invariant d'Hermite sur P_n

Pour plus de détails sur ce paragraphe, on pourra se reporter à [Ba2].

Sur le fibré tangent TP_n à P_n, on introduit le champ de vecteur

$$\mathcal{Z}(A,X) = \left[X, \frac{Tr(A^{-1}X)}{n}A\right].$$

Les projections sur P_n des orbites du flot associé sont les courbes intégrales de l'équation différentielle

$$A'' = \frac{Tr((A^{-1}A')^2)}{n}A.$$

Le long de ces courbes, les fonctions longueurs classiques vérifient l'équation différentielle

$$f'' = \frac{Tr((A^{-1}A')^2)}{n}f.$$

En particulier, les dérivées secondes de celles-ci sont définies positives et on peut appliquer le théorème 3.5.2. On retrouve ainsi le résultat de A. Ash ([As1]).

Soit $\mathcal{E}$ est un système de représentants des points eutactiques modulo $\Gamma = SL(n,\mathbb{Z})$, on sait que $\mathcal{E}$ est fini (car les vecteurs minimaux doivent engendrer $\mathbb{R}^n$, voir par exemple [BM4]). On sait aussi que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\mu^{-1}([\varepsilon,\infty[)$ est compact modulo Γ ([Cas] p. 137). On peut donc appliquer la proposition 3.6.1 pour obtenir:

$$\chi(SL(n,\mathbb{Z})) = (-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}} \sum_{p\in\mathcal{E}} \frac{(-1)^{rang(p)}}{|SL(n,\mathbb{Z})_p|}.$$

Dans la formule de masse donnée par A. Ash [As2], on a $i(p) = N - rang(p)$ car celui-ci utilise la fonction $1/\mu$. Ceci explique le facteur $(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}$ devant la somme.

Bibliographie

[As1] *A. Ash,* On eutactic forms, Canad. J. Math. **29**, 5 (1977), 1040-1054.

[As2] *A. Ash,* On the existence of eutactic forms, Bull. London Math. Soc. **12** (1980), 192-196.

[Ba1] *Ch. Bavard,* Systole et invariant d'Hermite. J. reine angew. Math. **482** (1997), 93-120.

[Ba2] *Ch. Bavard,* Une formule d'Euler pour les classes minimales de réseaux. Prépub. Lab. Math. Pures de Bordeaux, **57** (1997).

[Ba3] *Ch. Bavard,* Familles hyperboliques de réseaux symplectiques. Prépub. Lab. Math. Pures de Bordeaux, **59** (1997).

[BM1] *A. M. Bergé, J. Martinet,* Sur un problème de dualité lié aux sphères en géométrie des nombres, J. Number Th. **32** (1989), 14-42.

[BM2] *A. M. Bergé, J. Martinet,* Réseaux extrêmes pour un groupe d'automorphismes, Astérisque **198-200** (1991), 41-66.

[BM3] *A. M. Bergé, J. Martinet,* Densité dans des familles de réseaux, application aux réseaux isoduaux, Enseign. Math. **41** (1995), 335-365.

[BM4] *A. M. Bergé, J. Martinet,* Sur la classification des réseaux eutactiques, J. London Math. Soc. **53** (1996), 417-432.

[Ber] *L. Bers,* A remark on Mumford's compactness theorem, Israel J. Math. **12** (1972), 400-407.

[B-S] *P. Buser, P. Sarnak,* On the period matrix of a Riemann surface of large genus (with an Appendix by J. H. Conway and N. J. A Sloane), Invent. Math. **117** (1994), 27-56.

[Cas] *J. W. S. Cassels,* An introduction to the geometry of numbers. Second printing, corrected. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **99**. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.

[Cou] *R. Coulangeon,* Réseaux k-extrêmes, Proc. London Math. Soc. **73** 3 (1996), 555-574.

[Ebe] *P. Eberlein,* Structure of manifolds of non positive curvature, Lectures notes in Math. **1156** (1984), 86-153.

[Hel] *S. Helgason,* Differential geometry and symmetric spaces, Pure and applied mathematics, Academic Press, 1962.

[I-T] *Y. Imayoshi, M. Taniguchi,* An introduction to Teichmüller spaces, Springer Verlag, 1992.

[Iva] *N. V. Ivanov,* Subgroups of Teichmüller modular group, Trans. Math. Monographs **115**, AMS, 1992.

[MSW] *J. Milnor, M. Spivak, R. Wells,* Morse theory, Ann. Math. Studies **51**, Princeton University Press, 1953.

[Mor] *M. Morse,* Topologically non-degenerate functions on a compact n-manifold M, J. Analyse Math. **7** (1959), 189-208.

[Mum] *D. Mumford,* A remark on Mahler's compactness theorem, Proc. Amer. Math. Soc. **28** 1 (1971), 289-294.

[Nag] *S. Nag,* The complex analytic theory of Teichmüller spaces, John Wiley and Sons, 1988.

[Ran] *R. A. Rankin,* On positive definite quadratic forms, J. London Math. Soc. **28** (1953), 309-314.

[Sc1] *P. Schmutz,* Riemann surfaces with shortest geodesic of maximal length, Geom. Funct. Anal. **3**, 6 (1993), 564-631.

[Sc2] *P. Schmutz,* Compact Riemann surfaces with many systoles, Duke Math. J. **84**, 1 (1996), 191-198.

[Sc3] *P. Schmutz,* Arithmetic Fuchsian groups and the number of systoles, Math. Z. **223**, 1 (1996), 13-25.

[Sc4] *P. Schmutz,* Congruence subgroups and maximal Riemann surfaces, J. Geom. Anal. **4**, 2 (1994), 207–218.

[Sc5] *P. Schmutz Schaller,* Systoles and topological Morse functions for Riemann surfaces. Preprint.

[Vor] *G. Voronoï,* Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques, premier mémoire. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, J.reine angew. Math. **133** (1908), 97-178.

[Wol] *S. Wolpert,* Geodesic length functions and the Nielsen problem, J. Diff. Geom. **25** (1987), 275-296.